HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

| | |
|---|---|
| タイトル | FDTD法とモード展開法による管内音場の可視化 |
| 著者 | 菊地，祐也；坂尻，勇人；元木，邦俊；KIKUCHI，Yuya；SAKAJIRI，Hayato；MOTOKI，Kunitoshi |
| 引用 | 北海学園大学工学部研究報告(39)：133-141 |
| 発行日 | 2012-02-14 |

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

# FDTD法とモード展開法による管内音場の可視化

菊　地　祐　也*・坂　尻　勇　人*・元　木　邦　俊*

# Visualization of Acoustic Field in a Rectangular Tube Using FDTD and Mode Expansion Methods

Yuya KIKUCHI*, Hayato SAKAJIRI* and Kunitoshi MOTOKI*

要　旨

声道内部の音場解析の手法として，従来から１次元モデルを用いて解析する手法があるが，近年では，MRI（Magnetic Resonance Imaging）データなどを基に３次元の声道モデルを構築し，有限要素法（FEM），有限差分時間領域法（FDTD），モード展開法などにより解析が行われている．本研究では，FDTD法による高次モードを含む音場が定常状態に至るまでの過程を可視化し，モード展開法と同じ条件で解析を行った結果を報告する．

## 1　はじめに

音声生成モデルの高度化のために声道内部の音場解析を行っている．従来から，１次元モデルを用いて解析する手法があるが，近年ではMRI（Magnetic Resonance Imaging）データなどを基に３次元の声道モデルを構築し，有限要素法（FEM），有限差分時間領域法（FDTD），モード展開法などにより解析が行われている．FEMでは詳細な音場解析を行うことができるが，声道の３次元モデルの構築や数値計算に時間がかかる．FDTD法は，主に電磁場解析の分野で用いられてきた手法であるが，近年音場解析にも導入されている[1)−3)]．この手法は，音場を表す基本式を中心差分し各点の音圧と粒子速度を交互に計算する．時間領域で解析を行い，任意の３次元形状の解析を行うことができる．モード展開法は，声道形状を矩形音響管の縦続接続によりモデル化し，声道内音場を高次モードを用いてパラメトリックに表現する手法である．これは１次元モデルの拡張であり，ある程度３次元声道の特徴を反映し，かつ計算が速い手法として提案されている[4)−6)]．本研究では，FDTD法による高次モードを含む音場が定常状態に

* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報工学専攻
* Graduate School of Engineering（Electronics and Information Engineering）, Hokkai–Gakuen University

至るまでの過程を可視化し，モード展開法と同じ条件で解析を行った結果を報告する．

## 2　計算手法

### 2.1　音場を表す基本式

3次元音場における音圧$p$と粒子速度$\mathbf{v}$に関する連続の式と運動方程式はそれぞれ次式のようになる．

$$\frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -K \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r},t) \tag{1}$$

$$\operatorname{grad} p(\mathbf{r},t) = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{r}$は位置座標，$t$は時間，$K$は体積弾性率，$\rho$は空気密度である．速度ポテンシャル$\phi$と粒子速度$\mathbf{v}$の関係を次式のように定義する．

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = -\nabla \phi(\mathbf{r},t) \tag{3}$$

式（2）と式（3）から，速度ポテンシャル$\phi$と音圧$p$の関係が得られる．

$$p(\mathbf{r},t) = -\rho \frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{4}$$

式（3），（4）の関係を式（1）に代入すると，$\phi$に関する波動方程式が得られる．

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \tag{5}$$

ここで，$c$は$c=\sqrt{K/\rho}$と置いており，音速を表す．また，$\nabla^2$は直交座標系では次の演算を表す．

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6}$$

時間因子を$e^{j\omega t}$として，$\phi = \Phi(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$とすると，空間分布$\Phi(\mathbf{r})$に関するヘルムホルツ方程式が得られる．

