

タイトル	跳び石現象の数理モデル : 1次元多層解析の場合
著者	世戸, 憲治; 野中, 泰二郎; SETO, Kenji; NONAKA, Taijiro
引用	北海学園大学工学部研究報告(38): 19-36
発行日	2011-02-14

跳び石現象の数理モデル —1次元多層解析の場合—

世戸 憲治* · 野中 泰二郎**

Mathematical Modeling of Boulder Thrown-out by Earthquake — Case of One-Dimensional Elastic Tier —

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA**

要旨

地震時に発生する跳び石現象の1つのモデルとして、表層部がいくつかの層から構成されている場合の1次元弾性体理論に基づく解析をした。この理論から導かれる方程式の解は、固有関数の重ね合わせで表すことができ、解析的にでき得る限りコンパクトな形の厳密解を求めることに成功した。さらに、ここでの解析のより深い理解のため、これら結果に基づくパラメトリックなコンピュータ・シミュレータを作成した。

0 はじめに

跳び石現象が初めて注目されるようになったのは、1984年の長野県西部地震(M6.8)のときからである^{1),2)}。それ以降、大地震が発生したときに、震源地付近で跳び石が観測された例は、いくつか報告されている。日本に限って言うと、1995年の兵庫県南部地震(M7.2)でも発生している。跳び石現象が発生するには、地震による地表面の加速度が重力加速度の大きさ g を超えることが必要であるが、それまでは、地震による加速度はせいぜい大きくて重力加速度の6割程度と考えられてきた。これは、昔は地震の規模が小さかったことを意味するのではなく、近年になってから、観測体制が整ってきたことを意味している。

この跳び石現象について、現象論的な面から、あるいは、理論的な面から書かれたいくつかの論文がある。まず、梅田³⁾は跳び石現象が起こる地点は、彼がブライトスポットと呼んだ震源近くの余震がほとんど発生していない地点に集中していることを指摘した。このことは、跳び石現象が非常に強い1個のパルス波によって起こることを示唆している。松尾、伊藤、梅田ら⁴⁾は、石を投げ飛ばす実験をし、その跳んだ距離と地面の速度、加速度の関係を表す実験式を得ている。理論的なものとしては、吉田⁵⁾、および、林、金子、渡辺ら⁶⁾による表層部をばねと仮定したモデルで解析したものがある。また、野中、梅田、高畠ら⁷⁾は、表層部を多層から成る1次元的な弾性体として扱い、その下の基盤層からパルス波を入力させたときの地表の

*北海学園大学名誉教授 札幌市南区南沢4条3丁目8-7, E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

**京都大学名誉教授 京都市伏見区醍醐古道町 8-4, E-mail: nonaka_tai@ybb.ne.jp

動きを有限要素法を用いて解析した。同じく、Takabatake, Nonaka, Umeda ら⁸⁾は、同じ状況設定の問題を、Galerkin 法による近似解法を試みている。

この論文では、跳び石のモデルとして、野中、梅田、高島らの論文と同じ状況設定、すなわち、基盤層からのパルス波が、多層からなる表層部に与えられたとき石がどのような挙動をするかということを 1 次元線形の弾性体を用いた純理論的立場で解析する。結果として、コンパクトな形の厳密解を求めることができる。

1 方程式の導入

波動方程式

ここでは、一次元モデルを考え、質量 M の石が占める面積 S に沿って、地表から基盤層に達するまでの縦方向に一次的に切断した柱を考える。この基盤層はほとんど剛体と考えるが、表層部は線形の弾性体として扱う。さらにこの表層部は、組成が異なるいくつかの層が積み重なっているものとし、基盤層に近い方から、1 層目、2 層目、と数え、一般に第 N 層までであるものとする (図 1)。

ここで、表層部の第 n 番目の層の厚さ、Young 率、質量密度を、それぞれ、 ℓ_n , E_n , ρ_n , ($n = 1, 2, \dots, N$) とする¹。ここで扱う表層は、石の重力および表層それ自体の重力を受け、初めから圧縮された状態にあるが、ここで理論の構成上、いったん、重力がないものとして、座標系を設定し、その後、重力の導入によってどれくらい圧縮されるかを考えることにする。重力がないものとしたとき、基盤層のところを原点 0 とし、表層に沿って上向きに x 軸をとる。特に、この表層部内の各層の境目となる x 座標を

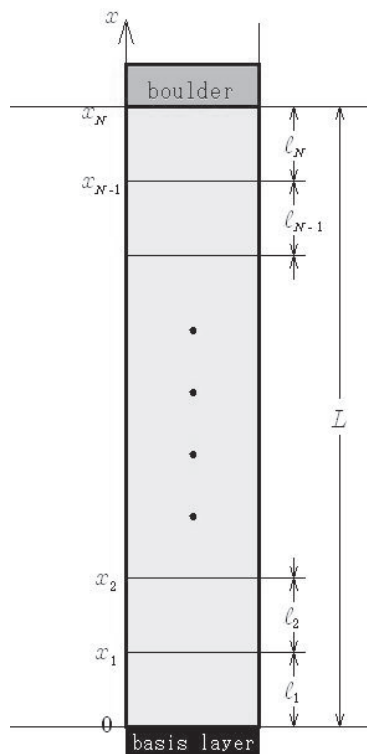


図 1 座標系

$$x_n = \sum_{n'=1}^n \ell_{n'}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

と定義する。 x_0 はゼロ、すなわち、原点であり、 x_N は表層部全体の厚さを表すもので、これを特に、

$$L = x_N \quad (1.2)$$

¹ここでは、3 次元的に拡がった弾性体中に仮想的に切り出した柱を考えているので、正しくは Young 率に当たる部分を E ではなく、Poisson 比 ν を用いて $(1-\nu)E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ とすべきである。

と定義しておく.

いま, 表層の第 n 番目の層に属する点 x , 時刻 t における縦方向の変位を $U(x, t)$ とする. この変位の x 導関数である $\partial U/\partial x$ はその点での歪みを与える. 仮にいまこの弾性体としての表層が, 引っ張りの状態にあるとき, 点 x においてその上下で引っ張り合う力を $F(x)$ とすると, この力はその点での歪みの大きさに比例し,

$$F(x) = E_n S \frac{\partial U}{\partial x}, \quad x_{n-1} < x < x_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (1.3)$$

と表される. この比例定数 $E_n S$ は, 弾性体をばねと考えたときのばね定数に相当するものである.

