

タイトル	無限に広い弾性板の衝撃問題について
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎；SETO, Kenji；NONAKA, Taijiro
引用	北海学園大学工学部研究報告(39)：77-94
発行日	2012-02-14

無限に広い弾性板の衝撃問題について

世戸 憲治*

野中 泰二郎**

Impulsive-Loading Problem of Infinitely-Wide Elastic Plate

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA**

要旨

この論文では、無限に広いコンクリート板の表面に衝撃を与えた場合、板の内部に発生する変位および歪みがどのように伝播するかを、弾性理論の立場から解析していく。与える衝撃には軸対称性を仮定し2次元問題として扱うが、この場合でも理論解を得ることはほとんど不可能に近い。ここでは、波動方程式を数値的に解き、そのコンピュータ・シミュレータを作成することで視覚的に理解しやすくすることを目的とする。

また、ここでは裏面剥離の問題に焦点をあて、裏面を自由面とした場合と強化シートを貼った場合の違いについても議論する。

0 はじめに

9.11 事件を持ち出すまでもなく、近年、重要構造物への何らかの衝撃事例を解析することは、重要な問題となっている。この論文では、そのような研究の基礎的解析として、コンクリート壁面に衝撃を与えたときその衝撃がコンクリート内部にどのように伝播され、どのような歪みが発生しているかなどを、弾性理論を用いた波動伝播の方程式を解析することで明らかにしていく。残念ながらこの種の解析は理論的に解き進めていくことはほとんど不可能に近い。この論文は、数値解法によるコンピュータ・シミュレータを作成することで、この問題の解明をはかるものである。

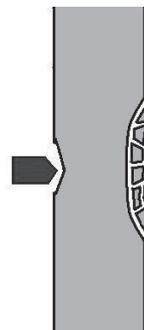


図1 裏面剥離

良く知られているようにコンクリート面に衝撃を与えたとき、図1に示すようないわゆる「裏面剥離」の現象が起こる^{1),2)}。この現象が起こる理由は何か、またどのようにするとそれを防げるのかといった問題にも触れてみたい。最近、コンクリート面に、炭素繊維シート、あるいはアラミド繊維シート（商品名ケブラー、ノーメックス、トワロン等）などの長繊維シートを貼ることが提唱され³⁾、実際にも耐震補強などの目的で利用され初めている。これらはどの程度の効果もたらされるのかといった問題の理論的根拠についても探究していくことが、この論文の目的である。

* 北海学園大学名誉教授 Emeritus Professor of Hokkai-Gakuen University

** 京都大学名誉教授 Emeritus Professor of Kyoto University

1 弾性体の基本事項と波動方程式の導入

波動方程式

Young 率 E , Poisson 比 ν , 密度 ρ を持つ弾性体を考える. この弾性体の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 時刻 t における変位ベクトルを $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = (U_x(\mathbf{r}, t), U_y(\mathbf{r}, t), U_z(\mathbf{r}, t))$ とする. この点における歪みテンソル ε_{ij} は変位ベクトルの微分

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j) \quad (1.1)$$

で定義され, さらに, この歪みテンソルを用いて応力テンソル σ_{ij} が

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{kk})\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} \quad (1.2)$$

と定義される. ここに, ε_{kk} は k について x, y, z の和をとることを意味し, 定義 (1.1) から

$$\varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{U} \quad (1.3)$$

となる.

応力テンソルの微分和 $\partial_j \sigma_{ij}$ は単位体積あたりに作用する i 方向の力を意味するので, 弾性体に対する運動方程式

$$\rho \ddot{U}_i = \partial_j \sigma_{ij} \quad (1.4)$$

を得るが, これに (1.1) (1.2) 式を用いて, 変位ベクトル \mathbf{U} のみを用いて表すとこの弾性体の波動方程式

$$\ddot{\mathbf{U}} = v_\ell^2 \Delta \mathbf{U} + (v_\ell^2 - v_t^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (1.5)$$

を得る. ここに, v_ℓ, v_t は縦波, 横波の伝播速度で,

$$v_\ell = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (1.6)$$

と定義される. また, Δ は三次元 Laplacian で, ∇ はナブラ演算子である.

以下で使い易いように (1.2) 式で定義される応力テンソル σ_{ij} を波動伝播速度 v_ℓ, v_t を用いて,

$$\sigma_{ij} = \rho(v_\ell^2 - 2v_t^2)(\varepsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\rho v_t^2 \varepsilon_{ij} \quad (1.7)$$

と書き直しておく.

円筒座標の導入

以下では, この論文で扱う問題の性質上, デカルト座標 (x, y, z) よりも円筒座標 (r, θ, z) を導入した方が便利である.

まず, デカルト座標で表示された変位ベクトル $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ を円筒座標に変換し, そこでの表示を $\mathbf{U} = (U_r, U_\theta, U_z)$ とすると, これらは,

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

の関係にある．また，三次元 Laplacian Δ ， \mathbf{U} の発散 $\nabla \cdot \mathbf{U}$ ，スカラー関数 Φ の勾配 $\nabla \Phi$ を円筒座標で表すと，それぞれ，

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \partial_z^2, & \nabla \cdot \mathbf{U} &= \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)U_r + \frac{1}{r}\partial_\theta U_\theta + \partial_z U_z, \\ \nabla \Phi &= (\partial_r \Phi)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(\partial_\theta \Phi)\mathbf{e}_\theta + (\partial_z \Phi)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる．ここに， \mathbf{e}_r ， \mathbf{e}_θ ， \mathbf{e}_z は，それぞれ，円筒座標における (r, θ, z) 方向の単位ベクトルである．

(1.1) 式で定義された歪みテンソルを円筒座標系に変換することができる．この計算はテンソルの変数変換になるのでその導出は多少めんどうであるが，結果は，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \partial_r U_r, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_\theta U_r}{r} + \partial_r U_\theta - \frac{U_\theta}{r}\right), & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2}(\partial_z U_r + \partial_r U_z) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}(\partial_\theta U_\theta + U_r), & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2}\left(\partial_z U_\theta + \frac{\partial_\theta U_z}{r}\right), & \varepsilon_{zz} &= \partial_z U_z \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる．また，歪みと応力の関係を表す (1.7) 式の添え字 (ij) はデカルト座標 x, y, z のいずれかを指すものであるが，これを円筒座標の添え字 r, θ, z を指定するものとしてもそのまま使えることを注意しておく．

2 無限に広い平板の衝撃問題

問題に即した波動方程式

前節までは，一般的に弾性体で成立する項目を述べたが，ここでは，無限に広い平板の衝撃問題を扱う．この平板の一方の面に，板の厚さ方向の軸に対し軸対称な圧力を作用させたとき板の内部に発生する波動を解析するのがこの論文の目的である．この場合， θ 方向の変位は発生しないので， $U_\theta = 0$ としてよい．また，残りの U_r ， U_z も θ には依存しないとしてよいので，解くべき式はかなりの程度軽減される．具体的には，(1.10) 式の $\varepsilon_{r\theta}$ ， $\varepsilon_{\theta z}$ は消えてしまい，したがって，(1.7) 式より $\sigma_{r\theta}$ ， $\sigma_{\theta z}$ も消失することになる．しかし， $\varepsilon_{\theta\theta}$ ， $\sigma_{\theta\theta}$ は一般にはゼロとしないことを注意する．

