HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	ANPの感度分析のウェイトのファジィ集合による一表現法
著者	齋藤，達彦；大西，真一；SAITO，Tatsuhiko；OHNISHI，Shin－ichi
引用	北海学園大学工学部研究報告(39)：153-161
発行日	2012-02-14

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

ANPの感度分析のウェイトのファジィ集合による一表現法

齋　藤　達　彦*・大　西　真　一*

On a Fuzzy Weight Representation for ANP from Sensitivity Analysis

Tatsuhiko SAITO* and Shin–ichi OHNISHI*

要　旨

ANP（Analytic Network Pocess）は意思決定手法の一つで，ネットワーク構造や要素間に従属関係をもつ問題を解決するために用いられる．ANPにおける超行列の要素として一対比較行列の固有ベクトルが使われることがある．その一対比較行列の整合性が良くないためにデータの信頼性が不足する状況がしばしば発生し，最終的な結果の信頼性が損なわれている場合が見受けられる．このような問題への対処の一つとして超行列の要素をファジィ集合を用いて表現する手法を提案する．

1．まえがき

意思決定の代表的な手法の一つとしてT. L. Saatyによって提案されたAHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）[1] がある．またそれにネットワーク構造を加え拡張したものにANP（Analytic Network Process）[2] がある．AHPでは一対比較行列の固有ベクトルを用いて最終的なウェイトを求めることによって意思決定者（DM）の代替案の順位や相対的な重要度の比率を知ることができる．一方ANPはネットワーク構造や要素間に従属関係をもつ問題を解決するために用いられる．また，ANPで扱われる超行列の要素として一対比較行列の固有ベクトルを用いることがある．そのうちの一つ以上の一対比較行列の整合性が悪い場合が存在し，そのとき最終結果の信頼性が損なわれる場合が起こりうる．このような問題への対処の一つとして超行列の要素をファジィ集合を用いて表現する一手法を提案する．ファジィ集合［3］とは1965年にL. A. Zadehによって提唱された，集合に帰属する度合を表すメンバシップ関数により，あいまいな対象を定量化して扱う概念である．本研究では大西らが提案した感度分析

* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報工学専攻
* Graduate School of Engineering (Electronics and Information Engineering), Hokkai–Gakuen University

［4］の結果を使用したウェイト表現の拡張［5］を用いて，ANPの超行列の要素に十分な整合性が無い一対比較行列の固有ベクトルを用いた場合の評価について考えていく．

2．ANPと超行列

2.1　AHP

AHPでは問題を階層構造にあてはめ，同レベルにおいて意思決定者の２つの要素間の一対比較から一対比較行列を作成し，その行列の固有ベクトルを要素の相対的なウェイトとして求める．そして異なるレベルのウェイトを統合することにより最終的な代替案の総合ウェイトを求めることが可能となる．AHPの階層構造は総合目的１つ，評価基準２つ，代替案３つの場合には**図２．１**のようになる．総合目的とはその問題における目的である，例えば個人的に使用するパソコンを買うとするときに【どのパソコンを選ぶか】というようなものである．代替案とは具体的な事物である．先ほどの例でいえば【デスクトップのレノボのパソコン】や【富士通のノートパソコン】である．評価基準とは代替案を選ぶ上で評価する基準である，例えば【価格の安さ】や【性能の良さ】が挙げられる．ここである一つの要素から次のレベルの要素群に対して一対比較行列を作成し，和を１で正規化した固有ベクトルを求めることによってその一つの要素からの次の要素群への相対的な評価を得ることができる．一対比較行列を作成する際にはDMにどちらが何倍重要かや**表２．１**のSaatyの重要性の定義を用いて尋ねる．その場合に

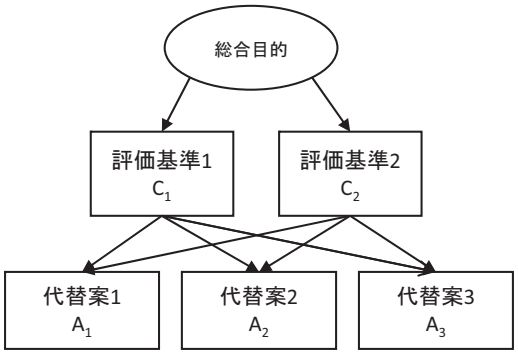

図２．１　AHPの階層図

表２．１　Saatyの重要性の尺度の定義

重要性の尺度	定義
1	同じくらい重要
3	やや重要
5	かなり重要
7	非常に重要
9	きわめて重要

例えば要素数が$n=3$とする一対比較行列Xは以下のような形となる．一対比較行列は対角成分は１（$x_{ii}=1$，$i=1$，…，n），対称成分が逆数（$x_{ij}=1/x_{ji}$，$i,j=1$，…，n）となる性質を持つ逆数行列である．

$$X=\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ 1/x_{12} & 1 & x_{23} \\ 1/x_{13} & 1/x_{23} & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