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \tag{7}$$

ここで，$k$は波数を表し，$k=\omega/c$である．また，音圧，粒子速度の空間分布を$P$，$\mathbf{V}$とすると，式（3），（4）を用いて，$\Phi(\mathbf{r})$から次のように求められる．

$$P(\mathbf{r}) = j\omega p \Phi(\mathbf{r}) \tag{8}$$

$$\mathrm{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \tag{9}$$

## 2.2　FDTD法

式（1），（2）を1次元で考えた場合に，時間および空間微分を中心差分で近似すると，次式のようになる．

$$\frac{p^{n+\frac{1}{2}}(i) - p^{n-\frac{1}{2}}(i)}{\Delta t} = -K\frac{v^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - v^n\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \tag{10}$$

$$\frac{p^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - p^n\left(i-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = -p\frac{v^{n+\frac{1}{2}}(i) - v^{n-\frac{1}{2}}(i)}{\Delta t} \tag{11}$$

$n$は時間ステップを表し，その離散間隔は$\Delta t$である．また，$i$は空間離散点の番号を表し，その離散間隔は$\Delta x$である．式（10），（11）を整理すると，音圧$p$と粒子速度$v$に関する次の更新式が得られる．

$$p^{n+\frac{1}{2}}(i) = p^{n-\frac{1}{2}}(i) - K\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{v^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - v^n\left(i-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{12}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}}(i) = v^{n-\frac{1}{2}}(i) - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{p^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - p^n\left(i-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{13}$$

3次元に拡張すると$x$，$y$，$z$方向の粒子速度成分$v_x$，$v_y$，$v_z$に対して，同様にして以下の更新式が得られる．

$$\begin{aligned} p^{n+\frac{1}{2}}(i) = p^{n-\frac{1}{2}}(i) &- K\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{v_x^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - v_x^n\left(i-\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &- K\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{v_y^n\left(j+\frac{1}{2}\right) - v_y^n\left(j-\frac{1}{2}\right)\right\} \\ &- K\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{v_z^n\left(k+\frac{1}{2}\right) - v_z^n\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

$$v_x^{n+\frac{1}{2}}(i) = v_x^{n-\frac{1}{2}}(i) - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{p^n\left(i+\frac{1}{2}\right) - p^n\left(i-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{15}$$

$$v_y^{n+\frac{1}{2}}(j) = v_y^{n-\frac{1}{2}}(j) - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{p^n\left(j+\frac{1}{2}\right) - p^n\left(j-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{16}$$

$$v_z^{n+\frac{1}{2}}(k) = v_z^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{p^n\left(k+\frac{1}{2}\right) - p^n\left(k-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{17}$$

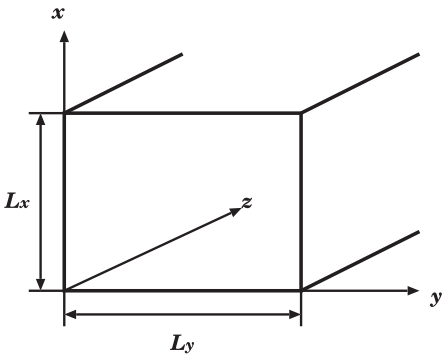



**図1**：矩形音響管の座標系

$i$，$j$，$k$は空間離散点の番号を表し，その離散間隔はそれぞれ，$\Delta x$，$\Delta y$，$\Delta z$である．

## 2.3　モード展開法

### 2.3.1　矩形音響管に関する解と高次モード

式（7）は，円筒管や矩形音響管に対しては比較的容易に解を求めることができ，その内部音場を平面波と高次モードの和として表現することができる．矩形管は面積と縦横比を様々に選ぶことができるので，円筒管よりも自由度が高く，声道断面の形状近似として利用することが考えられる．

**図1**のように管軸を$z$軸とした$xyz$座標系を用いて波動方程式の解を求める．矩形音響管の縦，横の寸法を$L_x$，$L_y$とし，$x=0$，$L_x$，$y=0$，$L_y$に剛壁とみなせる境界があるものとする．式（7）及び，管壁の境界条件より，矩形音響管内部の速度ポテンシャルが次のように表される[4]．

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}(a_{mn}e^{-\gamma_{mn}z}+b_{mn}e^{\gamma_{mn}z})\Psi_{mn}(x,y) \tag{18}$$

ここで，$a_{mn}$，$b_{mn}$は$z$方向の境界条件から定まるモード$(m,n)$の複素振幅を表す定数である．また，$\gamma_{mn}$をモード$(m,n)$の伝搬定数と呼ぶ．モード（0,0）は平面波を表し，平面波以外のモードは全て高次モードと呼ばれる．$\gamma_{mn}$は以下のように表される．

$$\gamma_{mn}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)+\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)-k^2} \tag{19}$$

