HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	鉄骨造HPシェルの生成および温度応答に関する検討
著者	串山, 繁; KUSHIYAMA, Shigeru
引用	北海学園大学工学部研究報告(45): 1-28
発行日	2018-01-12

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

鉄骨造HPシェルの生成および温度応答に関する検討

串　山　　繁*

Study on Generation and Thermal Response of HP Shell Steel Structures

Shigeru KUSHIYAMA*

要　旨

シェル構造物は，大空間を覆う魅力的な手段として用いられ，小規模な野外構造物から体育施設，倉庫等とその用途は広い．ここ最近，設計ツールの充実に伴い自由曲面形状を有する構造物の設計例が増えつつあるが，温度応答に関する公開資料は殆ど見当たらない．そこで，本報告では多雪地域を想定した積雪荷重下の鉄骨造HPシェルを例に，過酷な外気温の変動に曝された構造物の温度変化が部材応力・断面設計に及ぼす影響について検討した．

1　HPシェル（Hyperbolic Paraboloid Shell）の生成法

HPシェルは，斜めに交わる直線ジェネレータを平行移動して線織面と呼ばれる曲面を形成し，生成されている．**図1.1**(a)はHPシェルの基本要素を示したもので，図中の四辺形OABCのO，A，C点を同一レベルに固定し，B点を“上げ”または“下げ”て，対辺の等分割点を互いに連結することに拠り，容易に曲面を形成できることを示している．同図中の等分割点を結ぶ直線を直線ジェネレータと呼び，異なる２方向の直線ジェネレータの交わる角度は直角も含めて任意でよい．同図(b)のバタフライ型HPシェルは，左右の頂点を上げ，前後の頂点を下げたHPシェルの基本要素を４つ組み合わせたものである．後述するバタフライ型HPシェルの解析モデルは，右の上げ幅を左の1/2として生成したものである．

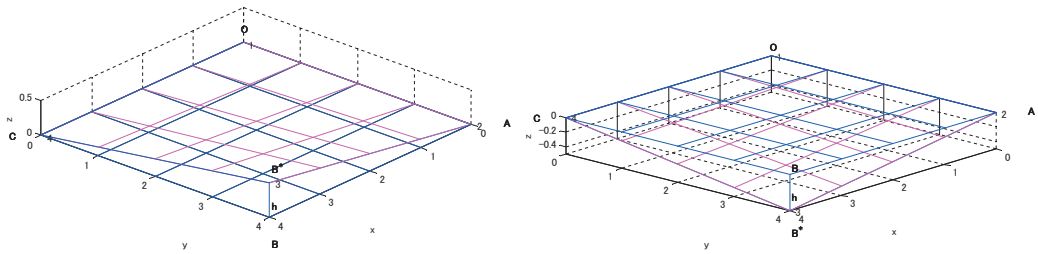
次に，鞍型HPシェルの生成法について説明する．双曲放物面方程式は次式で与えられる[1)]．

* 北海学園大学工学部建築学科
* Department of Architecture and Building Engineering, Hokkai–Gakuen University

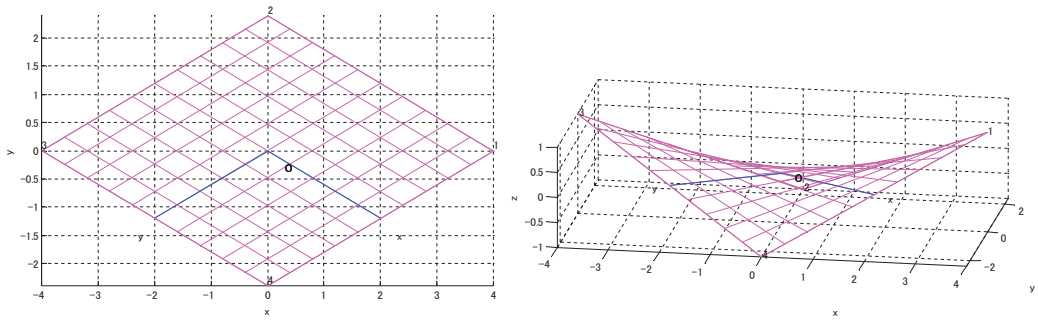
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2cZ \quad \text{ただし} \quad a>0,\ b>0,\ c>0 \tag{1.1}$$