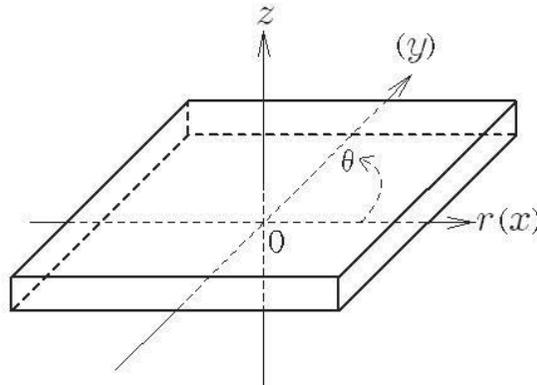


図2 座標系

座標の取り方は、圧力が作用する中心点から板面に垂直な線を立て反対側の面で交わったところを原点とし、板面に沿って原点から外向きに r 軸、板の厚さ方向に z 軸をとる（前頁図 2）。板の厚さは h とする。したがって、圧力が作用する面は $z = h$ 、その反対側の面は $z = 0$ となる。また、作用する圧力は、座標 r と時間 t の関数 $P(r, t)$ とする。したがって、このとき板に与えられる総力積量 I は

$$I = 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\infty P(r, t) r dr \quad (2.1)$$

となる。

このときの波動方程式は、(1.5) および、(1.9) 式より、

$$\begin{aligned} \ddot{U}_r &= v_t^2 \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r + \partial_z^2 \right] U_r + (v_\ell^2 - v_t^2) \partial_r \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r + \partial_z U_z \right] \\ \ddot{U}_z &= v_t^2 \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r + \partial_z^2 \right] U_z + (v_\ell^2 - v_t^2) \partial_z \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r + \partial_z U_z \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

と、 U_r 、 U_z の連立した偏微分方程式となる。

境界条件

この方程式を境界条件のもとに解いていくことになるが、まず、 $r = 0$ での条件として、

$$U_r = 0, \quad \partial_r U_z = 0, \quad \text{at} \quad r = 0 \quad (2.3)$$

を課す。この第 1 式は軸対称性から自明な条件であるが、第 2 式については、作用する圧力に対し課す条件

$$\partial_r P(r, t) = 0, \quad \text{at} \quad r = 0 \quad (2.4)$$

を反映したものとなっている。

つぎに、板の表面であるが、 r 方向の応力 σ_{rz} は、圧力が作用するしないに関係なくゼロであるので、(1.7) (1.10) より、

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \Rightarrow \quad \partial_z U_r + \partial_r U_z = 0, \quad \text{at} \quad z = 0 \quad \text{or} \quad z = h \quad (2.5)$$

でなければならない。表面での z 方向の応力 σ_{zz} は、圧力が作用する面 $z = h$ ではそれと釣り合わなければならないので、(1.7) (1.9) (1.10) より、

$$\sigma_{zz} = -P, \quad \Rightarrow \quad \rho(v_\ell^2 - 2v_t^2) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r + \rho v_\ell^2 \partial_z U_z = -P, \quad \text{at} \quad z = h \quad (2.6)$$

また、圧力が作用しない方の面 $z = 0$ ではゼロとなるので、

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho(v_\ell^2 - 2v_t^2) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r + \rho v_\ell^2 \partial_z U_z = 0, \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (2.7)$$

となる。

もう一つ、方程式を数値的に解くとき、 $r = \infty$ まで解くわけにはいかないので、実際には十分な大きさのところで切断して計算する必要がある。この切る点の r を R と記すことにして、こ

こでの境界条件が必要になる．すなわち，この点では無用な反射波を避けるため外向波だけが透過できる無反射端になるように，

$$\partial_t U_r + v_\ell \partial_r U_r = 0, \quad \partial_t U_z + v_t \partial_r U_z = 0, \quad \text{at } r = R \quad (2.8)$$

としておく．十分遠くの $r = R$ では， U_r は縦波， U_z は横波と考えてよいのでそれらの伝播速度を，それぞれ， v_ℓ ， v_t としておいた．

初期条件

初期条件として，

$$U_r = 0, \quad \partial_t U_r = 0, \quad U_z = 0, \quad \partial_t U_z = 0, \quad \text{at } t = 0 \quad (2.9)$$

を課す．これらは， U_r ， U_z 共に初期変位はゼロ，初速度もゼロということの意味するが，加える圧力に対しても

$$P = 0, \quad \partial_t P = 0, \quad \text{at } t = 0 \quad (2.10)$$

を課すことにする．

変数の無次元化

ここで数値解析がしやすいように，変数の無次元化をしておく．まず，板厚の h を長さの単位として， r ， z ， U_r ， U_z ， R を改めて

$$r/h \rightarrow r, \quad z/h \rightarrow z, \quad U_r/h \rightarrow U_r, \quad U_z/h \rightarrow U_z, \quad R/h \rightarrow R \quad (2.11)$$

と置き直す．また，時間については板厚を縦波が通過する時間を単位として，

$$v_\ell t/h \rightarrow t \quad (2.12)$$

と置き変える．この置き換えで波動方程式 (2.2) は

$$\begin{aligned} \ddot{U}_r &= \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r + \gamma^2 \partial_z^2 - \frac{1-\gamma^2}{r^2} \right] U_r + (1-\gamma^2) \partial_r \partial_z U_z \\ \ddot{U}_z &= \left[\partial_z^2 + \gamma^2 \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r \right] U_z + (1-\gamma^2) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_z U_r \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる．ここに， γ は縦波，横波の速度比で，

$$\gamma \equiv \frac{v_t}{v_\ell} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.14)$$

と Poisson 比 ν だけで決まる定数である．

境界条件 (2.3) は変更はないが，(2.5) は

$$\partial_z U_r + \partial_r U_z = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad \text{or } z = 1 \quad (2.15)$$

となる．さらに，圧力については，

$$P/(\rho v_\ell^2) \rightarrow P \quad (2.16)$$

と無次元化してやると, (2.6) (2.7) 式は,

$$(1 - 2\gamma^2)\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)U_r + \partial_z U_z = -P, \quad \text{at } z = 1 \quad (2.17)$$

$$(1 - 2\gamma^2)\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)U_r + \partial_z U_z = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (2.18)$$

となる. もう1つの $r = R$ での無反射端に関する条件 (2.8) は,

$$\partial_t U_r + \partial_r U_r = 0, \quad \partial_t U_z + \gamma \partial_r U_z = 0, \quad \text{at } r = R \quad (2.19)$$

となる.