$\Psi_{mn}(x,y)$は$x-y$断面上の速度ポテンシャルの空間分布形状を表す実関数で，固有振動姿態と呼ばれ次のようにおいている．

$$\Psi_{mn}(x,y)=\frac{\cos\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L_y}y\right)}{\sqrt{L_xL_y\sigma_m\sigma_n}} \tag{20}$$

ただし，$\sigma_m$，$\sigma_n$はm，nが0のとき1，それ以外で1/2である．式（8），（9），（18），（20）より，音圧$P$と$z$軸方向の粒子速度$V_z$は，次のようなモード展開により表すことができる．

$$p(x,y,z)=j\omega\rho\Phi(x,y,z)=j\omega\rho\sum_{m,n=0}^{\infty}(a_{mn}e^{-\gamma_{mn}z}+b_{mn}e^{\gamma_{mn}z})\Psi_{mn}(x,y) \tag{21}$$

$$V_z(x,y,z)=-\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}=\sum_{m,n=0}^{\infty}(a_{mn}e^{-\gamma_{mn}z}-b_{mn}e^{\gamma_{mn}z})\Psi_{mn}(x,y) \tag{22}$$

各モードについて，音圧と$z$軸方向の粒子速度の成分の比をとると，次のようになる．

$$Z_{Cmn}=\frac{j\omega\rho}{\gamma_{mn}} \tag{23}$$

$Z_{Cmn}$をモード$(m,n)$の特性インピーダンスと呼ぶ．平面波については，$\gamma_{00}=jk$，$Z_{Cmn}=\rho c$となる．

### 2.3.2　伝搬モードとエバネッセントモード

モード$(m,n)$の伝搬定数は，平面波以外では周波数の関数となる．伝搬定数の虚数部（位相定数）が0となる周波数を遮断周波数という．モード$(m,n)$の遮断周波数$f_{c,mn}$は式（19）より，次式のようになる．

$$f_{c,mn}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \tag{24}$$

遮断周波数より高い周波数では，伝搬定数は虚数となるので管断面上で式（20）の分布を保ったまま，高次モードは$z$軸方向に伝搬する．このようなモードを伝搬モードという．一方，遮断周波数より低い周波数では伝搬定数が実数（減衰定数）のみとなるので，$z$軸方向への位相変化はなく指数関数的に振幅が減衰する．このようなモードをエバネッセントモードといい，管の断面形状が変化するような部位で境界条件を満足するために局所的に存在する成分と考えることができる．エバネッセントモードに対する特性インピーダンスは，式（23）より虚数となる．

## 3　結果

### 3.1　FDTD法の計算モデル

**図2**のような矩形音響管を$L_y=5$ cm，$L_z=17$cmとして2次元のモデルで管内音圧分布を表現した．音源は，正弦波の粒子速度を0から$L_y/2$に設定し，$L_y/2$から$L_y$までを剛壁とした．また，伝搬方向に垂直な壁も剛壁とし，管の端は理想的開放とした．FDTD法で用いたパラメータを**表1**に示す．

**図 2**：FDTD法の計算モデル

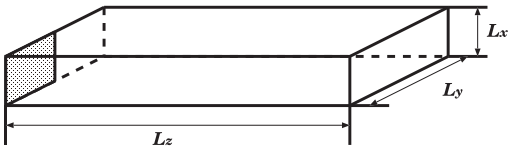



**図 3**：モード展開法の計算モデル

**表 1**　FDTD法で用いたパラメータ

| | |
|---|---|
| $y$，$z$方向の空間離散間隔 | 1 mm |
| 時間離散間隔 | 1 μs |
| 計算時間 | 5 ms（5000ステップまで） |
| 温度 | 37度C |
| 空気密度 | 1.1384 kg/m$^3$ |
| 音速 | 354 m/s |
| 体積弾性率 | 143×10$^3$ N/m$^2$ |