いま, この弾性体の第 n 番目に属する点 x と, そこから微小に離れた点 $x + dx$ で挟まれる部分を考える. この部分での質量密度は ρ_n なので, この部分に上から作用する力 $F(x + dx)$, および下から作用する力 $-F(x)$, さらに重力加速度を g として, この部分に作用する重力を考慮すると, 運動方程式

$$\rho_n S dx \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\rho_n S dx g + F(x + dx) - F(x)$$

を得る. あるいは書きなおして,

$$\rho_n \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\rho_n g + \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (1.4)$$

となる. これに (1.3) 式の力 F を代入して, 非斉次型の波動方程式

$$\rho_n \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\rho_n g + E_n \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (1.5)$$

を得る.

接続条件

これら表層部内の各層に分かれた変位 U の解を求めようとするとき, これらの変位を層ごとに接続する必要がでてくる. いま, $n-1$ 番目と n 番目の接続点を考えるとき, 第一に, これらの変位は連続でなければいけないので,

$$U(x_{n-1} - 0, t) = U(x_{n-1} + 0, t), \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (1.6)$$

という条件が必要になる. ここに, $+0, -0$ は, それぞれ, 正, 負の極限微小量である. また, この点で上から作用する力と下から作用する力は釣り合っていないといけないので,

$$E_{n-1} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_{n-1}-0} = E_n \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_{n-1}+0}, \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (1.7)$$

という条件も必要となる. この式から, $n-1$ 番目と n 番目で Young 率が違っていると, その歪みは不連続になることに注意する.

境界条件

ここで問題にしている表層部の一番下にあたる部分は、ほとんど剛体と考えられる基盤層に接していて、地震時にそこから一定の変位を受けるものとする。この変位を時間 t の関数として、 $D(t)$ とすると

$$U(0, t) = D(t) \quad (1.8)$$

という条件がつく。もう1つは表層部の一番上で石に接している点での条件が必要になる。この条件は石の運動方程式にほかならず、

$$M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = -Mg - E_N S \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (1.9)$$

が必要となる。この式右辺の2項目は石が弾性体から受ける垂直抗力である。石が地面に載っている限り、この垂直抗力は、上向きでなければならない。したがって、その部分で歪み $\partial U / \partial x$ は負の値をとり、圧縮になっている。この値がゼロになったときに石は地面から離れることになる。いったん離れた後は、その部分の歪みはなくなり自由端として振る舞う。

初期条件

初期条件として、初め $t = 0$ のときはこの弾性体のすべての部分がまったく振動を起こしていない状態、すなわち、初速度がゼロという状態

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.10)$$

を仮定する。初期変位に関しては、地震が始まる前の状態でも重力による変位分が存在するので、ゼロではない。これについては次節で議論する。

この論文の主目的は、波動方程式 (1.5) を、これまでに述べた接続条件 (1.6) (1.7)、境界条件 (1.8) (1.9)、初期条件 (1.10) の基に解くことである。

2 方程式の解法

静的な場合

方程式を解くにあたって、初めに地震が起きていないときの静的な解について調べておこう。このときの解 U を特に U_s と記すことにする。まず、波動方程式 (1.5) から、 U の時間微分をゼロとすると、

$$\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} = \frac{\rho_n g}{E_n}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

となるが、この式を x で1度積分して、

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} = \frac{\rho_n g}{E_n} x + \frac{a_n}{E_n}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

を得る. ここで, a_n は積分定数である. この a_n を決めるには, まず, 左辺をゼロとした境界条件 (1.9) 式に, $n = N$ とした (2.2) 式を代入すると,

$$a_N = -\left(\frac{M}{S} + L\rho_N\right)g \quad (2.3)$$

と a_N が求まり, あとは, (2.2) 式を, n 番号を1つ上げた接続条件 (1.7) 式に適用すると,

$$a_n - a_{n+1} = x_n(\rho_{n+1} - \rho_n)g, \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.4)$$

と a_n に関する漸化式が求められる. これを解くとすべての a_n が

$$a_n = a_N + \sum_{n'=n}^{N-1} x_{n'}(\rho_{n'+1} - \rho_{n'})g, \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.5)$$

と求められる.

さらに, (2.2) 式を積分して,

$$U_s = \frac{\rho_n g}{2E_n} x^2 + \frac{a_n}{E_n} x + b_n, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

となる. b_n は積分定数である. この b_n を決めるには, まず, $D(t) = 0$ とした (1.8) 式から

$$b_1 = 0 \quad (2.7)$$

となる. あとは (1.6) の接続式を用いて, b_n の漸化式

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{\rho_{n-1}}{2E_{n-1}} - \frac{\rho_n}{2E_n}\right)x_{n-1}^2 g + \left(\frac{a_{n-1}}{E_{n-1}} - \frac{a_n}{E_n}\right)x_{n-1} \quad (2.8)$$

を得, これから, b_n は

$$b_n = \sum_{n'=2}^n \left[\left(\frac{\rho_{n'-1}}{2E_{n'-1}} - \frac{\rho_{n'}}{2E_{n'}}\right)x_{n'-1}^2 g + \left(\frac{a_{n'-1}}{E_{n'-1}} - \frac{a_{n'}}{E_{n'}}\right)x_{n'-1} \right], \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (2.9)$$

と求められる.

これが, 地震がないときに表層が重力のために歪んだ分を表している. この U_s の値は, x の全範囲でゼロまたは負の値をとるはずのものであり, 当然ながら, 重力のために圧縮されたことを意味する.

動的な場合

つぎに, 地震が発生して, この弾性体としての表層部が動きだした場合を考えよう. このときの解 U を静的な解 U_s を用いて

$$U(x, t) = U_s(x) + U_d(x, t) \quad (2.10)$$

と表すことにしよう. つまり, 地震のために変動する部分を $U_d(x, t)$ と記すことにする. 以下, これまでに得た方程式をこの変数 $U_d(x, t)$ の言葉に直してみよう.

