タイトル	三角関数を関数項とする有限乗積のゼロ点およびスペクトル解析
著者	吉田，文夫; Yoshida，Fumio
引用	工学研究 ： 北海学園大学大学院工学研究科紀要(17): 51-54
発行日	2017-09-30

研究論文

三角関数を関数項とする有限乗積のゼロ点および スペクトル解析

吉　田　文　夫*

Zeros and Spectrum Analysis of Finite Product of Trigonometric Functions

Fumio Yoshida*

1．はじめに

ある関数が変数に対してどのように変化するか，どのような性質や構造を持っているかを調べることはその関数を理解するうえで重要である．本研究では，3角関数を関数項として表される有限乗積関数について，ゼロ点分布の位置およびスペクトル分布を調べ，関数の構造について明らかにするとともに，この有限乗積関数を用いた素数分布の問題への応用可能性を検討する．

2．有限乗積関数

2.1　定義

関数 $f(x)=0$ を与える点 x をゼロ点とよぶ．ゼロ点はこの方程式の解であり，ゼロ点の分布やゼロ点の次数（位数）は関数 $f(x)$ の構造を与える．構造を与えるのはゼロ点だけではなく，極値や発散点（位数）もある．ここでは，ある三角関数の有限乗積を考え，その関数値についてゼロ点分布やスペクトル解析によりその関数の特性を明らかにする．

乗積関数 $G_N(x)$ は実変数 x で定義されるもので，次式のように関数項の乗積という単純な式である．数の範囲の制限は特にないが，必要であれば複素数に広げることも可能である．

$$G_N(x)=\Pi_{k=1}^{N} f_k(x) \tag{2.1}$$

ここで，N は自然数である．関数項 $f_k(x)$ は多種多様なものを考えることができ，1例として，

$$f_k(x)=\left(\frac{k}{\pi}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right) \tag{2.2}$$

あるいは，

$$f_k(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2(2k+1)}\right) \tag{2.3}$$

のような3角関数について考察することができる．

2.2　乗積関数の概形

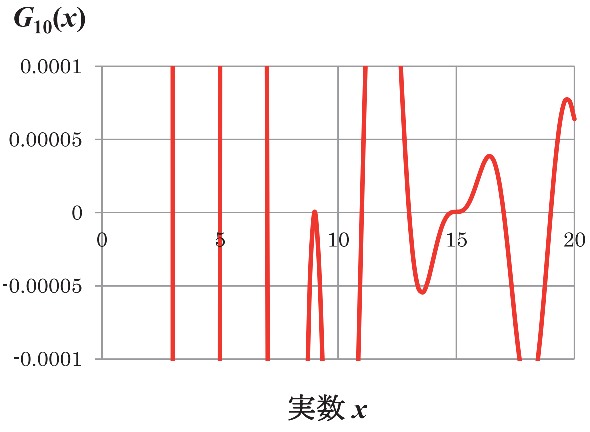
ここでは，(2.3) についての乗積関数

$$G_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2(2k+1)}\right) \tag{2.4}$$

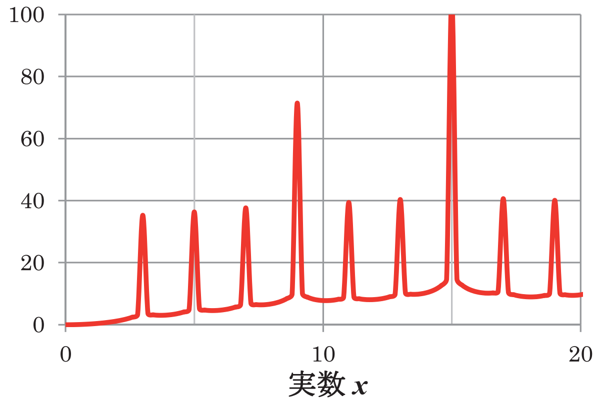
について調べる．図1に $n=10$ の場合の $G_{10}(x)$ のグラフを示す．ただし，数値計算上は有限桁の精度にともなう誤差のため，非常に小さいがゼロ点においても厳密にはゼロとはならない．$G_n(x)$ の乗積関数がもし，単項的な数式として得られるならば，解析をより容易に行うことができる可能性があるが，実際問題として困難と思われる．あきらかに，この乗積関数のゼロ点の分布は素数列と密接に関係している．図1 (a) からもわかるように，素数のときのみ1次（1位）のゼロ点となることがすぐ理解できる．これは，関数項の性質からも，合成数のときはすべて2次以上のゼロ点になるからで当然の結果になっている．

また，乗積関数は理論的にはゼロ点ではその対数値は発散するが，数値的には有限桁のために非常に小さい値ではあるが，有限な値を有する（図

* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報生命工学専攻
Graduate School of Engineering (Electronics, Information, and Life Science Eng.), Hokkai-Gakuen University



（a）　$G_{10}(x)$の形状



（b）　ln $|G_{10}(x)|$ の絶対値

図 1

1 (b))．そのことを逆に利用すると発散の仕方がゼロ点の次数に比例する傾向が確認できるので，ゼロ点の次数と分布の仕方がわかる．これは奇数 $N=2n+1$ の素因数分解に対応している．