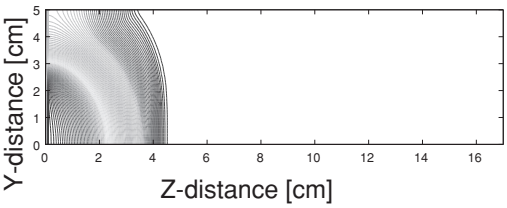
### 3.2　モード展開法の計算モデル

FDTD法と比較するため，**図 3** のような矩形音響管（$L_x$＝1 cm，$L_y$＝5 cm，$L_z$＝17cm）を用いた．$x$軸方向の音圧変動は無視できるものとした2次元のモデルで管内音圧分布を表現した．音源と境界条件もFDTD法と同じく，正弦波の粒子速度を0から$L_y/2$に設定し，$L_y/2$から$L_y$までを剛壁とした．また，伝搬方向に垂直な壁も剛壁とし，管の端は理想的開放とした．各高次モードの遮断周波数は（0,1），（0,2），（0,3）モードでそれぞれ，3.5，7.1，10.6kHzである．

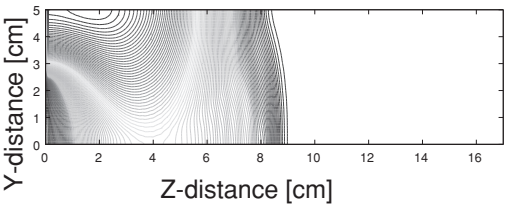
### 3.3　FDTD法により得られた音圧分布

**図 4** に2 kHzにおける音圧分布を示す．音圧分布は瞬時値の絶対値を等高線で表示したものである．**図 4**（a）は，0.125ms後の分布である．$T$は周期を表す．音源から波面が広がっていく様子が確認できる．**図 4**（b）は，0.25ms後の分布である．周波数2 kHzでは，高次モードはすべてエバネッセントモードとなるので8 cm付近では，ほぼ平面波のみの伝搬になっている．**図 4**（c），（d），（e）はそれぞれ，0.5，1.0，2.5ms後の分布である．2.5msで定常状態になっている．**図 5** に4 kHzにおける音圧分布を示す．**図 4** と同時刻における音圧分布の瞬時値を表示したものである．周波数4 kHzでは，（0,1）モードが伝搬モードとなるので，高次モードの伝搬が確認できる．2.5ms程度で定常状態になることが確認できる．

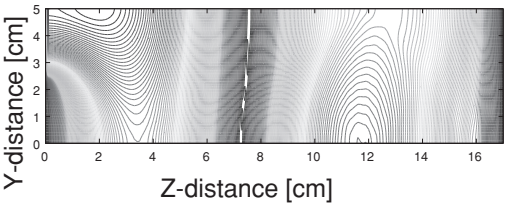
**図 6** に，定常状態での音圧分布を示す．音圧分布は，最後の1周期の最大値を絶対値で等高線表示したものである．**図 6**（a），（b），（c），（d）はそれぞれ周波数2,4,5,8kHzの分布である．**図 6**（a）は，高次モードはすべてエバネッセントモードで，音源付近にのみ存在し，8cm