一方，双曲線の漸近線である直線ジェネレータは，下式で与えられる．

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=\lambda,\ \frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=\frac{2cZ}{\lambda} \quad \text{または} \quad \frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=\mu,\ \frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=\frac{2cZ}{\mu} \tag{1.2}$$



(a) シェルの基本要素



(b) バタフライ型シェル

図1.1　HPシェルの基本要素およびバタフライ型シェルの生成

なお，ここで与えられた式の座標軸は，**図1.2**のE点を原点，Z軸正方向を下向きとした場合である．双曲放物面方程式は，３つのパラメータa，b，cを用いて表されているが，これらのパラメータは，建物の形状を定義する**図1.2**(b)のマゼンタ○印の座標値を代入して規定出来る．Felix Candelaのソチミルコ・レストランの建物寸法（ただし，参照作品集[2]平面図の読み取り寸法）を代入した具体的導出は，次の通りである．先ず，**図1.2**(b)のA～E点の座標値を夫々A点（$-x_w/2, -y_w/2, 0$），B点（$0, -y_w/2, Zt$），C点（$-x_w/2, y_w/2, 0$），D点（$0, y_w/2, Zt$），E点（$0, 0, u_0$）と置く．ただし，この座標値はプログラム内で扱い易い様に，座標軸はZ軸正方向を上向き，座標原点をE点からu_0下にあるとした場合である．(b) 図に示す様に，直線ジェネレータはE点とA，Bの中点およびE点とC，Dの中点を通る．その中点を夫々A’，C’と置き，A’，C’点を（1.1）式に代入したときの座標値を（X_1，Y_1，Z_1）と置き，B，D点を（1.1）式に代入したときの座標値を（X_2，Y_2，Z_2）と置く．更に$\tilde{a}=1/a^2$，$\tilde{b}=1/b^2$と置くと，

次の連立方程式が得られる．

$$X_1^2\tilde{a} - Y_1^2\tilde{b} = 2Z_1c \tag{1.3}$$

$$X_2^2\tilde{a} - Y_2^2\tilde{b} = 2Z_2c \tag{1.4}$$

上式から$\tilde{a}$について解くと，$\tilde{a}$はパラメータcの関数として次の様に表される．

$$\tilde{a} = \frac{1}{a^2} = 2c\frac{\left(Y_2^2Z_1 - Y_1^2Z_2\right)}{\left(X_1^2Y_2^2 - X_2^2Y_1^2\right)} \tag{1.5}$$

同様に$\tilde{b}$もパラメータcの関数として表される．

$$\tilde{b} = \frac{1}{b^2} = 2c\frac{\left(X_2^2Z_1 - X_1^2Z_2\right)}{\left(X_1^2Y_2^2 - X_2^2Y_1^2\right)} \tag{1.6}$$

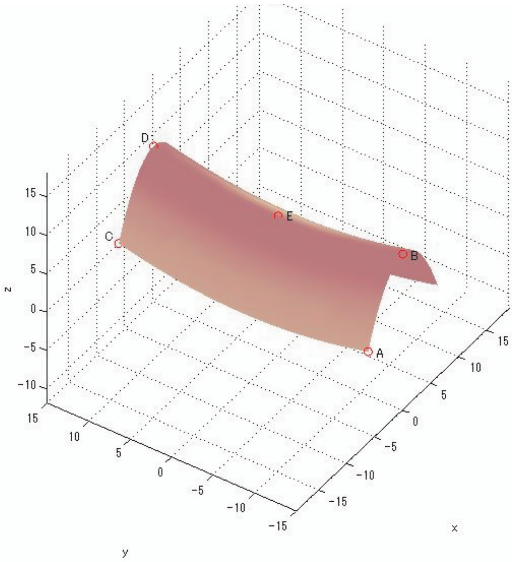
（1.5），（1.6）式より，$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\left(Y_2^2Z_1 - Y_1^2Z_2\right)}{\left(X_2^2Z_1 - X_1^2Z_2\right)}$