まず、波動方程式 (1.5) は

$$\frac{\partial^2 U_d}{\partial t^2} = c_n^2 \frac{\partial^2 U_d}{\partial x^2}, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.11)$$

と通常の斉次型波動方程式となる。ここに、波動伝搬速度 c_n は

$$c_n = \sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}} \quad (2.12)$$

と定義した。

また、境界条件について、表層部最上端の条件 (1.9) は、 $n = N$ とした (2.2) と (2.3) を利用すると、

$$M \frac{\partial^2 U_d}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = -E_N S \frac{\partial U_d}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (2.13)$$

と、これも斉次型の式となる。他の条件 (1.6) (1.7) (1.10) については、初めから斉次形なので変更はないが、 U_d の言葉で書き改めると、それぞれ、

$$U_d(x_{n-1} - 0, t) = U_d(x_{n-1} + 0, t), \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (2.14)$$

$$E_{n-1} \frac{\partial U_d}{\partial x} \Big|_{x_{n-1}-0} = E_n \frac{\partial U_d}{\partial x} \Big|_{x_{n-1}+0}, \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.16)$$

となり、また、(1.8) は、 $U_s(0) = 0$ より、

$$U_d(0, t) = D(t) \quad (2.17)$$

となる。

もう1つの初期条件

(1.10) 式の下で説明したように、これまで初期変位については述べてこなかった。これは、地震が起きる前から重力による変位が存在するためであったが、ここで改めて初期変位を U_d の言葉で、

$$U_d(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.18)$$

と定義する。

固有値と固有関数

ここでは、いったん、地震振動はないものとして、この与えられた振動系の固有振動について議論しよう。まず、変位 $U_d(x, t)$ について、時間部分と空間部分とに変数分離した形を仮定し、さらに時間部分については、角振動数 ω の単振動型とし、

$$U_d(x, t) = X(x) \sin(\omega t) \quad (2.19)$$

と置いてみる。時間部分について、余弦関数ではなく、正弦関数を採用したのは、初期変位の式 (2.18) を満たすためである。これを波動方程式 (2.11) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c_n^2} X, \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.20)$$

を得る。ここでは、この方程式の解として、

$$X(x) = A_n \sin\left(\frac{\omega}{c_n} x\right) + B_n \cos\left(\frac{\omega}{c_n} x\right), \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.21)$$

を採用する。ただし、 $n = 1$ のときは、

$$A_1 = L, \quad B_1 = 0 \quad (2.22)$$

とする。 $B_1 = 0$ としたのは、 $D(t) = 0$ とした (2.17) を満たすため、また、 $A_1 = L$ としたのは、関数 $X(x)$ の次元を、とりあえず長さの次元にするためであって、この関数の規格化に関しては後で議論する。

ここまでで、変位 U_d は (2.19) から

$$U_d(x, t) = \left[A_n \sin\left(\frac{\omega}{c_n} x\right) + B_n \cos\left(\frac{\omega}{c_n} x\right) \right] \sin(\omega t), \quad x_{n-1} < x < x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.23)$$

と表される。残る仕事は $n = 1$ 以外の A_n, B_n を決めることである。まず、この式を接続条件の式 (2.14) (2.15) に代入すると、 A_n, B_n の2変数が連立した漸化式を得る。ここでは、数式簡略化のため、

$$P_n = \sin\left(\frac{\omega x_{n-1}}{c_n}\right), \quad P'_n = \sin\left(\frac{\omega x_{n-1}}{c_{n-1}}\right), \quad Q_n = \cos\left(\frac{\omega x_{n-1}}{c_n}\right), \quad Q'_n = \cos\left(\frac{\omega x_{n-1}}{c_{n-1}}\right) \quad (2.24)$$

および、

$$\alpha_n = \frac{c_n E_{n-1}}{c_{n-1} E_n} \quad (2.25)$$

と置くことにして、これら連立した漸化式は

$$A_n P_n + B_n Q_n = A_{n-1} P'_n + B_{n-1} Q'_n \quad (2.26)$$

$$A_n Q_n - B_n P_n = \alpha_n (A_{n-1} Q'_n - B_{n-1} P'_n) \quad (2.27)$$

となる。これから A_n, B_n を求め行列形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_n)_{11} & (\Lambda_n)_{12} \\ (\Lambda_n)_{21} & (\Lambda_n)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (2.28)$$

ここに、 2×2 行列 Λ_n の各成分は

$$\begin{aligned} (\Lambda_n)_{11} &= P_n P'_n + \alpha_n Q_n Q'_n, & (\Lambda_n)_{12} &= P_n Q'_n - \alpha_n P'_n Q_n \\ (\Lambda_n)_{21} &= P'_n Q_n - \alpha_n P_n Q'_n, & (\Lambda_n)_{22} &= Q_n Q'_n + \alpha_n P_n P'_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

と定義される.

この漸化式 (2.28) をサイクリックに利用すると, 2 以上の n に対する A_n, B_n の値が

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \left(\prod_{n'=2}^n \Lambda_{n'} \right) \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (2.30)$$

と求められる. ここで, $\Lambda_{n'}$ の積は, $\Lambda_n \Lambda_{n-1} \cdots \Lambda_2$ の順で積をとることに注意する.

最後に課すべき条件として, 表層部最上端の条件 (2.13) がある. この式に (2.23) の U_d を代入すると,

$$(\omega M c_N A_N + S E_N B_N) \sin\left(\frac{\omega L}{c_N}\right) + (\omega M c_N B_N - S E_N A_N) \cos\left(\frac{\omega L}{c_N}\right) = 0 \quad (2.31)$$

という式がでてくる. このときには, A_N, B_N もすでに決まっているので, この式は角振動数 ω を決めるための式となる. すなわち, これが固有値方程式となる. この式から無限個の ω の値が求められるので, それらを小さい方から, $\omega_1, \omega_2, \dots$ とする. また, このときの固有関数を (2.21) から

$$X(x, \omega_i) = A_n \sin\left(\frac{\omega_i}{c_n} x\right) + B_n \cos\left(\frac{\omega_i}{c_n} x\right), \quad x_{n-1} < x < x_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.32)$$

と記すことにする.