総合目的からn個の評価基準に対しての一対比較行列の固有ベクトルを$\boldsymbol{v}=(v_i)$とし，i番目の評価基準からm個の代替案への固有ベクトルを$\boldsymbol{w}_i=(w_{ij})$とする．ここで最終的な代替案$j$の総合ウェイトを$y_j$とすると以下の式から求めることができる．

$$y_j=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}v_i\ (j=1,\ldots,m) \tag{2}$$

また，一対比較行列を作成した際にn次の行列が推移性を満たしているか矛盾が発生していないかを確かめるために以下の式から整合度（C.I.）を求めることによって整合性を確認する．

$$\mathrm{C.I.}=\frac{\lambda-n}{n-1} \tag{3}$$

ここでλは最大固有値である．C.I.が0.1未満であれば整合性が十分あると慣例でされている．一般に行列のサイズが大きくなると回答者が一貫性を保ちにくくなる等の理由によりC.I.が悪くなる傾向がある．

2.2　ANP

ANPでは超行列を作成する際にその要素としてウェイトを用いるが，本研究ではウェイトとしてAHPと同じく固有ベクトルを採用する．ANPの階層構造は総合目的１つ，評価基準２つ，代替案３つの場合には**図２．２**のようになる，ただしこの図での問題は評価基準と代替案の関

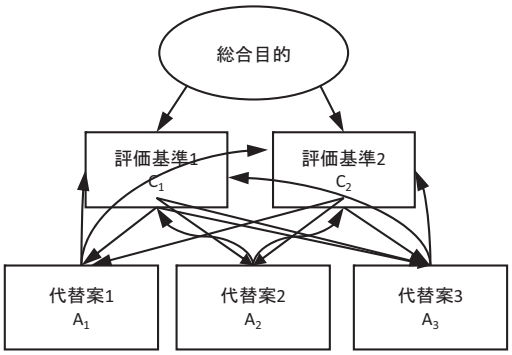

図２．２　ANPの階層図

係がネットワーク構造となっている場合である．AHPとANPの違いは下からの評価が含まれているか否かであり，例えば代替案がパソコンであったときに代替案のパソコンがどの評価基準を重視しているかを考慮することができるということである．ANPで扱う超行列Sはそれぞれの評価行列を同等の対象としてまとめたものであり，例えばOを目的，Cを評価基準，Aを代替案とし，W_{IJ}をIからJへの評価行列$\left(I,J\in\{O,A,C\}\right)$とすると以下のように表される．

$$S=\begin{pmatrix} W_{OO} & W_{CO} & W_{AO} \\ W_{OC} & W_{CC} & W_{CA} \\ W_{OA} & W_{CA} & W_{AA} \end{pmatrix} \tag{4}$$

また，実際に評価が無い場合には要素の全てが0のO行列となる．例えば**図2．2**のような階層図の場合には超行列Sは以下のような形となる

$$S=\begin{pmatrix} O & O & O \\ W_{OC} & O & W_{CA} \\ O & W_{CA} & O \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここで代替案からみた評価基準の評価行列W_{AC}は以下の通りとなる．

$$W_{AC}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \end{array} \tag{6}$$

u_{ij}は代替案A_iから評価基準C_jへのウェイトであり，本研究では先ほども述べたように一対比較行列の固有ベクトルである．この超行列を既約行列に変換し，固有ベクトル法によりANPの評価基準及び代替案の最終的総合ウェイトを求める．

3．一対比較行列の感度分析

意思決定者の回答パターンが結果にどのように影響を与えているかを調べる方法に感度分析がある．本研究ではデータの構造を変えずに，比較的簡便に使用できるAHPの感度分析を利用する．それは一対比較行列に摂動を与えたときの整合度やウェイトの変動に，行列の各成分がどのように影響を与えているのかを探索する手法である．一対比較行列$X=(x_{ij})(i,j=1,\ldots,n)$に摂動$\varepsilon D_X=(\varepsilon x_{ij}d_{ij})$を与えた行列を$X(\varepsilon)=X+\varepsilon D_X$とする．