式を与えた際の座標軸の前提にしたがう様にZ座標値を考慮して，上式に具体的な寸法，即ち（X_1，Y_1，Z_1）＝（$-x_w/4, -y_w/2, 0$），（X_2，Y_2，Z_2）＝（$0, -y_w/2, u_0 - Zt$）を代入すると，

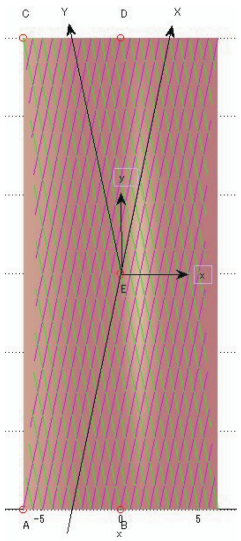
$$b/a = 2y_w/x_w = 2(30)/12.4264 = 4.82843$$

が得られる．本論ではa＝1，b＝4.82843とし，**図1.2**(b)の定点A～Eを通る様にパラメータcを逆算し，c＝2.30785とした．

図1.3に示すソチミルコ・レストランのワイヤーフレーム画像は，上記で得られたパラメータa，b，cを（1.1）式に代入して線織面を描き，z＜0の不要な直線部分を消去した単一鞍型シェルを生成後，それをπ/4ずつ回転し，隣接した鞍型シェルの接合部から下の不要な直線部分を削除して，最後に跳ね出し部を追加して得たものである．なお，図中の圧縮アーチを表す青色の放物線は参考のために示したもので，後述する解析では部材として考慮しておらず，骨組を構成する部材は，斜交する直線ジェネレータ，シェルの交差部境界線および跳ね出し先端の傾いた圧縮アーチである．



（a）斜め上からの俯瞰



（b）斜交直線ジェネレータ

X方向シェル幅：x_w＝12.4264（m）
Y方向シェル幅：y_w＝30（m），ただしカンチレバーの突出し寸法は除く．
シェル中央部高さ：u_0＝6.2727（m）
シェル端部中央点高さ：Zt＝8.3636（m）　（注）寸法は参照作品[2)]からの読み取り