方程式の数値解法について

これまでに述べた方程式および境界条件を数値的に解くためには, 2次元平面 (r, z) , $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq 1$ を格子状に切り分け, 各格子点の値を用いて方程式を解いていくことになる. この格子間隔を r, z 両方向とも d とし, r 方向, z 方向の格子点数を, それぞれ, M, N とする. すなわち, $R/d = M$, $1/d = N$ で M, N は整数とする. また, 時間のきざみ幅は p とする. さらに, 整数 i, j, k を用いて, $r = id$, $z = jd$, $t = kp$ のときの $U_r(r, z, t)$ を $U_{r(i,j,k)}$ と記すことにする. U_z についても同様とする.

以下, 微分を差分に置き換える方法について, まず, 1階微分は

$$\partial_r U_r \rightarrow \frac{1}{2d} [U_{r(i+1,j,k)} - U_{r(i-1,j,k)}] \quad (2.20)$$

のように中心差分を使う. 2階微分は

$$\partial_r^2 U_r \rightarrow \frac{1}{d^2} [U_{r(i+1,j,k)} - 2U_{r(i,j,k)} + U_{r(i-1,j,k)}] \quad (2.21)$$

$$\partial_r \partial_z U_r \rightarrow \frac{1}{4d^2} [U_{r(i+1,j+1,k)} - U_{r(i-1,j+1,k)} - U_{r(i+1,j-1,k)} + U_{r(i-1,j-1,k)}] \quad (2.22)$$

のように行う.

以下, 波動を数値的に時間発展させる方法について, 時間ステップ k に関する数学的帰納法で述べる.

1. 初期条件 (2.9) を満たすように, すべての (i, j) について

$$U_{r(i,j,0)} = U_{r(i,j,1)} = 0, \quad U_{z(i,j,0)} = U_{z(i,j,1)} = 0 \quad (2.23)$$

を課す.

2. いま 1 以上の特定の k およびそれ以下の k に対し $U_{r(i,j,k)}$, $U_{z(i,j,k)}$ がすべての (i, j) について求められたとして, 時間をワンステップ進めて $k+1$ にするには, まず, 方程式 (2.13) を差分化した式より,

$$\begin{aligned} U_{r(i,j,k+1)} &= 2U_{r(i,j,k)} - U_{r(i,j,k-1)} + p^2 [(2.13) \text{ 第1式の右辺を差分化したもの}] \\ U_{z(i,j,k+1)} &= 2U_{z(i,j,k)} - U_{z(i,j,k-1)} + p^2 [(2.13) \text{ 第2式の右辺を差分化したもの}] \end{aligned} \quad (2.24)$$

で時間ステップを1つ進めるが、この段階では $i = 1, 2, \dots, M-1$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ に限定されるため境界上の U_r , U_z をどう求めるかが問題となる。

3. そこで、 $i = 0$ の境界は (2.3) の第1式から

$$U_{r(0,j,k+1)} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.25)$$

となり、第2式から、

$$U_{z(0,j,k+1)} = U_{z(1,j,k+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

また、 $i = M$ となる境界は (2.19) 式を差分化して、 $j = 1, 2, \dots, N-1$ に対し、

$$\begin{aligned} U_{r(M,j,k+1)} &= U_{r(M,j,k)} - \frac{p}{d} [U_{r(M,j,k)} - U_{r(M-1,j,k)}] \\ U_{z(M,j,k+1)} &= U_{z(M,j,k)} - \frac{\gamma p}{d} [U_{z(M,j,k)} - U_{z(M-1,j,k)}] \end{aligned} \quad (2.27)$$

を得る。

4. つぎに、 $j = 0, N$ となる境界は、(2.15) 式を差分化した式から、 $i = 1, 2, \dots, M-1$ に対し、

$$\begin{aligned} U_{r(i,0,k+1)} &= U_{r(i,1,k+1)} + \frac{1}{2} (U_{z(i+1,1,k+1)} - U_{z(i-1,1,k+1)}) \\ U_{r(i,N,k+1)} &= U_{r(i,N-1,k+1)} - \frac{1}{2} (U_{z(i+1,N-1,k+1)} - U_{z(i-1,N-1,k+1)}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

同様に、(2.18), (2.17) より、 $i = 1, 2, \dots, M-1$ に対し、

$$U_{z(i,0,k+1)} = U_{z(i,1,k+1)} + (1 - 2\gamma^2) \left[\frac{1}{2} (U_{r(i+1,1,k+1)} - U_{r(i-1,1,k+1)}) + \frac{1}{i} U_{r(i,0,k+1)} \right] \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} U_{z(i,N,k+1)} &= U_{z(i,N-1,k+1)} \\ &\quad - (1 - 2\gamma^2) \left[\frac{1}{2} (U_{r(i+1,N-1,k+1)} - U_{r(i-1,N-1,k+1)}) + \frac{1}{i} U_{r(i,N,k+1)} \right] - P_{(i,k+1)} d \end{aligned} \quad (2.30)$$

と求められる。

5. 最後に、角になる点の値は、(2.3) の第2式から、

$$U_{z(0,0,k+1)} = U_{z(1,0,k+1)}, \quad U_{z(0,N,k+1)} = U_{z(1,N,k+1)} \quad (2.31)$$

および、(2.19) 式から、

$$U_{r(M,0,k+1)} = U_{r(M,0,k)} - \frac{p}{d} [U_{r(M,0,k)} - U_{r(M-1,0,k)}] \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} U_{r(M,N,k+1)} &= U_{r(M,N,k)} - \frac{p}{d} [U_{r(M,N,k)} - U_{r(M-1,N,k)}] \\ U_{z(M,0,k+1)} &= U_{z(M,0,k)} - \frac{\gamma p}{d} [U_{z(M,0,k)} - U_{z(M-1,0,k)}] \\ U_{z(M,N,k+1)} &= U_{z(M,N,k)} - \frac{\gamma p}{d} [U_{z(M,N,k)} - U_{z(M-1,N,k)}] \end{aligned} \quad (2.33)$$

と求められる。

以上で、時間発展を追うためのプログラムが作成される。

3 板の裏面に強化シートを貼った場合

最近、耐震あるいは耐衝撃の目的のためコンクリート板の裏面に炭素繊維あるいはアラミド繊維などの強化シートを貼ることが推奨され、実用化の域に達している。これは、コンクリートは圧縮には強いが引っ張りに弱いという欠点を補うための一つの方法として大変有効である。以下の表1に、これらいくつかの材料に関する物理定数のうちここでは、引張強度、密度、比強度、破断長を掲げる。このうち、比強度は単位質量あたりの引張強度で、比強度 = 引張強度 / 密度、また、破断長は材料を棒状にして吊下げたとき、切れないで吊下げられる最大の長さで、破断長 = 比強度 / 重力加速度 で定義される。この表からコンクリートは引っ張りに対し極めて弱いこと、また、炭素繊維、アラミド繊維はカーボンナノチューブのような特殊なものを除けば、相当大きな引張強度を持つことがわかる。

表1

材料名	引張強度 (MPa)	密度 (g/cm ³)	比強度 (kN·m/kg)	破断長 (km)
コンクリート	10	2.30	4.35	0.44
木材 (ナラ)	60	0.69	86.9	8.86
ポリプロピレン	80	0.90	88.88	9.06
Scifer Steel Wire (鋼鉄)	5,500	7.87	698	71.2
ガラス繊維	3,400	2.60	1,307	133
炭素繊維 AS4	4,300	1.75	2,457	250
アラミド繊維	3,620	1.44	2,514	256
カーボンナノチューブ	62,000	0.037~1.34	46,268	4,716