固有関数の直交性

ここで, 固有値とは限らない 2 個の角振動数 ω, ω' を用意し, これら 2 個の値に対応して方程式 (2.20) を満たす関数 X を, それぞれ,

$$X = X(x, \omega), \quad X' = X(x, \omega') \quad (2.33)$$

と記すことにする. このとき,

$$\partial_x [X \partial_x X' - X' \partial_x X] = \frac{\omega^2 - \omega'^2}{c_n^2} X X', \quad x_{n-1} < x < x_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (2.34)$$

という恒等式が成立することは容易にわかる. この式を x について, x_{n-1} から x_n まで積分すると

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} X X' dx = \frac{c_n^2}{\omega^2 - \omega'^2} [X \partial_x X' - X' \partial_x X]_{x_{n-1}}^{x_n} \quad (2.35)$$

となるが, この式の両辺に ρ_n を掛けてから n について 1 から N まで和をとると,

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} \rho_n X X' dx \right) = \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \left\{ E_N [X \partial_x X' - X' \partial_x X]_{x=L} - E_1 [X \partial_x X' - X' \partial_x X]_{x=0} \right\} \quad (2.36)$$

となる. ただし, ここで, c_n の定義式 (2.12) 式, および, 関数 X, X' に関する接続条件式 (2.14) (2.15) を用いた. さらに, ここで, X, X' が $D(t) = 0$ とした (2.17) 式を満たすとする

と、この式右辺の大括弧中の2項目が消え、

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} \rho_n X X' dx \right) = \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} E_N [X \partial_x X' - X' \partial_x X]_{x=L} \quad (2.37)$$

となる。つぎに、いささか先見的ではあるが、この式の両辺に $\frac{M}{S} X X' \Big|_{x=L}$ を加えると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} \rho_n X X' dx \right) + \frac{M}{S} X X' \Big|_{x=L} \\ &= \frac{1}{S(\omega^2 - \omega'^2)} \left\{ [M\omega^2 X - E_N S \partial_x X] X' - [M\omega'^2 X' - E_N S \partial_x X'] X \right\}_{x=L} \end{aligned} \quad (2.38)$$

という式を得る。この式にたどり着くまでに、 $x=0$ での境界条件、および、2つの接続条件を用いた。あと $x=L$ での境界条件を用いると ω, ω' は固有値になるが、この $x=L$ での境界条件 (2.13) 式に、(2.19) 式を代入すると、

$$M\omega^2 X = E_N S \partial_x X, \quad M\omega'^2 X' = E_N S \partial_x X' \quad (2.39)$$

となり、これは、 ω, ω' が2個の相異なる固有値のときは、(2.38) 式の右辺がゼロになること、すなわち、異なる固有値に属する固有関数が直交することを示している。またさらに、 ω, ω' が同じ固有値になるときは (2.38) 式の右辺は $0/0$ の不定形になるので、まず、 ω' を固有値 ω_i とおいたのち、 $\omega \rightarrow \omega_i$ の極限をとると、(2.38) 式の右辺は、

$$= \frac{X(L, \omega_i)}{2S\omega_i} \left\{ \partial_\omega [M\omega^2 X(L, \omega) - E_N S \partial_x X(x, \omega)]_{x=L} \right\}_{\omega=\omega_i} \quad (2.40)$$

となる。これで、固有関数の直交関係式が得られたわけだが、これを記述する前に、拡張された密度 $\rho(x)$ というものを導入しておこう。すなわち、

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^N \rho_n \theta_n(x) + \frac{M}{S} \delta(L-x) \quad (2.41)$$

ここに、 δ は Dirac のデルタ関数、また、 $\theta_n(x)$ は

$$\theta_n(x) = \begin{cases} 1, & x_{n-1} < x < x_n \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2.42)$$

と定義された階段関数である。この拡張された密度 $\rho(x)$ を用いると、固有関数の直交関係式は

$$\int_0^{L+0} \rho(x) X(x, \omega_i) X(x, \omega_j) dx = N(\omega_i)^2 \delta_{i,j} \quad (2.43)$$

と表される。ここに、 $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタであり、また、 $N(\omega_i)^2$ は (2.40) 式そのもので、すなわち、

$$N(\omega_i)^2 = \frac{X(L, \omega_i)}{2S\omega_i} \left\{ \partial_\omega [M\omega^2 X(L, \omega) - E_N S \partial_x X(x, \omega)]_{x=L} \right\}_{\omega=\omega_i} \quad (2.44)$$

と定義される規格化定数である。したがって、 $X(x, \omega_i)/N(\omega_i)$ が規格化された固有関数ということになる。ただし、この直交関係式は、質量に関する重み付きの式となっている。特に、 $\rho(x)$ の中に Dirac のデルタ関数が現れるのは、地表面 $x = L$ で石の重み加わるためである。また、そのとき、デルタ関数の値のある部分をすべて含み得るように、この積分の上限は $L + 0$ と $+0$ を付けてあることに注意する。

固有関数の完備性

この直交式を用いて、あとで初期値問題を解くときに重要となる 1 つの公式を証明しておこう。それは、定数 1 をここでの固有関数で展開するとどうなるかということである。すなわち、

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i K(\omega_i) X(x, \omega_i) \quad (2.45)$$

と展開してみる。 ω_i を 1 個余計に入れたのは、後の便宜のためである。この式は固有関数の完備性を表す 1 つの例と捉えることができる。係数 $K(\omega_i)$ を求めるには、両辺に $\rho(x)X(x, \omega_j)$ を掛け、 x について 0 から $L + 0$ まで積分する。このとき、右辺の積分は、直交式 (2.43) を利用すると、ただちに、 $\omega_j K(\omega_j) N(\omega_j)^2$ となる。また、左辺の積分は、(2.20) 式、および、(2.39) 式を利用すると実行され、

$$\int_0^{L+0} \rho(x) X(x, \omega_j) dx = \frac{E_1}{\omega_j^2} \partial_x X(x, \omega_j) \Big|_{x=0} \quad (2.46)$$

となる。これから係数 $K(\omega_i)$ が

$$K(\omega_i) = \frac{E_1 \partial_x X(x, \omega_i) \Big|_{x=0}}{\omega_i^3 N(\omega_i)^2} \quad (2.47)$$

と決まる。ただし、この (2.45) 式には一つの注意が必要である。関数 X の定義 (2.21) (2.22) からわかるように、 $x = 0$ のとき、 $X = 0$ であるので、この式の右辺は $x = 0$ のところで、階段関数的に、1 に跳ね上がることになる。したがって、正しくは、

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i K(\omega_i) X(x, \omega_i) \quad (2.48)$$

と書くべきである。ここに、 $u(x)$ は単位階段関数で、 x が正のとき 1、 x がゼロまたは負のとき 0 と定義されたものである。

初期値問題と最終的な解の構成

ここまでで、最終的な解を求めるための準備が整った。動的変位 U_d の解は、(2.32) 式の形をした固有関数の重ね合わせで表せるだろう。ただし、固有関数 $X(x, \omega_i)$ は $x = 0$ でゼロなので、このままでは、どう重ね合わせても地震波の入力を表す (2.17) 式を満足させることはできない。また、地震が起こる前はすべての部分が静止していたという初速度ゼロの式 (2.16) についてはこれまで触れてこなかった。ここで、これらの残された問題を解決していこう。まず、