図1.2　単一鞍型シェル

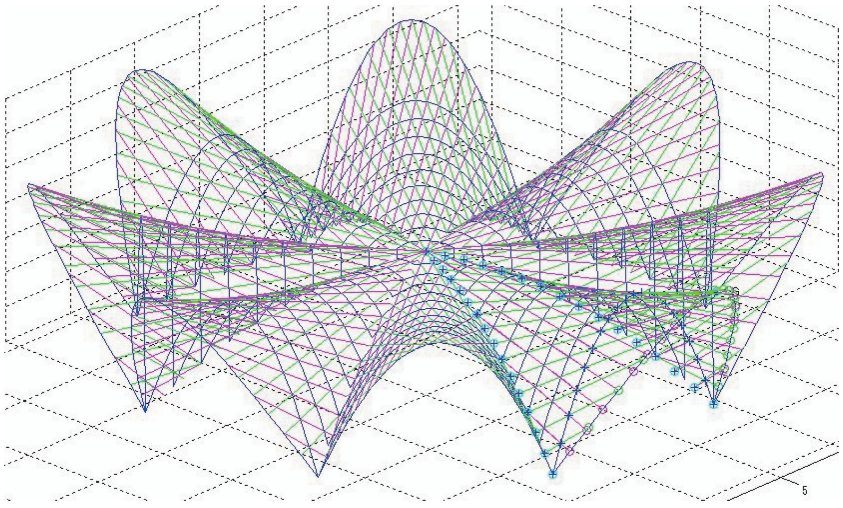


図1.3　ソチミルコ・レストラン（ワイヤーフレーム画像）

2　曲面構造解析の取扱い

直方体形状をした一般的な建物においては，部材断面を有効に使用する観点から柱および張間，桁行方向の梁断面の強軸，弱軸の向きは自ずと定まるが，曲面構造物を扱う際には様々な方向に向いた部材の強軸，弱軸平面を規定しなければならない．それ故，３次元解析法は２次元解析法の拡張にすぎないが，曲面構造物を解析する際には，首尾一貫した考えの下で弱軸平面を規定する取扱いが必要となる．以下に，座標変換マトリックスについて示した後，弱軸平面を規定する点（以下，W_P点と呼ぶ）の算定法を示す．

2.1　座標変換マトリックス

全体座標系表示および部材座標系表示の外力および変位ベクトルは，座標変換マトリックス[Γ]を介して，次の関係式で結ばれている．なお，全体座標系は大文字，部材座標系は小文字で表示している．

$$\text{外力ベクトル：}\{f\}=[\Gamma]\{F\},\quad \text{変位ベクトル：}\{\delta\}=[\Gamma]\{\Delta\} \tag{2.1}$$

ここに，$\{f\}=[f_{x1}\ \ f_{y1}\ \ f_{z1}\ \ m_{x1}\ \ m_{y1}\ \ m_{z1}\ \ f_{x2}\ \ f_{y2}\ \ f_{z2}\ \ m_{x2}\ \ m_{y2}\ \ m_{z2}]^T$

$\{\delta\}=[u_1\ \ v_1\ \ w_1\ \ \theta_{x1}\ \ \theta_{y1}\ \ \theta_{z1}\ \ u_2\ \ v_2\ \ w_2\ \ \theta_{x2}\ \ \theta_{y2}\ \ \theta_{z2}]^T$

[Γ]：全体座標系から部材座標系に変換する12×12の座標変換マトリックス

(2.1) 式を変形操作すると，全体座標系表示の要素剛性マトリックス[K]は，部材座標系表示の要素剛性マトリックス[k]と次の関係式で結ばれることが分かる．

$$[K]=[\Gamma]^{-1}[k][\Gamma]=[\Gamma]^T[k][\Gamma] \tag{2.2}$$

以下に，上記の座標変換マトリックス[Γ]が，３次元空間において如何に表されるのかについて要約する[3)]．

⑴ 部材軸と方向余弦

全体座標系を基準軸（X, Y, Z），部材座標系を部材軸（x_m, y_m, z_m）で表示すると，与えられた梁要素に対して部材軸x_mの方向は，次式で定義される方向余弦C_x，C_yおよびC_zによって決定することができる．

$$C_x=\cos r_x,\quad C_y=\cos r_y\quad \text{および}\quad C_z=\cos r_z \tag{2.3}$$

ただし，r_x：x_m軸とX軸が挟む角，r_y：x_m軸とY軸が挟む角，r_z：x_m軸とZ軸が挟む角

梁要素のj端およびk端の座標値が基準軸（X，Y，Z）に関して既知であると，上記の方向余弦は次の様に記述できる．

$$C_x=\frac{X_k-X_j}{L_i},\quad C_y=\frac{Y_k-Y_j}{L_i},\quad C_z=\frac{Z_k-Z_j}{L_i} \tag{2.4}$$

ただし，

$L_i=\sqrt{(X_k-X_j)^2+(Y_k-Y_j)^2+(Z_k-Z_j)^2}$

(X_j,Y_j,Z_j)，(X_k,Y_k,Z_k)：夫々全体座標系で表示された梁要素のj端，k端座標値

一方，全体座標系表示のベクトルを$[\overline{V}]$，部材座標系表示のベクトルを$[V]$で表したとき，座標変換マトリックス$[C^S]$を介して，

$$[V]=[C^S][\overline{V}] \tag{2.5}$$

即ち，
$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{V}_1\\\overline{V}_2\\\overline{V}_3\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