そして$X(\varepsilon)$の最大固有値を$\lambda(\varepsilon)$，また$X(\varepsilon)$の最大固有値に対応した固有ベクトルを$\boldsymbol{w}(\varepsilon)$とするとそれぞれは以下のように表すことができる．

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda+\varepsilon\lambda^{(1)}+o(\varepsilon) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{w}(\varepsilon)=\boldsymbol{w}+\varepsilon\boldsymbol{w}^{(1)}+o(\varepsilon) \tag{8}$$

ここで整合度が固有値に依存していることから，整合度の変動C.I.(ε)は次のように表せる．

$$\mathrm{C.I.}(\varepsilon)=\mathrm{C.I.}+\varepsilon\,\mathrm{C.I.}^{(1)}+o(\varepsilon) \tag{9}$$

そして摂動を与えた後の整合度の変動部分C.I.$^{(1)}$とウェイトの変動$\boldsymbol{w}^{(1)}=\left(w_k^{(1)}\right)$は適当な係数$g_{ij}$, h_{kij}を求めることによって次のように表現できる．

$$\mathrm{C.I.}^{(1)}=\sum_i^n\sum_j^n g_{ij}d_{ij} \tag{10}$$

$$w_k^{(1)}=\sum_i^n\sum_j^n h_{kij}d_{ij} \tag{11}$$

これら２式より変動部分はd_{ij}の一次結合で表されていることが分かり，d_{ij}の係数g_{ij}とh_{kij}から，それぞれ整合度とウェイトに対する一対比較行列の成分の影響の大きさを評価することができる．

４．ANPのファジィウェイト表現

DMの回答にあいまいさが含まれていることなどにより一対比較行列の信頼性が損なわれることがしばしばある，それは整合度が良くないことに現れる．それゆえ一対比較行列の整合性が良くない時に結果をあいまいさ含んだ形で表現することが望ましい．感度分析結果の係数の積$g_{ij}h_{kij}$は一対比較行列の要素x_{ij}がウェイトw_kに与える影響の大きさと見ることができ，符号が影響の方向を表していると考えられる．ここでg_{ij}が常に正であるので$g_{ij}h_{kij}$の正負はh_{kij}の符号のみに注意を払えば良い．更にC.I.が大きくなれば曖昧さが増すことからC.I.$g_{ij}|h_{kij}|$が広がりの大きさと考えられる．

以上のことを踏まえ一対比較行列の整合度が良くない場合のウェイト$\tilde{w}_k$は，次のL–Rファジィ数で表現することが可能である［５］．

$$\tilde{w}_k=(w_k,\alpha_k,\beta_k)_{LR} \tag{12}$$

$$\alpha_k=\mathrm{C.I.}\sum_i^n\sum_j^n s(-,h_{kij})g_{ij}\,|h_{kij}| \tag{13}$$

$$\beta_k = \mathrm{C.I.} \sum_i^n \sum_j^n s(+, h_{kij}) g_{ij} |h_{kij}| \tag{14}$$

$$s(+,h) = \begin{cases} 1(h \geq 0) \\ 0(h < 0) \end{cases}, \quad s(-,h) = \begin{cases} 1(h < 0) \\ 0(h \geq 0) \end{cases}$$

L–Rファジィ数とはDuboisとPradeによって導入された概念［6］で，中心をm，左右の広がりをα，$\beta\,(\alpha,\beta > 0)$を用いて以下のメンバシップ関数で表されるものである．

$$\mu_M(t) = \begin{cases} L((m-t)/\alpha) & (t \leq m) \\ R((t-m)/\beta) & (t \geq m) \end{cases} \tag{15}$$

ここで$L(\cdot)$は型関数で特定の条件を満たす．$R(\cdot)$も全く同様に定義されている．

本研究ではこのファジィ数の型関数を三角型のメンバシップ関数とし，その型関数として以下のようなμを採用する．

$$\mu_M(t) = \max(0, 1 - |t - w_k| / a) \tag{16}$$

$$a = \begin{cases} \gamma\alpha_k & (t \leq w_k) \\ \gamma\beta_k & (t > w_k) \end{cases}$$

ここでγは定数である．

そしてこれにより表現された超行列$\tilde{S} = (\tilde{s}_{ij})$に対して以下の条件を用いてα－レベルカット集合を作り$S_\alpha = (s_{ij\alpha}) = \left(\left[\underline{s}_{ij\alpha}, \overline{s}_{ij\alpha}\right]\right)$を得る．

$$s_{ij\alpha} = \left\{t \,|\, \mu_{w_k}(t) \geq \alpha\right\} (0 \leq \alpha \leq 1) \tag{17}$$