解 U_d の候補として、固有関数の線形結合と時間 t を加えた、

$$H(x, t) = t - \sum_{i=1}^{\infty} K(\omega_i) X(x, \omega_i) \sin(\omega_i t) \quad (2.49)$$

という関数を考えてみる。この t を加えたのは、これらの残された条件を満たすためであるが、もちろんこれだけでは、解を作ることは不可能である。なお、この項を加えても、波動方程式 (2.11)、弾性体上端の境界条件式 (2.13)、および、接続条件式 (2.14) (2.15) には、なんら抵触せずにそのまま成立することは容易に確かめられる。

この (2.49) 式で与えられる関数 $H(x, t)$ は $t = 0$ で $H = 0$ となるが、これにさらに、初速度もゼロという条件

$$\partial_t H(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (2.50)$$

を付け加えよう。この条件は

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i K(\omega_i) X(x, \omega_i) \quad (2.51)$$

となって、これは前に与えた (2.45) 式そのものである。したがって、このときの係数 $K(\omega_i)$ は (2.47) 式で与えられる。

最後の条件、すなわち、地震が起こって弾性体の下端における変位を (2.17) 式のように与えられた場合を満たすようにするには、つぎのようにする。まず、この関数 H に単位階段関数 $u(t)$ を掛けたものを関数 R とおく。すなわち、

$$R(x, t) = H(x, t)u(t) \quad (2.52)$$

ここに、単位階段関数 $u(t)$ は、(2.48) 式のところで与えたものと同じであるが、変数が x から t に代わっている。この関数 R で、 $x = 0$ と置いたものを時間 t で2度微分すると、

$$\partial_t^2 R(0, t) = \delta(t) \quad (2.53)$$

となる。一方、(2.17) の条件式を時間 t で2度微分したものは、

$$\partial_t^2 U_d(0, t) = \partial_t^2 D(t) \equiv \int_0^{\infty} \delta(t - t') \partial_{t'}^2 D(t') dt' \quad (2.54)$$

と書ける。この式と (2.53) 式を見比べると、関数 U_d は関数 R において、時間 t を $t - t'$ とずらし、重み $\partial_{t'}^2 D(t')$ を掛けて、 t' で積分したものと見なすことができる。すなわち、

$$U_d(x, t) = \int_0^{\infty} R(x, t - t') \partial_{t'}^2 D(t') dt' \quad (2.55)$$

と置くことができる。これは、方程式が線形であるために重ね合わせができることと、時間の平行移動に対し不変であることから許される。この表示式 (2.55) に、(2.52) 式、さらに (2.49) 式を代入してより具体的に表すと、解 U_d は

$$U_d(x, t) = \int_0^t (t - t') \partial_{t'}^2 D(t') dt' - \sum_{i=1}^{\infty} K(\omega_i) X(x, \omega_i) T(t, \omega_i) \quad (2.56)$$

と求められる。ここに、時間依存部分 $T(t, \omega_i)$ は、Duhamel 積分の形で、

$$T(t, \omega_i) = \int_0^t \sin [\omega_i(t-t')] \partial_{t'}^2 D(t') dt' \quad (2.57)$$

と定義されたものである。さらに、ここで、弾性体下端に与えられる変位 $D(t)$ に対し、初期変位と初速度はゼロという条件

$$D(0) = 0, \quad \partial_t D(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.58)$$

を課すことにする。この条件のもとに、(2.56) 式右辺の第 1 項目を部分積分すると、最終的に解

$$U_d(x, t) = D(t) - \sum_{i=1}^{\infty} K(\omega_i) X(x, \omega_i) T(t, \omega_i) \quad (2.59)$$

を得る。この解がこれまでに述べてきた、波動方程式、接続条件、境界条件、初期条件、のすべてを満たしていることも容易に確かめることができる。

この解を時間で 2 度微分して加速度を求めておくと、

$$\partial_t^2 U_d(x, t) = [1 - u(x)] \partial_t^2 D(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 K(\omega_i) X(x, \omega_i) T(t, \omega_i) \quad (2.60)$$

となる。この導出には、(2.48) の恒等式を用いた。この式の右辺 1 項目は $x = 0$ のときだけ有効な項で、それ以外の $x > 0$ のところでは消える項であることに注意する。

なお、(2.57) 式で与えられる時間依存部分 $T(t, \omega_i)$ の定義に含まれる被積分関数は、入力変位 $D(t)$ そのものではなく、それを時間で 2 度微分した加速度の形で含むようになっている。もし、これも、(2.58) 式の条件の基に、部分積分を施すと、

$$T(t, \omega_i) = \omega_i D(t) - \omega_i^2 \int_0^t \sin [\omega_i(t-t')] D(t') dt' \quad (2.61)$$

となり、これを (2.59) の解に代入すると、

$$U_d(x, t) = [1 - u(x)] D(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 K(\omega_i) X(x, \omega_i) \int_0^t \sin [\omega_i(t-t')] D(t') dt' \quad (2.62)$$

という形の解にすることもできる。しかし、この形の解は、(2.59) 式に比べ明らかに級数の収束性が悪いことと、地震計から直接的に与えられるデータは、変位そのものではなく、加速度の方であることを考慮すると、解として採用しない方がよい。

3 入力地震波の具体的変位を用いた解析

最も簡単な変位を用いた場合

ここでは、前節で求めた解に、具体的な入力変位を仮定した解析を試みる。弾性体下端に地震により加えられるパルス変位として、条件 (2.58) 式を満たし、かつ、最も積分しやすい形として、

$$D(t) = \begin{cases} \frac{D_0}{2} [1 - \cos(\omega_e t)], & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t_0 < t \end{cases} \quad (3.1)$$

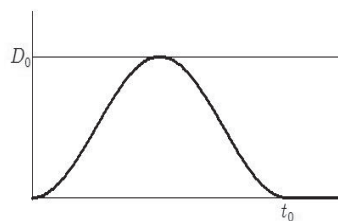


図2 入力波形

を仮定しよう。これは波高が D_0 で、角振動数 ω_e の余弦関数で表される波が時間 0 から t_0 までのあいだ続くことを意味する。この時間間隔 t_0 は本来、自由にとれる量ではあるが、以下では計算があまり煩雑化しないために、 t_0 は波のちょうど n 周期分にあたるように

$$t_0 = \frac{2\pi n}{\omega_e}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