ただし，$C_{ij}=\cos r_{ij}$：方向余弦

と表示できる．

⑵ Y-Z-X変換とZ-Y-X変換

３次元空間においては，３つの変換手順を経て全体座標系表示から部材座標系表示への最終的な変換式，即ち（2.5）式を得る．この変換には，どの軸回りからの変換を先に施すかによって，Y–Z–X変換とZ–Y–X変換の２通りある．

⑻Y-Z-X変換

Y–Z–X変換は，最初にY軸回りの回転変換を行う．具体的には，基準軸Yを回転軸としてX軸が部材軸x_mのX–Y平面に対する水平投影に一致する様，角α回転させる．（2.6）の表記に倣うと，この変換は次式となる．

$$\begin{bmatrix}V_{\alpha x}\\V_{\alpha y}\\V_{\alpha z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{V}_x\\\overline{V}_y\\\overline{V}_z\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}$

したがって，
$$\begin{bmatrix}V_{\alpha x}\\V_{\alpha y}\\V_{\alpha z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}&0&\dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\\0&1&0\\-\dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}&0&\dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{V}_x\\\overline{V}_y\\\overline{V}_z\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

または$[V_\alpha]=[C_\alpha^S][\overline{V}]$ (2.9)

と表せる．

次に，Z_α軸回りの回転変換を行う．これは，Z_α軸を回転軸としてX_α軸が部材軸x_mに一致す

る様，角β回転させる操作である．先と同様（2.6）の表記に倣うと，次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} V_{\beta x} \\ V_{\beta y} \\ V_{\beta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{\alpha x} \\ V_{\alpha y} \\ V_{\alpha z} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

または，$[V_\beta] = \left[C_\beta^S\right][V_\alpha]$　(2.11)

最後にX_β軸（$=x_m$軸）回りの回転変換を行う．これは，X_β軸を回転軸としてY_β軸が部材軸y_mに，またZ_β軸が部材軸z_mに一致する様，ϕ_y角回転する次式の操作である．

$$[V] = \left[C_{\phi y}^S\right][V_\beta] \tag{2.12}$$

以上（2.9），(2.11)，(2.12）をまとめると，次式となる．

$$[V] = \left[C_{\phi y}^S\right]\left[C_\beta^S\right][C_\alpha^S][\overline{V}] = \left[C_Y^S\right][\overline{V}] \tag{2.13}$$

上式によって示されるマトリックス演算を実行して，基準軸とY–Z–X変換によって与えられた部材軸とを関連付ける回転マトリックスは，結果として次の様に定義される．

$$\left[C_Y^S\right] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_x C_y \cos\phi_y - C_z \sin\phi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2}\cos\phi_y & \dfrac{-C_y C_z \cos\phi_y + C_x \sin\phi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \dfrac{C_x C_y \sin\phi_y - C_z \cos\phi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2}\sin\phi_y & \dfrac{C_y C_z \sin\phi_y + C_x \cos\phi_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

(b)Z-Y-X変換

最後に得られる（2.14）相当式のみを表示すると，次式となる．

$$\left[C_Z^S\right] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_x C_z \sin\phi_z - C_y \cos\phi_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \dfrac{-C_y C_z \sin\phi_z + C_x \cos\phi_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2}\sin\phi_z \\ \dfrac{-C_x C_z \cos\phi_z + C_y \sin\phi_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \dfrac{-C_y C_z \cos\phi_z - C_x \sin\phi_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2}\cos\phi_z \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

式（2.14），(2.15）における方向余弦は式（2.4）で与えられるが，ϕ_y角とϕ_z角はまだ示されていない．３次元空間における３つの方向余弦は，基準軸に関する部材軸の位置を定義する．しかし，部材を材軸回りに回転して断面の向き，言い換えると弱軸平面（y_m-x_m平面）を設計者が意図する向きに一致させるためには，追加情報としてϕ_y角或いはϕ_z角が必要となる．