S_αの下端及び上端をとることにより，２つの超行列$\underline{s}_\alpha = (\underline{s}_{ij\alpha})$及び$\overline{s}_\alpha = (\overline{s}_{ij\alpha})$が得られる．

これら２つの超行列を既約行列にした行列のそれぞれの固有ベクトルをα－レベルカット集合の区間とし，αを[0,1]の範囲で動かすと総合ウェイトの要素もまたファジィ数で表現することが可能となる．

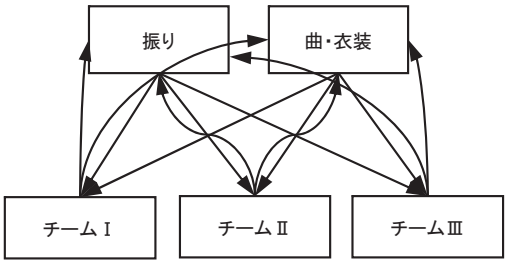

図５．１　階層図

表５．１　振りから代替案への一対比較行列

振り	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	ウェイト
Ⅰ	1	5	6	0.695
Ⅱ	1／5	1	6	0.238
Ⅲ	1／6	1／6	1	0.068

C.I.＝0.147

表５．２　整合度に対する感度分析結果

C.I.	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	0.000	0.570	0.195
Ⅱ	0.195	0.000	0.570
Ⅲ	0.570	0.195	0.000

表５．３　ウェイトに対する感度分析結果

Ⅰ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	0.000	0.106	0.036
Ⅱ	-0.019	0.000	-0.056
Ⅲ	-0.050	-0.017	0.000

Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	0.000	-0.091	-0.031
Ⅱ	0.025	0.000	0.072
Ⅲ	0.019	0.006	0.000

Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	0.000	-0.016	-0.005
Ⅱ	-0.005	0.000	-0.016
Ⅲ	0.031	0.011	0.000

５．数値実験例

本研究ではよさこいソーラン祭り［７］で行われているパレードの採点に対してANPを用いた数値実験を試みた．ここでは評価基準を「振り」と「曲・衣装」の２つにし，代替案を仮想のチーム３つとする．階層図を**図５．１**に示す．評価基準の「振り」とは（１）動きがしっかりしているか（２）全体がそろっているか，「曲・衣装」は（１）曲のメリハリ（２）衣装替えが効果があるか（３）曲に合っているか，をそれぞれ注目するものである．

ここで**表５．１**は振りからのチーム代替案への一対比較行列とウェイト及び整合度である．ここでC.I.が0.147となっていて0.1を超えておりデータの信頼性が高くないことがわかる．そこで振りから各チームへの評価の部分をファジィウェイトを用いた表現を行う．

一対比較行列に対しての感度分析結果を**表５．２**及び**表５．３**に示す．これらの結果と式（12）～（14）の定義から超行列Sを次のファジィ数超行列$\tilde{S}$として表現できる．

表5．4　総合ウェイトのα - レベルカット集合の端点

$\overline{S_\alpha}$の固有ベクトル

α	振り	曲・衣装	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
0.0	0.5403	0.4597	0.6150	0.2484	0.1365
0.1	0.5403	0.4597	0.6149	0.2485	0.1366
0.2	0.5402	0.4598	0.6147	0.2486	0.1366
0.3	0.5402	0.4598	0.6146	0.2487	0.1367
0.4	0.5401	0.4599	0.6144	0.2489	0.1367
0.5	0.5401	0.4599	0.6143	0.2490	0.1368
0.6	0.5400	0.4600	0.6141	0.2491	0.1368
0.7	0.5400	0.4600	0.6140	0.2492	0.1369
0.8	0.5399	0.4601	0.6138	0.2493	0.1369
0.9	0.5399	0.4601	0.6136	0.2494	0.1370
1.0	0.5398	0.4602	0.6135	0.2495	0.1371

$\underline{S_\alpha}$の固有ベクトル

α	振り	曲・衣装	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
0.0	0.5393	0.4607	0.6120	0.2504	0.1376
0.1	0.5394	0.4606	0.6121	0.2503	0.1375
0.2	0.5394	0.4606	0.6123	0.2502	0.1375
0.3	0.5395	0.4605	0.6124	0.2502	0.1374
0.4	0.5395	0.4605	0.6126	0.2501	0.1374
0.5	0.5396	0.4604	0.6127	0.2500	0.1373
0.6	0.5396	0.4604	0.6129	0.2499	0.1373
0.7	0.5397	0.4603	0.6130	0.2498	0.1372
0.8	0.5397	0.4603	0.6132	0.2497	0.1372
0.9	0.5398	0.4602	0.6133	0.2496	0.1371
1.0	0.5398	0.4602	0.6135	0.2495	0.1371