2.3　無限乗積との関係

ここでの有限乗積のように，積をとる整数変数 k が sin や cos の中に入っているような公式は多数あるが，無限乗積では，次のような例を見つけることができる[1]．

$$\prod_{k=3}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)=0.114942803$$

$$\prod_{k=3}^{\infty}\frac{2k+1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{2k+1}\right)=0.18055054$$

しかし，上記のタイプで，変数 x をも含むような公式はなかなか見いだすことができなかった．

3．有限乗積関数のスペクトル分布

3.1　乗積関数のスペクトル

cos 関数項は周期性をもっているが，その乗積関数は非常に複雑で，x を大きくすると関数値が次第に小さくなるので，素数とそうでないものの差を数値的に判別することが事実上困難になる．それで，フーリエ分解によるスペクトル分布から考察することにする．乗積関数 $G_n(x)$のフーリエスペクトル関数を $H_n(q)$とする．

$$H_n(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G_n(x)e^{-iqx}dx \tag{3.1}$$

ここで，$G_n(x)$は cos 関数の積和の公式

$$2\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2) \tag{3.2}$$

を繰り返し利用することにより，n 個の cos 関数を次のように，2^{n-1} 個の cos 関数の和として分解することができる．

$$G_n(x)=2^{1-n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\sigma_j\frac{\pi x}{2}\right) \tag{3.3}$$

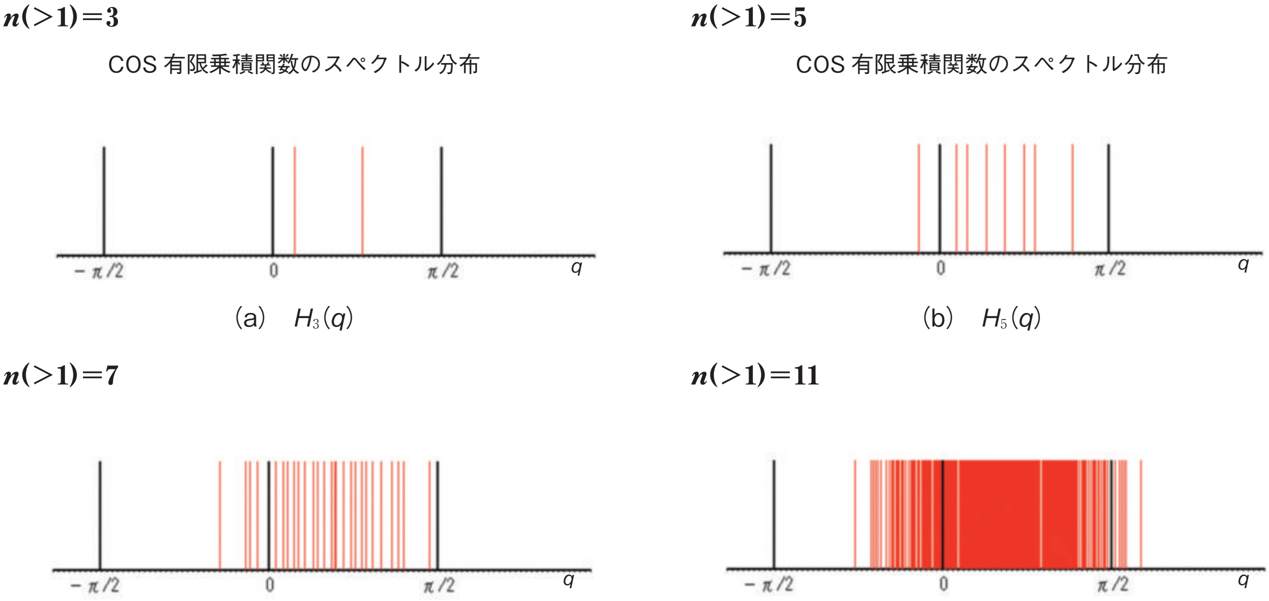
ここで，σ_j は 3 から $2n+1$ までの奇数の逆数について，正負の異なる付け方ですべて異なる和を表すもので，具体的には

$$\sigma_j=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}\end{cases} \tag{3.4}$$

したがって，(3.3)に対するフーリエスペクトル$H_n(q)$は次式のように簡単化される．

$$H_n(q)=2^{-n}\sqrt{2\pi}\sum_{j=1}^{2^{n-1}}\left\{\delta\left(q+\left(\frac{\pi}{2}\sigma_j\right)\right)+\delta\left(q-\left(\frac{\pi}{2}\sigma_j\right)\right)\right\} \tag{3.5}$$

これから，2^n 個のスペクトルは，$q_j=\pm\pi\sigma_j/2$ の点に現れる．図 2 に，$N=2n+1$ に対するスペクトル分布を示す．ここで，横軸 q に対して，縦軸は $q=q_j$ でのデルタ関数 $\delta(q-q_j)$のみを $n=3$，5，7，11 について示したものである．$n=2(N=5)$ のときは $\pi/6$ のところにスペクトルをもつが，n の



(a)　$H_3(q)$　(b)　$H_5(q)$　(c)　$H_7(q)$　(d)　$H_{11}(q)$

図 2

増大とともに，$\pm\pi/2$ の値を超えてスペクトルは広がることになる．その広がり方は (3.4) の奇数の逆数和からわかるように，$\log_e n$ のオーダーの対数発散になる．ただし，もう 1 つの成分 $\delta(q+q_j)$ のスペクトル分布が q の負側にも対称的に付加されることに注意.