(3) ϕ_y角およびϕ_z角

X–Y–Z基準軸に関するy_m-x_m平面の方向は，基準軸に関してy_m-x_m平面内にはあるが，x_m軸線上にない点（W_P点）と部材軸x_mの位置とを知ることによって決定できる．W_P点を基準軸に関する位置ベクトル$\overline{X}_p$，$\overline{Y}_p$，$\overline{Z}_p$で表わし，それをY–Z–X変換によってX_β，Y_β，Z_β座標系における位置ベクトルに，或いはZ–Y–X変換によってX_λ，Y_λ，Z_λ座標系における位置ベクトル

に分解することができる．Y–Z–X変換に対してβ座標系における位置ベクトルは，式（2.8）および式（2.10）に拠り，次の様に表せる．

$$\begin{bmatrix} X_{\beta p} \\ Y_{\beta p} \\ Z_{\beta p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2+C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2+C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-C_z}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_p \\ \overline{Y}_p \\ \overline{Z}_p \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

位置ベクトル$Y_{\beta p}$および$Z_{\beta p}$は，y_m - z_m平面における点pの位置を定めるものである．それ故，Y–Z–X変換に対してϕ_y角は次式によって定義される．

$$sin\,\phi_y = \frac{Z_{\beta p}}{\sqrt{Y_{\beta p}^2+Z_{\beta p}^2}},\quad cos\,\phi_y = \frac{Y_{\beta p}}{\sqrt{Y_{\beta p}^2+Z_{\beta p}^2}} \tag{2.17}$$

同様に，Z–Y–X変換に対するϕ_z角は，次式によって定義される．

$$sin\,\phi_z = \frac{Z_{xp}}{\sqrt{Y_{\lambda p}^2+Z_{\lambda p}^2}},\quad cos\,\phi_z = \frac{Y_{\lambda p}}{\sqrt{Y_{\lambda p}^2+Z_{\lambda p}^2}} \tag{2.18}$$

以上，式（2.17），（2.18）を式（2.14），（2.15）に代入すると，座標変換マトリックスの要素全てが確定したことになる．ただし，式（2.14），（2.15）で表示された座標変換マトリックスは，３×３のサイズであり，ひとつの節点の併進成分（回転成分も同様）に関するものである．以上を踏まえ，３×３のサイズを12×12のサイズに拡張した次の座標変換マトリックスが，（2.1）式の［Γ］に一致する．

変位ベクトル：
$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \\ \theta_{zk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \\ \Theta_{xj} \\ \Theta_{yj} \\ \Theta_{zj} \\ U_k \\ V_k \\ W_k \\ \Theta_{xk} \\ \Theta_{yk} \\ \Theta_{zk} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

ただし，上式の３×３部分マトリックスは，式（2.14）或いは（2.15）を意味する．

2.2　弱軸平面を規定するW$_P$点の算定法

W$_P$点は，前節で述べたY–Z–X或いはZ–Y–X変換の最後の変換，即ち部材軸x_m回りの回転角ϕ_yおよびϕ_zの規定において必要となる座標値データである．W$_P$点は部材の弱軸平面に存在す

る部材軸線上に存在しない点であればよい．W_P点のシステマティックな算定法については，バタフライ型HPシェルと鞍型HPシェルに分けて以下の様に考えた．

⑴ バタフライ型HPシェル

図２－１（a）に示す様に，W_P点を算定する部材ABを$\vec{V}$と置き，部材ABの端点で斜交する左右或いは上下の部材ベクトルを$\overrightarrow{RV}$，$\overrightarrow{LV}$（または$\overrightarrow{FV}$，$\overrightarrow{BV}$）と置く．また，部材ABの中点M_Pを通る$\overrightarrow{RV}$，$\overrightarrow{LV}$を平均したベクトルを$\overrightarrow{TV}$と置く．このとき$\vec{V}$と$\overrightarrow{TV}$でつくられる平面は中点M_Pにおける接平面であると見做し，接平面と部材の強軸平面が平行する様に部材の向きを決定すると仮定する．この考えに従うと，$\vec{V}$と$\overrightarrow{TV}$の外積は，$\vec{V}$と$\overrightarrow{TV}$でつくられる平面，即ち接平面に垂直な方向ベクトルの成分を表し，次式で与えられる．

$$a = V(2)\cdot TV(3)-V(3)\cdot TV(2),\ b = V(3)\cdot TV(1)-V(1)\cdot TV(3),\ c = V(1)\cdot TV(2)-V(2)\cdot TV(1)$$