となるように限定しておく。 $n = 1$ の場合の入力波形を図 2 に示す。

この地震によって与えられる変位 (3.1) を、(2.57) 式で定義された解 U_d の時間依存部分 $T(t, \omega_i)$ に代入すると

$$T(t, \omega_i) = \frac{D_0 \omega_e^2 \omega_i}{\omega_i^2 - \omega_e^2} \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega_i + \omega_e}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_i - \omega_e}{2} t\right), & t \leq t_0 \\ \sin\left[\omega_i\left(t - \frac{t_0}{2}\right)\right] \sin\left(\frac{\omega_i t_0}{2}\right), & t_0 < t \end{cases} \quad (3.3)$$

となる。ここで三角関数の和積公式を使った。

共振現象について

ここで得られた (3.3) 式を見ると、 t が t_0 より大きい場合も小さい場合も、特定の i 番号に対し、 $\omega_i = \omega_e$ となるとき、この時間依存部分 T は $0/0$ の不定形になってしまう。そこで、 $\omega_i \rightarrow \omega_e$ の極限をとると、

$$\lim_{\omega_i \rightarrow \omega_e} T(t, \omega_i) = \frac{D_0 \omega_e^2}{4} \begin{cases} t \sin(\omega_e t), & t \leq t_0 \\ t_0 \sin(\omega_e t), & t_0 < t \end{cases} \quad (3.4)$$

となって、 t が t_0 になるまでは時間に比例して振幅は増えるが、その後は一定振幅となる。このような現象をここでは、 n 波長共振現象と呼ぼう。この共振が起こっているとき、入力波の加速度に対する石が載っている地表面での加速度の比、すなわち、加速度応答倍率を求めてみよう。まず、(3.1) 式から

$$\text{入力波の加速度振幅} = \frac{D_0 \omega_e^2}{2} \quad (3.5)$$

が得られる。ここで、解 (2.59) あるいは (2.60) における固有関数展開部分で最も大きな寄与を持つ部分は、 $i = 1$ とした第 1 モードであろう。そこで、いま、この第 1 モードの ω_1 が入力

波の ω_e に等しく, $\omega_1 = \omega_e$ としよう. ここで, 石が存在する地表面 $x = L$ での加速度をこの第 1 モードで近似するとすると, (2.60) 式より,

$$\partial_t^2 U_d(L, t) \approx \omega_1^2 K(\omega_1) X(L, \omega_1) T(t, \omega_1) \quad (3.6)$$

となり, この式の時間依存部分 T に, $t_0 < t$ のときの (3.4) 式を代入すると,

$$\text{石が存在するところでの加速度振幅} \approx \omega_1^2 K(\omega_1) X(L, \omega_1) \frac{D_0 \omega_e^2 t_0}{4} \quad (3.7)$$

となる. これを (3.5) 式で割ると,

$$\text{加速度応答倍率} \approx \frac{t_0}{2} \omega_1^2 K(\omega_1) X(L, \omega_1) \quad (3.8)$$

と与えられる. 当然ながら, この倍率は入力波の持続時間 t_0 に比例して大きくなる. これはあくまで加速度を第 1 モードのみで近似した場合のことで, 第 2 モード以下の寄与を考慮したときは, これより大きくなることもあり得るだろう. 実際の数値については, 次節で述べる.

4 コンピュータ・シミュレーション

これまでの数式展開のより深い理解のため, ここではコンピュータによるシミュレータを作成した. このシミュレータでは, 各種のパラメータは, 実行時に自由に設定できるように作られているが, 1つのテストケースとして, 石の質量 M , 弾性体の断面積 S を

$$M = 100 \text{ kg}, \quad S = 1 \text{ m}^2$$

とし, 表層部の層の数を 3 個, すなわち, $N = 3$ とし, 各層の厚さ ℓ_n , Young 率 E_n , 質量密度 ρ_n を

$$\begin{aligned} \ell_1 &= 10 \text{ m}, & \ell_2 &= 10 \text{ m}, & \ell_3 &= 10 \text{ m}, \\ E_1 &= 20 \text{ MPa}, & E_2 &= 10 \text{ MPa}, & E_3 &= 5 \text{ MPa}, \\ \rho_1 &= 800 \text{ kg/m}^3, & \rho_2 &= 800 \text{ kg/m}^3, & \rho_3 &= 800 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

と設定した場合について述べておこう. なお, この設定で, 各層の波動伝搬速度 c_n は

$$c_1 = 160 \text{ m/s}, \quad c_2 = 110 \text{ m/s}, \quad c_3 = 80 \text{ m/s}$$

となる. さらに, (3.1) (3.2) 式に含まれる入射波に関するデータは, 波高 D_0 , 角振動数 ω_e を

$$D_0 = 1 \text{ m}, \quad \omega_e = 6 \text{ Hz}$$

とし, 入射波の個数は $n = 1$ 個とする.

まず、角振動数 ω の固有値 ω_i の個数は多ければ多いほど正確な結果が得られるが、実行速度の関係からここでは 50 個とする。そのうちの初めの 10 個分の値は

$$\begin{aligned} \omega_1 = 6.613 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 16.757 \text{ Hz}, \quad \omega_3 = 28.120 \text{ Hz}, \quad \omega_4 = 38.303 \text{ Hz}, \quad \omega_5 = 50.621 \text{ Hz}, \\ \omega_6 = 62.018 \text{ Hz}, \quad \omega_7 = 72.785 \text{ Hz}, \quad \omega_8 = 83.702 \text{ Hz}, \quad \omega_9 = 94.341 \text{ Hz}, \quad \omega_{10} = 107.270 \text{ Hz} \end{aligned}$$

である。最も低い角振動数 ω_1 の値は、入力波の角振動数 $\omega_e = 6 \text{ Hz}$ に近い値になっていて、ほぼ、共鳴状態にあることに注意する。図 3 はこれら固有値に属する固有関数 $\omega_i K(\omega_i) X(x, \omega_i)$ について、初めの 10 個分を示したものである。これらの固有関数を足し合わせたものは、(2.45) 式で示したように定数 1 となるべきものであるが、それが、この図の最右端に描かれている。ただし、(2.48) 式のところで指摘したように、この和は、 $x > 0$ のところで 1、また $x = 0$ では 0 となるはずであるが、この図からも、固有関数の完備性の 1 つの条件である (2.48) 式がほぼ満たされていることが読み取れる。