ここで、強化シートを貼った場合どの程度、コンクリートの変形が改善されるか、その理論的根拠を探ってみる。

以下では、強化シートの厚さは板の厚さに比べ十分に小さいものとして、シートの変位は $z = 0$ における板の変位と同じものとして扱う。まず、シート上の点 $(r, \theta, 0)$ と $(r + dr, \theta, 0)$ の2点における変位 U_r, U_z を、 θ 変数を省略して、それぞれ、 $U_r(r, 0), U_z(r, 0)$ および $U_r(r + dr, 0), U_z(r + dr, 0)$ と記すことにする。点 $(r, \theta, 0)$ は点 $(r + U_r(r, 0), \theta, U_z(r, 0))$ に、また、点 $(r + dr, \theta, 0)$ は点 $(r + dr + U_r(r + dr, 0), \theta, U_z(r + dr, 0))$ に移動するので、 r, z 平面で考えたこれら2点を結ぶ直線の勾配は、 $dr \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{U_z(r + dr, 0) - U_z(r, 0)}{dr + U_r(r + dr, 0) - U_r(r, 0)} \rightarrow \frac{\partial_r U_z}{1 + \partial_r U_r} \cong \partial_r U_z \quad (3.1)$$

となる。この式の最後の辺は変位について線形近似を用いた。

強化シートが存在しないときは、(2.5) (2.7) 式に示すように、 σ_{rz}, σ_{zz} は、 $z = 0$ でゼロとなるはずのものであったが、こんどは板が強化シートで保持されているぶんだけ力を受けるので、

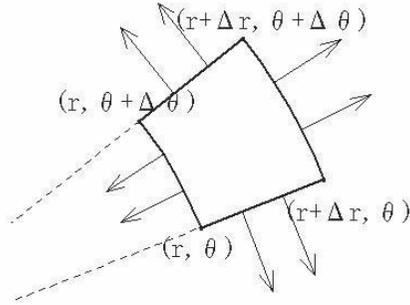


図3 極座標における面積要素

ゼロにはならない．このことを少し詳しく見ていこう．まず，シート上の点 $(r, \theta, 0)$, $(r + \Delta r, \theta, 0)$, $(r, \theta + \Delta \theta, 0)$, $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, 0)$ の4点からなる4辺形を考える（図3）．このシートの4辺形部分に板面から与えられる r 方向および z 方向の力は，それぞれ， $\sigma_{rz}r\Delta\theta\Delta r$, $\sigma_{zz}r\Delta\theta\Delta r$ となるが，一方，これらの力はこの4辺形部分のシート内に発生する力の r 方向成分および z 方向成分と釣り合う必要がある．ここで，強化シートの Young 率を E' ，厚さを h' とすると r の辺で発生する r 方向の力は， $-E'\partial_r U_r|_r \Delta\theta h'$ となり，また， $r + \Delta r$ の辺では， $E'\partial_r U_r|_{r+\Delta r} (r + \Delta r)\Delta\theta h'$ となる．ただしここでは，強化シートの Poisson 比はゼロとして無視した．さらに，板の裏面に貼られたシートは r 方向に伸縮するばかりでなく， θ 方向にも同時に伸縮し得る．この θ 方向の歪みによって発生する応力 $E'\frac{U_r}{r}$ も r 方向の成分をもち，その大きさは $-E'\frac{U_r}{r} h' \Delta r \Delta \theta$ となる．

したがって，これら r の辺と $r + \Delta r$ の辺，および θ の辺に作用する力の和が，板に剪断力として作用し，その反作用として板からシートに力 $\sigma_{rz}r\Delta\theta\Delta r$ が与えられていると考えられる．これら力の釣り合いの式は，

$$\sigma_{rz}r\Delta\theta\Delta r + E'\partial_r U_r|_{r+\Delta r} (r + \Delta r)\Delta\theta h' - E'\partial_r U_r|_r r\Delta\theta h' - E'\frac{U_r}{r} h' \Delta r \Delta \theta = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.2)$$

あるいは， $\Delta r \rightarrow 0$ の極限で，

$$\sigma_{rz} + E'h' \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r U_r - E'h' \frac{U_r}{r^2} = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.3)$$

となる．

もう1つの条件は，この強化シート内に発生する r 方向の力は，板といっしょにシート自体も変形することにより， z 方向の力を発生させてしまい結果として板に z 方向の歪みを生じさせ，前に述べた板からシートに与えられる力 $\sigma_{zz}r\Delta\theta\Delta r$ となっている．このことを式として見積もるには， r の辺，および $r + \Delta r$ の辺における力， $-E'\partial_r U_r|_r r\Delta\theta h'$ および， $E'\partial_r U_r|_{r+\Delta r} (r + \Delta r)\Delta\theta h'$ のそれぞれに (3.1) で与えた傾きを掛け，和をとったものが，板からシートに作用する力 $\sigma_{zz}r\Delta\theta\Delta r$ と釣り合っているはずで，

$$\sigma_{zz}r\Delta\theta\Delta r + E'\Delta\theta h' [(r + \Delta r)\partial_r U_r \partial_r U_z|_{r+\Delta r} - r\partial_r U_r \partial_r U_z|_r] = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.4)$$

となる．この式は $\Delta r \rightarrow 0$ の極限で，

$$\sigma_{zz} + E'h' \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) (\partial_r U_r \partial_r U_z) = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.5)$$

となる．この結果は，境界条件が本質的に非線形になることを示している．ここで， z 軸対称性を仮定した場合は， θ 方向の伸縮は板面に対し完全に平行な方向でしか起こり得ないので，(3.2) (3.3) 式を導出するときは影響を及ぼしたが， z 方向の釣り合いを示す (3.4) (3.5) 式の導出には影響を及ぼすことはないことを注意しておく．

ここで得た式 (3.3) および (3.5) を (1.2) (1.3) (1.9) (2.14) を用いて具体化し，さらに (2.11) 式にしたがって無次元化すると，

$$\partial_r U_z + \partial_z U_r + 2(1+\nu)\alpha \left[\left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \partial_r - \frac{1}{r^2} \right] U_r = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.6)$$

および

$$(1-2\gamma^2) \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) U_r + \partial_z U_z + 2(1+\nu)\alpha\gamma^2 \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) (\partial_r U_r \partial_r U_z) = 0, \quad \text{at } z = 0 \quad (3.7)$$

となる．ここに，無次元量 α は

$$\alpha = \frac{E'h'}{Eh} \quad (3.8)$$

と定義した． Eh は表面張力の強さを表す量で，張力が働く方向に対し垂直方向の単位長さあたりの弾性係数を意味するので，ここで定義した α はシートの表面張力の強さを板に対する比で表した量と考えられる．以上，ここで得られた (3.6) (3.7) 式がシートなしの境界条件 (2.15) (2.18) 式に取って代わるものとなる．