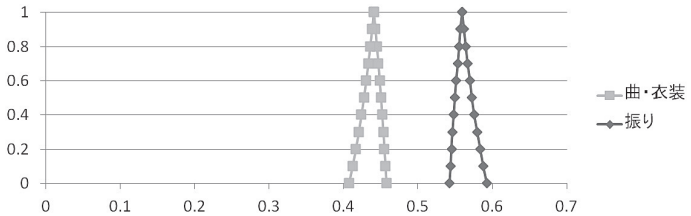

図5．2　評価基準のファジィウェイト表現

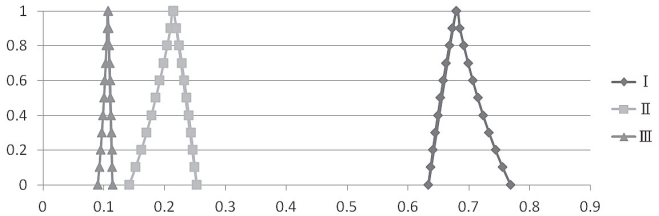

図5．3　代替案のファジィウェイト表現

$$\tilde{S}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{振り} & \text{曲・衣装} & \text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.666 & 0.250 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0.333 & 0.250 & 0.500 \\ (0.695, 0.230, 0.230)_{LR} & 0.659 & 0 & 0 & 0 \\ (0.238, 0.196, 0.196)_{LR} & 0.185 & 0 & 0 & 0 \\ (0.068, 0.068, 0.068)_{LR} & 0.156 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{振り} \\ \text{曲・衣装} \\ \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \end{array} \tag{18}$$

式（16）の三角型メンバシップ関数にあてはめて，α－レベルカットを行うことで区間を得ることができ，その区間の最大値と最小値用いることで二つの行列$\underline{S_\alpha}$，$\overline{S_\alpha}$を作成する．本実

験では$\gamma=0.3$とした．それぞれの行列の固有ベクトルをファジィウェイトのα－レベルカット集合の最大値と最小値とみなすことにより最終的な総合ウェイトの区間を得ることができる．

αを［0,1］の範囲で動かすことにより最終的な結果が**表５．４**のようになり，ファジィ数で表現することが可能となった．**図５．２**，**図５．３**は評価基準及び代替案のメンバシップ関数を図示したものであり，ここでこの数値実験から最終的な結果は必ずしも三角型のメンバシップ関数にならないことがわかる．今回は大きい二つの勾配のセットにおいて，内側の方が急で外側の方がなだらかになった．また，ウェイトの比率が大きくなればなるほど広がりも大きくなっていた．

６．まとめ

本研究では，ANPの感度分析結果を用いたファジィ集合による一表現法を提案した．また数値実験でファジィ数がどのように表現されるかを確認した．この表現により結果にどのようなあいまいさが含まれているかを評価することができると考えられる．今後は実データに対する数値実験を行うことやこれらのファジィウェイト表現の性質，強連結でない場合の影響を調べることを目標に研究を重ねていく予定である．

参考文献

［１］Saaty. T. L. : The Analytic Hierarchy Process, *McGraw−Hill. NewYork* (1980)

［２］Saaty. T. L. : The Analytic Network Process, *RWS Publications. Pittsburgh* (1996)

［３］Zadeh. L.A. : Fuzzy sets, *Information and control*, 8, 3, 338–353 (1965)

［４］大西真一，今井英幸，河口至商：ファジィAHPにおける感度分析を用いた重要度の安定性の評価，日本ファジィ学会誌，９，１，140－147（1997）

［５］Ohnishi. S., Yamanoi. T., Imai. H. : A Fuzzy Weights Representation for Inner Dependence AHP, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics.* 15, 3, 329–335 (2011)

［６］坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用，森北出版（1989）

［７］Yosakoiソーラン祭り　http : //www.yosakoi−soran.jp/

［８］Sekitani.K., and Takahashi. I. : A unified model and analysis for AHP and ANP, *Journal of the Operations Research Society of Japan.* 44, 1, 67–89 (1999)

［９］木下栄蔵：孫子の兵法の数学モデル―最適戦略を探る意思決定法AHP，講談社（1998）

［10］木下栄蔵：AHPの理論と実際，日科技連（2000）