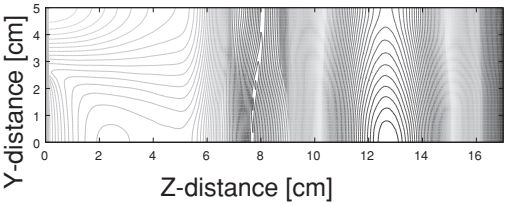

（a）0.125ms（0.25$T$）



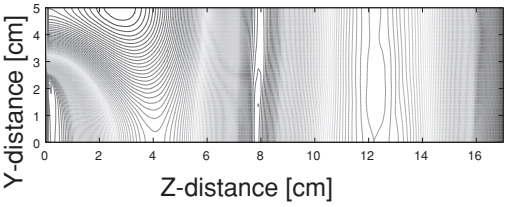

（b）0.25ms（0.5$T$）




（c）0.5ms（1$T$）

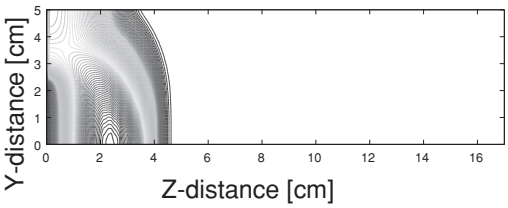



（d）1.0ms（2$T$）

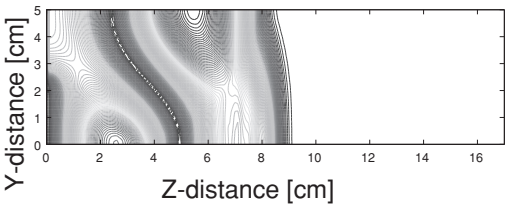



（e）2.5ms（5$T$）

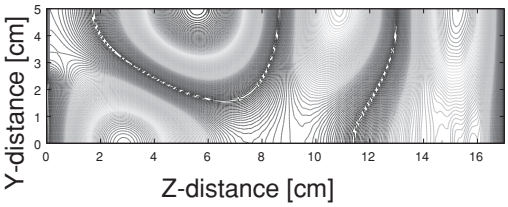
**図 4**：音圧分布の瞬時値（2 kHz）



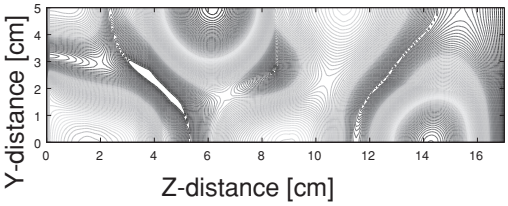

（a）0.125ms（0.5$T$）



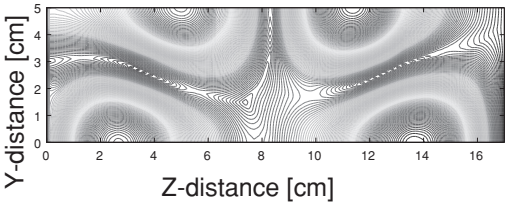

（b）0.25ms（1$T$）




（c）0.5ms（2$T$）



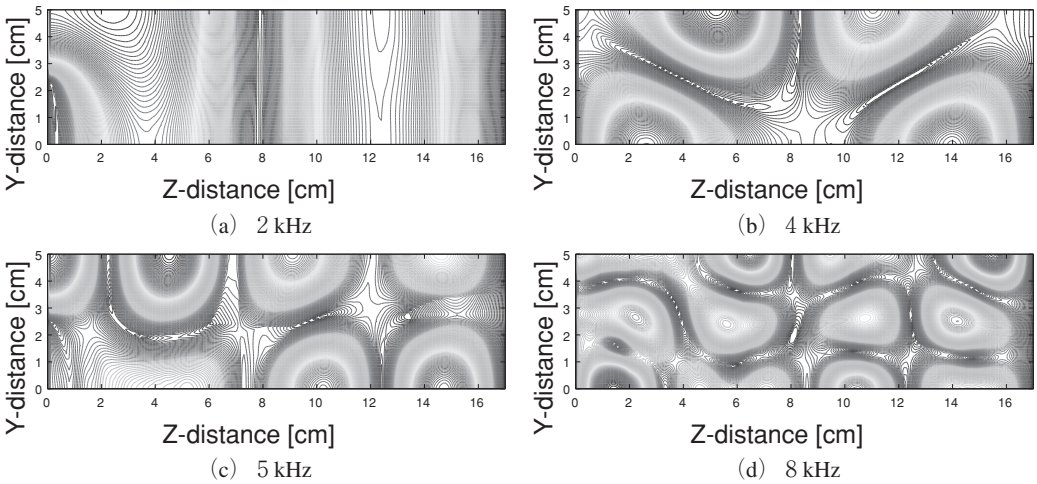

（d）1.0ms（4$T$）




（e）2.5ms（10$T$）

**図 5**：音圧分布の瞬時値（4 kHz）

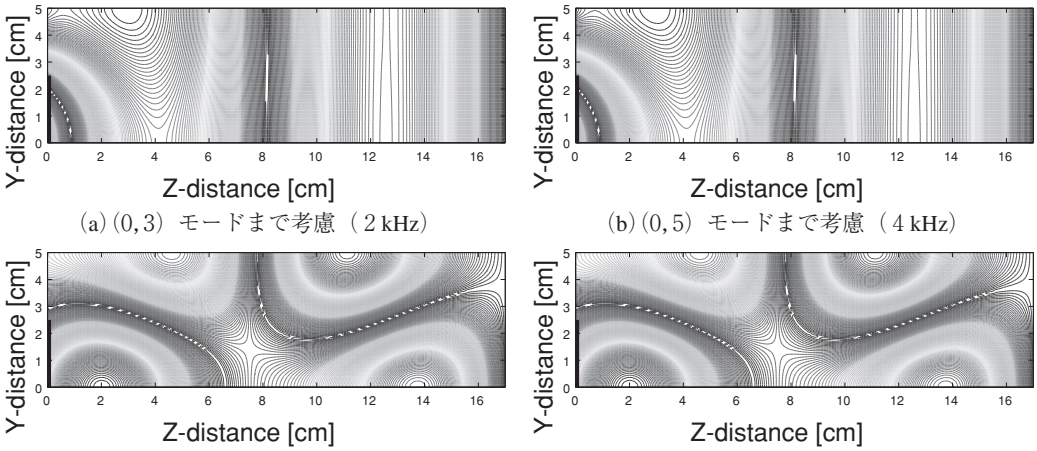
付近では平面波のみの伝搬になっている．**図 6**（b），（c）は，（0,1）モードが伝搬モードとなる．**図 6**（d）は，（0,2）モードが伝搬モードとなる．高次モードが伝搬モードとなると，管内は複雑な音圧分布となっている．




(a)　2 kHz　　(b)　4 kHz

(c)　5 kHz　　(d)　8 kHz

**図 6**：FDTD法による音響管内の定常状態での音圧分布




(a) (0,3)　モードまで考慮（2 kHz）　　(b) (0,5)　モードまで考慮（4 kHz）

(c) (0,3)　モードまで考慮（2 kHz）　　(d) (0,5)　モードまで考慮（4 kHz）

**図 7**：モード展開法による音響管内の定常状態での音圧分布

### 3.4　モード展開法により得られた音圧分布

**図 7** は，定常状態での音圧分布の絶対値を等高線表示したものである．**図 7**（a），（b）に周波数 2 kHzの分布を示す．（0,1）モードの遮断周波数は3.5kHzなので，（0,0）モード（平面波）以外はすべてエバネッセントモードとなり指数関数的に減衰する．