さらにこれらの式を差分化し，(3.6) 式から境界上の U_r ，同じく (3.7) 式から境界上の U_z を求めるわけだが，そのとき， z に関する微分は

$$\partial_z U_\delta \rightarrow \frac{1}{d} [U_{\delta(i,1)} - U_{\delta(i,0)}], \quad \delta = r \text{ or } z \quad (3.9)$$

と前進型の差分とするが， r に関する微分については種々の問題が発生する．すなわち，最も正当な方法は，以下，時間に関する添え字 $k+1$ は省略することにして，

$$\begin{aligned} \partial_r U_\delta &\rightarrow \frac{1}{2d} (U_{\delta(i+1,0)} - U_{\delta(i-1,0)}), \quad \delta = r \text{ or } z \\ \partial_r^2 U_\delta &\rightarrow \frac{1}{d^2} (U_{\delta(i+1,0)} - 2U_{\delta(i,0)} + U_{\delta(i-1,0)}), \quad \delta = r \text{ or } z \end{aligned} \quad (3.10)$$

と境界上の $z = 0$ ($j = 0$) のところで見積もるものである．しかし，この方法では， $U_{r(i,0)}$ ， $U_{z(i,0)}$ ， $i = 1, 2, \dots, M-1$ の $2(M-1)$ 元の非線形連立方程式になってしまうシミュレータの作成が困難になる．もし，(3.6) 式の $\partial_r U_z$ を $j = 1$ で見積もると $U_{r(i,0)}$ と $U_{z(i,0)}$ の連立を避け，線形の範囲で解くことはできるが，それでも $U_{r(i,0)}$ と $U_{z(i,0)}$ それぞれの i 番号が異なるもの同士の連立は避けられない．また， α の付く項を摂動項として逐次近似法で解くことも考えられるが，実際は，以下の (3.11) (3.12) 式で見ると，この項の分母には差分化したときの格子間隔 d が付くためになかなか大きな値になってしまう逐次近似の範囲を超えてしまいこの方法が使えない．

ここでは、この煩雑さを避けるため、(3.6) 式の左辺最後の項 $-2(1+\nu)\alpha U_r/r^2$ だけは $j=0$ で見積もるが、他の項は $j=1$ で見積もることにする。また、(3.7) 式に関してはすべての r 微分を $j=1$ で見積もることにする。

結果として、 $i=1, 2, \dots, M-1$ に対し、

$$U_{r(i,0)} = \frac{1}{1 + \frac{2(1+\nu)\alpha}{di^2}} \left\{ U_{r(i,1)} + \frac{1}{2}(U_{z(i+1,1)} - U_{z(i-1,1)}) \right. \\ \left. + \frac{2(1+\nu)\alpha}{d} \left[\frac{1}{2i}(U_{r(i+1,1)} - U_{r(i-1,1)}) + U_{r(i+1,1)} - 2U_{r(i,1)} + U_{r(i-1,1)} \right] \right\} \quad (3.11)$$

および

$$U_{z(i,0)} = U_{z(i,1)} + (1 - 2\gamma^2) \left[\frac{1}{2}(U_{r(i+1,1)} - U_{r(i-1,1)}) + \frac{1}{i}U_{r(i,1)} \right] \\ + \frac{(1+\nu)\alpha\gamma^2}{d^2} \left[\frac{1}{2i}(U_{r(i+1,1)} - U_{r(i-1,1)})(U_{z(i+1,1)} - U_{z(i-1,1)}) \right. \\ \left. + (U_{r(i+1,1)} - 2U_{r(i,1)} + U_{r(i-1,1)})(U_{z(i+1,1)} - U_{z(i-1,1)}) \right. \\ \left. + (U_{r(i+1,1)} - U_{r(i-1,1)})(U_{z(i+1,1)} - 2U_{z(i,1)} + U_{z(i-1,1)}) \right] \quad (3.12)$$

と、板の裏面での U_r , U_z の値が求められる。

以下の5節でコンピュータ・シミュレータを作成するが、ここで述べた非線形モデルは時間発展するにしたがい数値的に不安定となり、解が発散してしまう。これはおそらく、ここでの境界条件を正当な方法で解かなかったためであろう。この解決策として high-cut-low-pass 型のフィルターを入れることにする。具体的には、 $i=0, 1, \dots, M-2$, $j=0, 1, 2$ に対し、

$$\left[U_{r(i+2,j)} + 4U_{r(i+1,j)} + 6U_{r(i,j)} + 4U_{r(|i-1|,j)} + U_{r(|i-2|,j)} \right] / 16 \rightarrow U_{r(i,j)} \\ \left[U_{z(i+2,j)} + 4U_{z(i+1,j)} + 6U_{z(i,j)} + 4U_{z(|i-1|,j)} + U_{z(|i-2|,j)} \right] / 16 \rightarrow U_{z(i,j)} \quad (3.13)$$

なる平滑化をおこなうことにする。

もうひとつ注意すべき点は、強化シートは引っ張りに対し強い反力を示すが圧縮に対してはまったく反力を持たないことである。これをモデルに反映するには、シートの歪み $\partial_r U_r$ が負のときには、(3.11) (3.12) 式において、 α の付く最後の項はゼロとすべきである。

4 埋め込み問題と衝突問題

前節および前々節では、板の表面に加える圧力を位置 r および時間 t の関数として与えたときの板の変形を求めるための解析をしてきた。しかし、実際にコンクリート板にある種の飛行物体が衝突したときは、力が与えられるのではなく、衝突物体の形、大きさ、質量、衝突速度などが与えられるだけである。この節ではこの種の問題にいかに対処すべきかを考えてみる。

埋め込み問題

衝突問題に入る前に、埋め込み問題について先に解析をしておく。剛体としての円柱を弾性体の板に垂直に埋め込む問題を考える。このとき、円柱を押しつける力を与えて、弾性体に埋め込まれる深さを求めようとする、これまでの議論では対処することが困難となる。なぜならば、円柱と弾性体の接触面では、圧力分布は一定ではなく、円柱底面の円の周辺で圧力は最大になり、円の中心で最小になるはずであるが、この圧力分布をどのようにして求めるかが問題になるからである。この問題に関しては理論解析の立場にたつ Pasternak モデルというのがあるが⁴⁾、このモデルでは圧力分布を一定として扱うので、近似が粗すぎる。

ここでは、円柱を押しつける力を与えるのではなく、逆の発想で、円柱を埋め込む深さを与え、そのときに必要な圧力分布を弾性理論から数値的に求め、その圧力分布を積分することで、円柱を押しつける全体の力を求めるという手法を採用する。

まず、円柱底面の円の半径を r_0 とする。埋め込む深さは、前節までの議論を活用するために、初めゼロの状態から、動的にゆっくりと、最終的に深さ l まで埋め込むことにする。このときの境界条件は、円柱との接触面 $z = h$ で、

$$U_r(r, h, t) = 0, \quad U_z(r, h, t) = -l \tanh^2(t/t_0), \quad r \leq r_0 \quad (4.1)$$

と置く。ここで、時定数 t_0 はどのくらいゆっくり埋め込むかを定める定数であり、双曲線関数 \tanh の 2 乗としたのは、 U_z の初速度 $\partial_t U_z|_{t=0}$ をゼロとするためである。