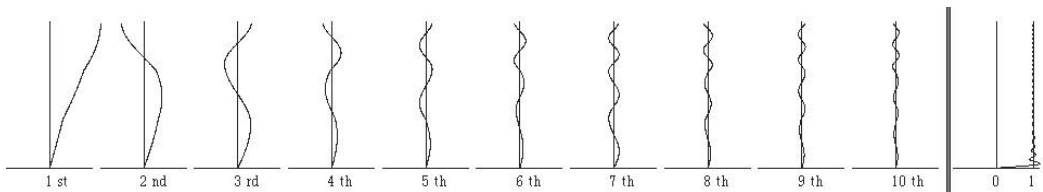


図 3 固有関数

つぎに、変位と歪みについて、時間発展をさせたときの履歴グラフを、図 4 と図 5 にそれぞれ示す。横軸は時間、縦軸は変位あるいは歪みの大きさであり、斜め上方向の軸は高さを表す。図 4 から、変位は下から上に伝搬するにつれ大きくなるのがわかる。これは、上に行くにつれ伝搬速度が小さくなるために、波の渋滞が起こるためである。いわば、高速道路と同じで、速度が遅い部分に到達するとそこで車が渋滞するのと同じ現象である。また、図 5 からは、層の境目のところで、歪みが不連続に変化していることに注意する。

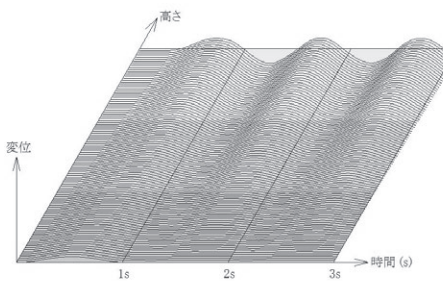


図 4 変位履歴

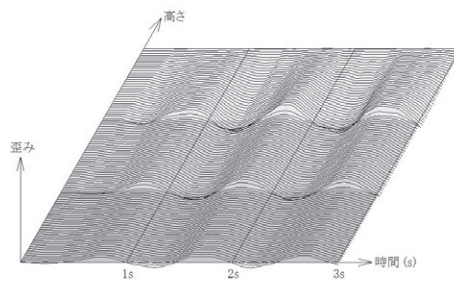


図 5 歪み履歴

つぎの図6, 図7は, それぞれ, 変位と加速度について, 弾性体の下端で入力されたときの値と, 上端で石に接するところでの値を比較したものである. このときの変位応答倍率は 2.114 倍, 加速度応答倍率は 6.141 倍となっている. (3.8) 式に従って計算された加速度応答倍率は 4.88 という値になるので, 実際はこれよりも大きくなることを示している. その理由は必ずしも共振のときが, 最大になるのではなく実際の最大値はそこより少しずれることと, (3.8) 式は第1モードのみで計算した値であるが, 第2モード以下の寄与が無視できないことによる.

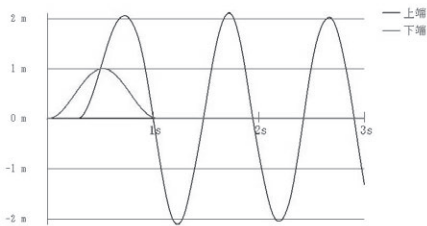


図6 上端と下端の変位

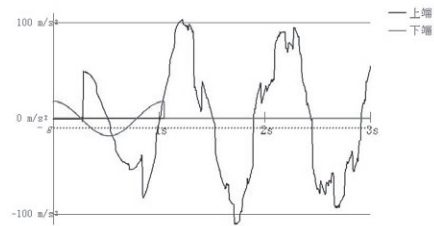


図7 上端と下端の加速度

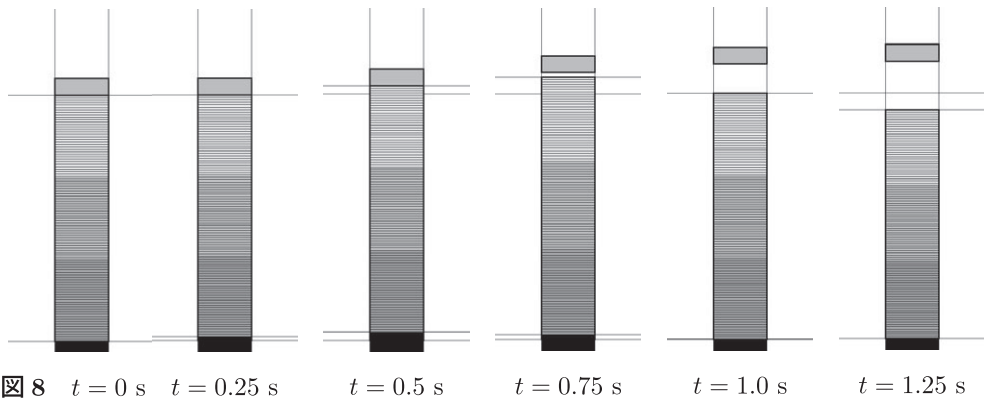
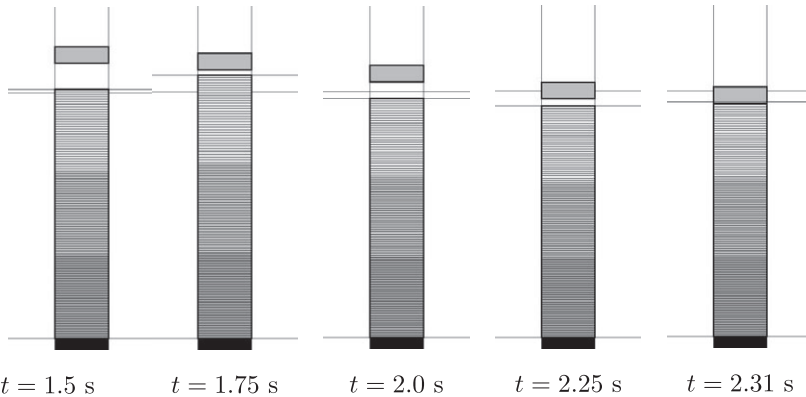