(a）は，（0,3）モードまでを考慮し，（b）は（0,5）モードまでを考慮した結果である．（0,5）モードまで考慮しても（0,3）モードとほぼ同じ結果となった．周波数 4 kHzでの音圧分布を**図 7**（c），（d）に示す．周波数 4 kHzでは，（0,1）モードは伝搬モードとなり（0,2）モードからエバネッセントモードとなる．(c）は，（0,3）モードまでを考慮し，（d）は（0,5）モードまでを考慮した結果である．**図 7**（a），（b）と同様に，（0,5）モードまで考慮しても（0,3）モードとほぼ同じ結

果となった．

FDTD法とモード展開法の結果を比較すると，**図6**（a），**図7**（a）のように周波数2 kHzではよく一致している．また，**図6**（b），**図7**（c）のように周波数4 kHzにおいても，音源付近に若干の違いはあるがほぼ一致している．しかし，周波数5 kHz以上の高い周波数では音圧の空間分布に相違が見られた．

## 4　まとめ

本稿では，モード展開法とFDTD法とで同じ条件で解析した結果を報告した．4 kHz程度までは一致していることが確認できたが，5 kHz以上の高い周波数では，音圧の空間分布に相違が見られた．今後はさらに精度を向上させるため，空間4次精度の導入を考えたい．

本研究の一部は，北海学園大学ハイテクリサーチセンター（戦略的研究基盤形成支援事業）による補助を受けて行なわれた．

### 参考文献

1）佐藤雅弘，FDTD法による弾性振動・波動の解析入門，森北出版（2003）．
2）橋本修，阿部琢美，FDTD時間領域差分法入門，森北出版（1996）．
3）紺野健幸，松崎博季，真田博文，上野健治，“3次元FDTD法による声道音響解析のGPGPUを用いた高速化と可視化”，日本音響学会講演論文集，2－7－1（2011．3）．
4）元木邦俊，“音声生成系の放射過程のモデルについて”，北海学園大学大学院工学研究，9，6－12（2009）．
5）元木邦俊，松崎博季，“インピーダンス変換に基づく3次元声道モデルの音響特性の計算手法”，北海学園大学工学部研究報告，27，139－157（2002）．
6）K. Motoki, “Effects of Wall Impedance on Transmission and Attenuation of Higher−order Modes in Vocal−tract Model”, Proc. Interspeech 2010, 1013−1016 (2010).