また、弾性体の円柱と接触しない面では、いかなる力も作用しないので、 $\sigma_{rz} = \sigma_{zz} = 0$ となり、(2.5) (2.6) 式に代わり、

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = 0, & \Rightarrow \partial_z U_r + \partial_r U_z = 0, \\ \sigma_{zz} = 0, & \Rightarrow (v_\ell^2 - 2v_t^2) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r + v_\ell^2 \partial_z U_z = 0, \quad \text{at } z = h \text{ and } r > r_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。この境界条件のもとに、前節までの手法にしたがって数値解法を実行すると、任意時刻におけるすべての点での変位が求まる。円柱を押しつける力 F を求めるには、求まった変位から接触面での応力 σ_{zz} を (1.7) (1.9) (1.10) および (4.1) の $U_r = 0$ を用いると、

$$\sigma_{zz} = \rho v_\ell^2 \partial_z U_z, \quad (4.3)$$

となるので、さらにこれを接触面で積分

$$F = 2\pi \int_0^{r_0} \sigma_{zz} r dr \quad (4.4)$$

を数値的に実行することで得られる。

衝突問題

埋め込み問題で示したように、弾性体表面での変位を与えるとそのとき作用している圧力分布が求められる。これを衝突問題に適用すると、いったん衝突物体の変位を与えると、衝突物体に作用する力が求まり、運動方程式から衝突物体の加速度が求められ、それからつぎの瞬間の変位が求まる、という順序でつぎつぎに衝突物体の位置が決まっていくはずである。

ここでは、簡単のため前と同じく、質量 M 、底面の円の半径 r_0 の円柱を、 z -軸の正の方向から初速度 $-V_0$ で垂直に弾性体の表面に衝突させる場合を考えよう。もちろん、労を厭わなければ他の形状の物体も扱うことはできるはずであるが、ここでは、最も簡単な場合について原理的手法さえわかればよいことにする。

この衝突を座標で表すと、時刻 $t = 0$ の瞬間に、円柱の底面が弾性板の表面 $z = h$ に、下向き初速度 $-V_0$ で接触したとすると、それ以後の時刻 t では、弾性体と衝突物体との接触面における $z(t)$ 座標を用いて、運動方程式

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -F(t) \quad (4.5)$$

にしたがって動きが決まる。ここに、右辺の力 $-F(t)$ は (4.3) (4.4) 式で与えられるもので、弾性体の歪みによって発生する力を円柱が反作用として受け取るものである。したがって、この方程式を解くためには、瞬間毎の弾性体の歪みがわからなければならないので解析的に解くことは不可能である。ここでは以下に示す数値解法を試みる。

いま、ある時刻 t における接触面の座標 $z(t)$ 、速度 $V(t)$ がわかったとして、これを基に、前々節、あるいは前節の方法で数值的に、弾性体の方の歪みを求める。このときの接触面での境界条件は、(4.1) 式に替って、

$$U_r(r, h, t) = 0, \quad U_z(r, h, t) = z(t) - h, \quad \text{at } r \leq r_0 \quad (4.6)$$

となり、また、 $r > r_0$ の物体が当たらないところでは、(4.2) 式がそのまま適用される。この方法で弾性体の歪みが計算されると、(4.3) (4.4) で衝突物体に作用する力 $-F(t)$ が求められるので、(4.5) 式でその瞬間における加速度 $-F(t)/M$ がわかる。したがって、この時刻 t から微小時間 Δt が経過し、 $t + \Delta t$ のときの接触面の位置座標 $z(t + \Delta t)$ 、および速度 $V(t + \Delta t)$ は

$$z(t + \Delta t) = z(t) + V\Delta t, \quad V(t + \Delta t) = V(t) - [F(t)/M]\Delta t \quad (4.7)$$

として求められる。初期位置 $z(0) = h$ 、初速度 $V(0) = -V_0$ は与えられているので、以後、この繰り返しで時間経過を追っていくことができる。

5 コンピュータ・シミュレータによる解析

前節までの解析に基づき、ここでは、プログラム言語 Visual Basic で作成されたシミュレータによる解析結果について述べる。

衝撃を与えるコンクリート板を弾性体として扱い、その Young 率 E 、Poisson 比 ν 、密度 ρ および板厚 h に対し、それぞれ、つぎの値を用いた。

$$E = 20 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.2, \quad \rho = 2200 \text{ kg/m}^3, \quad h = 0.1 \text{ m}. \quad (5.1)$$

衝撃力を与えた場合のシミュレーション

はじめに、板表面の半径 r_0 の円内に一様な圧力を一定時間 t_0 だけ作用させる場合についてシミュレートしてみる。ただし、この圧力は、(2.10) 式を満たすように時間的には、初めその値お

よび時間微係数両方共ゼロの状態から徐々に大きくなり最大値 P_0 に達してからまた徐々にゼロに戻るというもので、

$$P(r, t) = \frac{P_0}{2} [1 - \cos(2\pi t/t_0)], \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad r \leq r_0 \quad (5.2)$$

にしたがって圧力をかけていくものとする。ここでは、 r_0 , P_0 , t_0 の値をそれぞれ、

$$r_0 = 5 \text{ cm}, \quad P_0 = 20 \text{ GPa}, \quad t_0 = 0.1 \text{ msec} \quad (5.3)$$

とする。最大圧力 P_0 の値は非常に大きなものであるが、これは板が衝撃を受けて変形していく様を見やすくするため意図的に大きくしたものである。実際はこれほどの強い衝撃力を受けるとコンクリート板は完全に破壊し尽くされてしまうが、この場合は完全弾性板として扱っているので破壊されることなく、変形するのみである。

次ページ図 5 以下に変形が最大に進んだときの rz 断面の様子を示す。これらの図における色は歪み ε_{rr} に対応し、図 4 のカラーチャートに示すように赤ほどこの歪みがプラスで大きく、また、紫ほど歪みがマイナスで大きくなることを示す。このうち、図 5 はコンクリートの裏面を自由面としたとき、図 6 は裏面に強化シートを貼ったときの断面を示す。このときの強化シートの Young 率 E' および厚さ h' は

$$E' = 450 \text{ GPa}, \quad h' = 1 \text{ mm} \quad (5.4)$$

としている。これら図 5 と図 6 から裏面に強化シートを貼った場合と貼らない場合の違いが良く見てとれる。また、図 7 は裏面を固定面としたときの断面を示す。

埋込問題のシミュレーション

図 8 は底面の円の半径 5 cm の円柱を 2 cm の深さまでゆっくりと埋め込んだときの図である。この図におけるコンクリート板のメッシュの色は z 方向の歪み ε_{zz} に対応し、このときの埋め込みに必要な総力はおおよそ 66 MN であり、円柱底部に描かれた赤矢印がそのときの圧力分布を示している。当然のことながら、円柱底面の周辺部で圧力は最大となり、中心部で最小となる。この圧力分布の形は双曲線関数の \cosh に近い形となるが、理論的にこの形を決めることは大変難しい問題である。またこのときのコンクリート板の裏面は固定面としているが、この裏面の下に描かれた赤線は裏面での圧力分布を表す。これも当然のことながら、裏面での圧力分布は円柱底面の半径を超えたところでも発生しており、表面の分布よりなだらかになっていることに注意する。