4．$G_n(x)$による素数判定

ここでは，乗積関数のゼロ点分布を利用した素数判定への応用性について考察する．素数と合成数を区別するため，$G_n(x)$を利用し，$N=2n+1$ 以上でのゼロ点を含めないように，数列項

$$A_n=G_{n-1}(2n+1)=\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2(2k+1)}\right),\quad (n\geq 2) \tag{4.1}$$

を導入する．(4.1) から直ちには $N=2n+1$ が素数の場合のみに有限の値になることがすぐに分かる．すなわち，$N=2n+1$ は，

$$N=\begin{cases}\text{合成数} & for\ A_n=0\\ \text{素数} & for\ A_n\neq 0\end{cases} \tag{4.2}$$

となる．図 3 に整数 n に対する A_n の対数の絶対値を示す.

したがって，整数 N までに含まれる素数の数（個数関数）$\pi(N)$[2)] は，(4.2) を用いて，

$$\pi(N)=2+\sum_{k=2}^{n}\theta(|A_k|) \tag{4.3}$$

のようにかくことができる．ここで，(4.3) の右辺第 1 項の 1 は素数 2， 3 に対応し，第 2 項の θ 関数はステップ関数である.

$$\theta(s)=\begin{cases}0\ \ for\ s\leq 0 & \text{(合成数)}\\ 1\ \ for\ s>0 & \text{(素数)}\end{cases} \tag{4.4}$$

(4.2) を素数判定に応用するのは有限乗積のままでは有効ではなく，(4.1) については非常に大きな奇数についてより簡単化された表現を探す必要がある．現段階では，その表現式を見出すことはできていない.

素数定理によると，N が十分大きな場合は漸近的に，(4.3) は

$$\pi(N)\propto\frac{N}{\log_e N} \tag{4.5}$$

であることが知られている．(4.3) から，(4.5) を導くことできるかは検討すべき課題である.

5．おわりに

三角関数を関数項とする有限乗積関数の振る舞いを，ゼロ点の分布およびスペクトル分布の観点から考察した.

有限乗積，あるいは無限乗積に関しては，数学公式集に記載されているものは単項的に表現でき

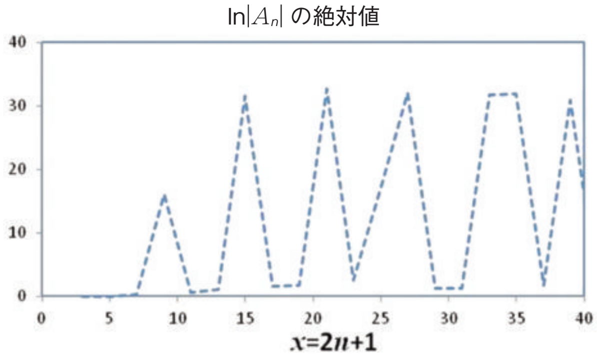


図 3　A_n の形状

るものが知られている．しかし，三角関数の引数に，$\cos\left(\dfrac{\pi N}{2(2k+1)}\right)$のように $2k+1$ の逆数の形で含まれている場合の公式を見出すことができなかった．$G_n(x)$は素数の分布を表すだけでなく，合成数のゼロ点の次数からその素因数分解の対応を図式的に示していることがわかる．しかし，整数 n が大きくなると，合成数（とくに 1 次）と素数に対して，（4.1）の A_n の絶対値は次第に小さくなり，その数値的な差が誤差の範囲内に埋もれてしまい，事実上判別が困難になるからである．整数 n に対するこの関数値の大きさ自体は 2^n 倍の規格化である程度避けることはできるが，十分大きな N についての素数判定の困難さは変わらない．

スペクトル解析からは，本研究で用いた有限乗積関数が有限個の cos 関数の簡単な線形和となり，そのフーリエスペクトルがデルタ関数の和として再構成されていることを示すことができた．

これを解釈するに，例えば固有振動スペクトルをもつ多粒子が相互作用の結果，固有振動が(3.3)のように再構成されると考えることが可能と思われる．しかしながら，スペクトル分布と素数分布の関係性については不明瞭であり，さらに検討すべき課題である．

謝辞

本研究にあたり，世戸憲治北海学園大学名誉教授には研究内容の意義，関数乗積公式について，貴重なコメントをいただきました．ここに，深く感謝を申し上げます．

参考文献

1）森口繁一・宇田川銈久・一松信：岩波公式Ⅱ，2012.
2）和田秀雄【監訳】：素数大全，朝倉書店，2010.