図8 $t = 0 \text{ s}$ $t = 0.25 \text{ s}$ $t = 0.5 \text{ s}$ $t = 0.75 \text{ s}$ $t = 1.0 \text{ s}$ $t = 1.25 \text{ s}$



$t = 1.5 \text{ s}$ $t = 1.75 \text{ s}$ $t = 2.0 \text{ s}$ $t = 2.25 \text{ s}$ $t = 2.31 \text{ s}$

前頁の図8は、石がどのように跳ぶかということ、時間間隔 0.25 秒毎に追ってみたものである。石は 0.54 秒のときに浮き始め、最後の 2.31 秒のときに再び地面に衝突する。このとき、石が平衡位置から上昇した最大の高さは、3.840 m である。ここでは、石が浮き始めた瞬間から、弾性体の方は、上端を自由端とした解析に従ってシミュレートしている。

5 おわりに

最後に、これまでに触れてこなかったいくつかの点について、述べておこう。

弾性体の断面積について

1次元モデルの最大の弱点は、弾性体の断面積 S をいかにとるかという判断基準がないことである。ここでは、石の底面積そのものを弾性体の断面積とする方法を選んだ。これは、1次元モデルの範囲内で最も有意義と考えられるが、明確な理由があるわけではない。やはり正しくは、3次元モデルで解析するべきであるが、3次元モデルで、ここで得られたような厳密解を求めることは非常に困難であろう。

跳び石という命名について

一般によく言われるように、「跳び石現象が起きるのは、地震による地表面での加速度が重力加速度の大きさ g を超えたとき」という言い方がある。しかし、この表現法は間違いではないが、誤解を招きやすい。すなわち、この表現では、「地表面での上向き加速度が重力加速度の g を超えたとき」と理解される恐れがある。正しくは、「跳び石現象が起きるのは、地面から石に作用する垂直抗力がゼロになったとき」である。(1.9) 式からわかるように、垂直抗力がゼロになると、地表面での加速度は、下向きの $-g$ となり、自然落下と同じ状態になる。このときの速度がたまたま上向きであれば、石は跳び上がるが、場合によっては、速度が下向きのこともあり得る。そのときは、石は地面から離れた瞬間から加速度 $-g$ で落下していくことになる。この場合は、地表面の方がそれより早く下降していれば、石は地面から離れ、浮いた状態になる。つまり、力学的には、石は必ずしも跳び上がるわけではないことを、注意する。

この「跳び石」の「跳ぶ」という字の本来の意味は、「跳躍」からもわかるように、「足を使ってはねる」ということである。つまり、とぶもの自体に動力が備わっているときは、この「跳ぶ」という字がふさわしいのであるが、この「跳び石」現象に限っては、そうではない。せいぜい、「浮き石」という方が名前としては、ふさわしいのではないか。ちなみに、この「跳び石」の英語名は、thrown-out boulder, dislodged boulder, 等である。いずれにしても、これらの訳語として、「跳び石」がふさわしいとは考えられない。

水平振動について

これまで、地表面の水平振動については述べてこなかったが、この場合は、地面の加速度が重力加速度 g を超えなくても石が地面から跳び出すことが可能である。林、金子、渡辺⁶⁾は振動台による水平加振の実験を行いこの事実を実証した。次ページ図9に示すように、地面が水

平振動を起こしたときに、石が埋まっているソケットが石の大きさより少し大きく、あるいは、石が転がっているうちに大きくなるのかもしれないが、その中で石が転がる振動周期が地震の振動周期と一致したとき、共振現象が起きて石の振動振幅がだんだん大きくなり、ついには、石が外に飛び出すということである。この現象は、車が雪の中に埋まったときに、車の振動周期に合わせて、前進と後退を繰り返すと車の振動が激しくなり、雪の穴から脱出できるのと同じ原理である。この場合は、共振現象を使うので、確かに、地震加速度が重力加速度を超えなくても飛び出しが起こる。しかし、実際の飛び石では、石が埋まっていたソケットの乱れはほとんどなく、石を元の位置に戻してやるとそっくり当てはまるケースが多いので、この現象が実際に起こっているかどうかは、はなはだ、疑問である。

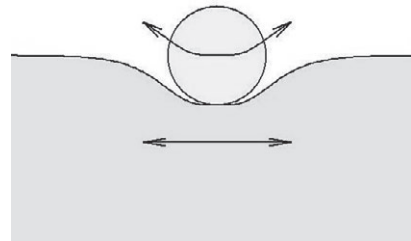


図9 水平振動

今後の課題

この論文を書いた時点では、実際に飛び石が起きた地点での地層やパルス波に関する詳しいデータはほとんど知られていない。ここで展開した理論およびシミュレータは、どのようなデータにも対応できるように作られているので、これらデータが揃ったときには、実際の飛び石現象と比較できるような理論体系を作ることが可能となるであろう。

参考文献

- 1) 村松郁栄, 大自然の力, 岐阜大学村松郁栄教授退官記念誌, 271pp, (1988)
- 2) T. Ohmachi, S. Midorikawa, Ground-motion intensity inferred from upthrow of boulders during the 1984 Western Nagano prefecture, Japan, earthquake, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 82, No.1, 44-60, (1992)
- 3) 梅田康弘, 震源を観る, 京都大学防災研究所年報 第50号A 平成19年4月
- 4) 松尾成光, 伊藤勝祥, 梅田康弘, 石の投げ飛ばし実験, 京都大学防災研究所年報, 第36号, B-1, 373-379, (1993)
- 5) 吉田文夫, 地震動による飛び石の力学—1次元応答解析—, 北海学園大学工学部研究報告, 第28号, (2001)
- 6) 林康裕, 金子美香, 渡辺孝英, 飛び石現象に基づく地震動強さの簡略的評価, 日本建築学会構造系論文集 第539号, 43—50, (2001)
- 7) 野中泰二郎, 梅田康弘, 高島秀雄, 飛び石現象の衝撃理論的検討, 日本機械学会 材料・構造物の衝撃破壊現象とその防止に関するシンポジウム講演論文集 (1998, 大阪府立大学)
- 8) Hideo Takabatake, Taijiro Nonaka, and Yasuhiro Umeda, Implication of Thrown-Out Boulders of Earthquake Shaking, Journal of Earthquake Engineering, 12, 1325-1343, (2008)