衝突問題のシミュレーション

図 9, 図 10 はこれまでと同じく底面の円の半径 5 cm, 質量 10 kg の円柱がコンクリート板に、速度 1 km/sec で衝突したときの断面図である。このうち、図 9 は裏面を自由面とした場合、図 10 は裏面に強化シートを貼った場合である。このときの速度 1 km/sec というのはかなり大きな値であるが、これは図で見て歪みの違いが明瞭に理解できるようにしたためである。図 9 と図 10 から強化シートを貼った場合と貼らなかつた場合の違いが良く見てとれる。なお、このときの歪みは ε_{rr} である。



図4 カラーチャート

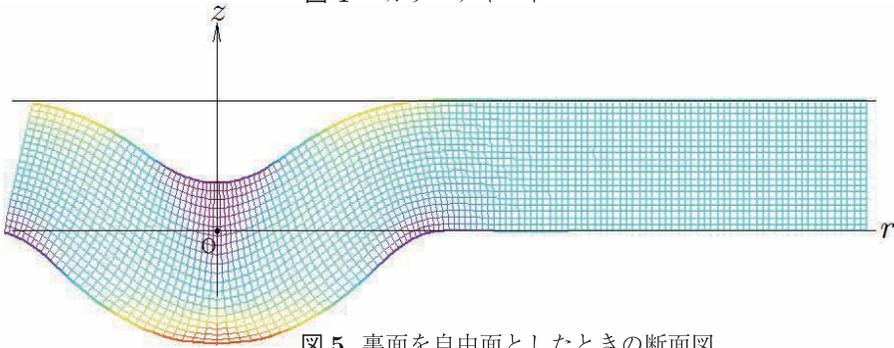


図5 裏面を自由面としたときの断面図

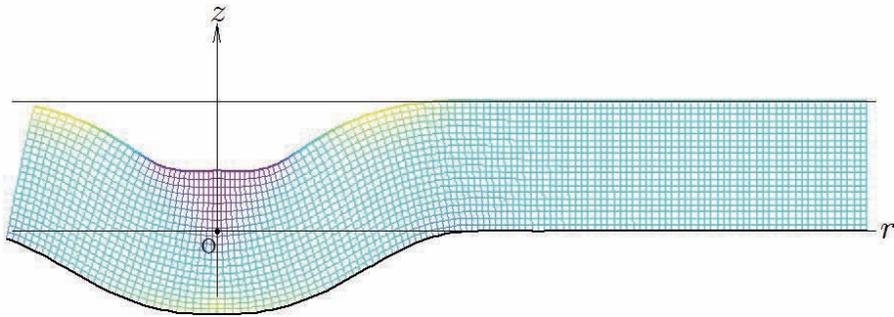


図6 裏面に強化シートを貼ったときの断面図

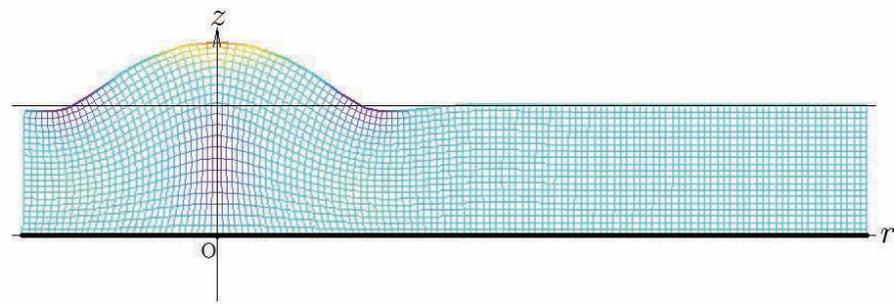


図7 裏面を固定面としたときの断面図

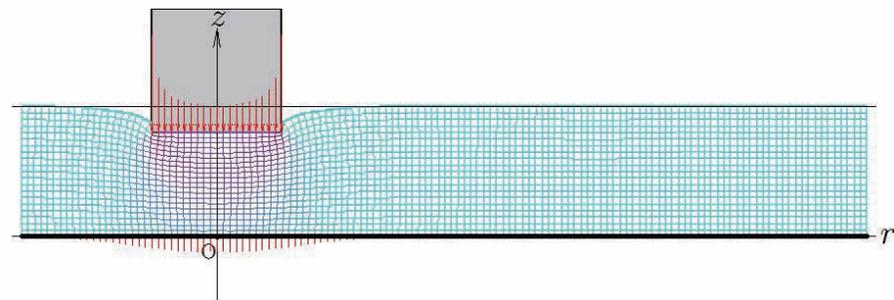


図8 埋め込みのときの断面図

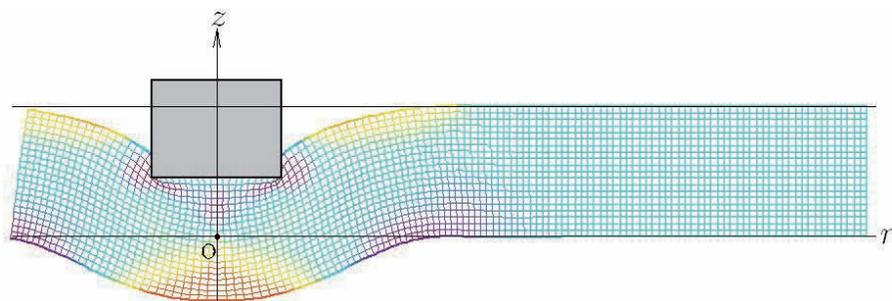


図9 裏面を自由面としたときの衝突

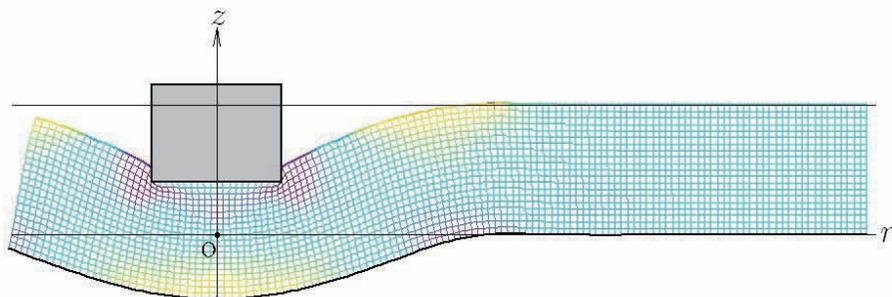


図10 裏面に強化シートを貼ったときの衝突

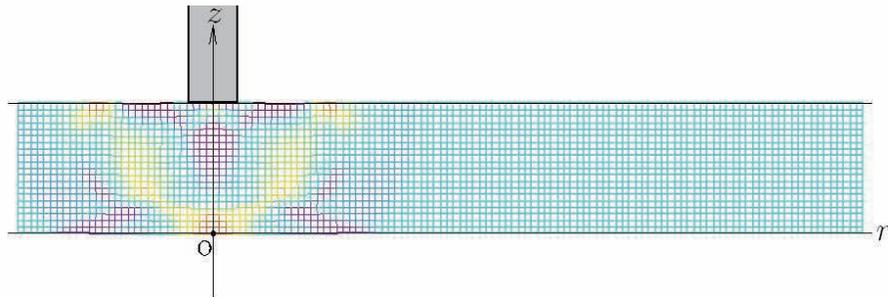


図11 裏面を自由面としたときの実弾丸の衝突

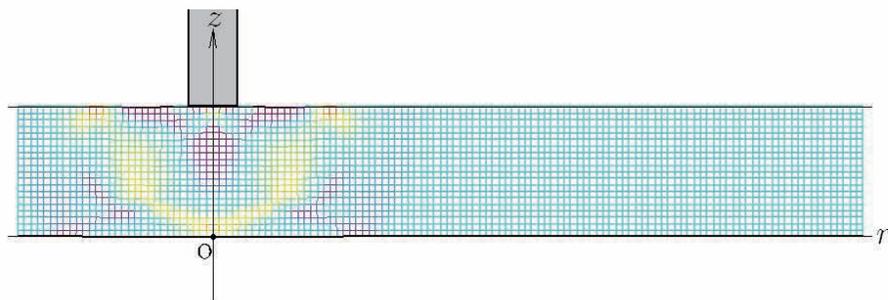


図12 裏面に強化シートを貼ったときの実弾丸の衝突

実験値に則した衝突問題のシミュレーション

これまででは、コンクリート板の変形がよく見れるように衝撃力および衝突速度をかなり大きくとっていたが、これでは、実際のコンクリートはすでに破壊領域に達していて現実と合わない。以下では、参考文献 3) に掲載されている実際の実験データに基づいたシミュレーションを試みる。このときのコンクリート板厚 h 、衝突物体すなわち弾丸の質量 M 、衝突面の半径 r_0 、衝突速度 V_0 は、

$$h = 8 \text{ cm}, \quad M = 50 \text{ g}, \quad r_0 = 1.5 \text{ cm}, \quad V_0 = 300 \text{ m/sec} \quad (5.5)$$

である。このときの裏面を自由面とした場合と裏面に強化シートを貼った場合のシミュレーション結果を、それぞれ、図 11、図 12 に示す。この場合は板の変形はほとんど見られないが板の内部を歪み ε_{rr} が伝播する様子がよくわかる。なお、ここではコンクリートの引張破壊に合せ、歪みが 0.01 になると赤色表示になるようにしてある。これら 2 つの図から、裏面に強化シートを貼った方が、貼らない場合に比べ歪みはるかに小さくなることを見てとれる。このように、裏面に強化シートを貼ることは、裏面剥離を抑えるために効果があると言える。

裏面剥離について

裏面剥離が起こる原因は、衝撃点から始まった波動がコンクリート内部を伝播し裏面に到達したとき反射が起こるが、裏面が自由面になっているとそのままの変位位相で反射されるので、裏面に到達直前の波と反射直後の波が重なって変位が倍加されるためである。裏面が固定面になっているときは、反射するときに位相が反転されるので、到達直前の波と反射する波は相殺されて変位はゼロになってしまう。強化シートを貼ることは、自由面を固定面に近づける効果がある。

このことは、1次元の弦の振動で考えるとよく理解できる。座標 x 、時刻 t における弦の変位を $U(x, t)$ とし、その波動方程式は、 c を伝搬速度として、

$$\ddot{U} = c^2 \partial_x^2 U \quad (5.6)$$

となり、この一般解は、左進行波の振幅を f 、右進行波のそれを g とすると、

$$U(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (5.7)$$

となる。ここで、 $x = 0$ を自由端とすると、その境界条件は x -微係数がそこでゼロとなるので、

$$\partial_x U(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (5.8)$$

これに (5.7) 式を適用すると、

$$f'(ct) + g'(-ct) = 0 \quad (5.9)$$

となり、これを ct で積分すると、積分定数を除いて、

$$g(-ct) = f(ct) \quad (5.10)$$

となり、時間 t は任意なので、 $-ct \rightarrow x - ct$ とずらしてやると、

$$g(x - ct) = f(-x + ct) \quad (5.11)$$

となる． $f(x+ct)$ を $x > 0$ の領域から原点 $x = 0$ に向かう元の波とすると $g(x-ct)$ はその反射波である．これを (5.7) 式に代入すると，

$$U(x,t) = f(x+ct) + f(-x+ct) \quad (5.12)$$

を得る．これから，自由端 $x = 0$ では

$$U(0,t) = 2f(ct) \quad (5.13)$$

となり，元の波と反射波が重なる結果として振幅が倍加されることがわかる．

ちなみに， $x = 0$ を固定端とした場合は，その境界条件は， $U(0,t) = 0$ であり，(5.7) 式から $g(-ct) = -f(ct)$ となって，前と同じく $-ct \rightarrow x - ct$ とずらしてから，(5.7) 式に代入すると

$$U(x,t) = f(x+ct) - f(-x+ct) \quad (5.14)$$

となる．反射波の方が位相反転されており，ここで $x = 0$ とすると，確かに $U(0,t) = 0$ となる．

裏面剥離については，より詳しい解析が必要であり，その詳細については次回の論文に譲る．

6 おわりに

この論文で最も苦心した点は，いかにして強化シートを理論の中に組み込むかということである．ここでは，強化シートを薄膜として扱いそこで作用する表面張力とコンクリート板の応力との釣り合いを考慮する方法で議論を展開した．この方法は最も理由あるものと考えられるが，これでも数値計算の段階では発散から免れることはできず，やむなく，平滑のためのフィルターを入れざるを得なかった．何かもっと良い方法はないものかと思案する．

強化シートを弾性体として扱いコンクリート板との接触面で接続条件を入れてつなぐ方法も試みたがこの方法では，もっとひどい発散が起こってしまい，断念せざるを得なかった．これらの点では以後改良の余地が残されている．

参考文献

- 1) 別府万寿博，三輪幸治，大野友則，塩見昌紀：鋼製剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊に関する実験的研究，土木学会論文集，Vol.63, No.1, pp.178-191, 2007.
- 2) 別府万寿博，三輪幸治，伊東雅晴，片山雅英，大野友則：剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリート板の局部破壊発生メカニズムに関する数値解析的検討，構造工学論文集，Vol.53A, pp.1293-1304, 2007.
- 3) 別府万寿博，三輪幸治，高橋順，小川敦久：剛飛翔体の高速衝突を受けるコンクリートの板の裏面剥離に関する繊維補強の効果，第 10 回 構造物の衝撃問題に関するシンポジウム論文集（2010 年 12 月）土木学会主催，於ける九州大学.
- 4) Hideaki TANAHASHI, Pasternak Model Formulation of Elastic Displacements in the Case of a Rigid Circular Foundation, Journal of Asian Architecture and Building Engineering, Vol.6, No.1, pp.167-173, May 2007.