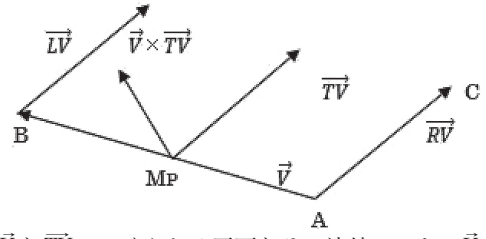
また，中点$M_P(x_m, y_m, z_m)$を通り，方向ベクトル(a, b, c)を有する直線ベクトルは次式で与えられる．

$$(x, y, z) = (x_m, y_m, z_m) + t\cdot(a, b, c) \qquad (2.20)$$

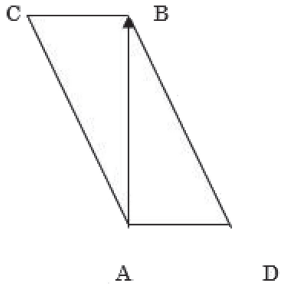
上式のtに適当な値を付与すれば，W_P点の座標値が得られる．**図２－２**は，弱軸平面が部材軸を含むHPシェル表面に対する接平面の法線方向であると仮定して得られたW_P点を○マーカーで表示した例である．

⑵ 鞍型HPシェル

ソチミルコ・レストランにおいては，**図２－１**（b）に示す様に部材ABに対して両側（庇跳ね出し先端を繋ぐ圧縮アーチのみ片側）に隣接平面が存在するので，両サイドの３点A，B，Cを通る平面および３点A，B，Dを通る平面の法線ベクトルを求め，その平均ベクトルを部材ABの中点を通る弱軸平面を規定する方向ベクトルと見做すと，上記と同様に直線ベクトルが得られる．なお，３点A，B，Cを通る平面の法線ベクトルは，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$或いは$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CB}$を組み合わせた２つのベクトルの外積として得られる．



(a) $\vec{V}$と$\overrightarrow{TV}$でつくられる平面とその法線ベクトル$\vec{V}\times\overrightarrow{TV}$



(b) ベクトルABに隣接する平面

図２－１　W_P点算定補助図

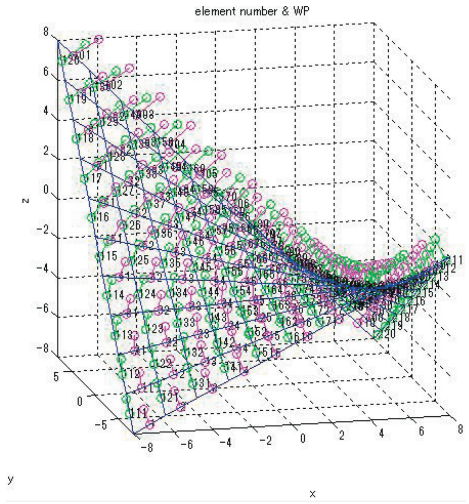


図 2－2　W_P点（弱軸平面参照点）

3　温度応答解析

3.1　解析方針・解析仮定

本報告は鉛直荷重を受ける弾性解析結果について示したものであり，地震時，風荷重時については検討していない．この前提の下，次の手順で応力解析，断面設計を行った．

解析手順

STEP 1 ：冬季常時荷重（部材自重＋屋根自重＋積雪荷重）時応力解析→自動断面設計

STEP 2 ：冬季温度荷重時応力解析（入力部材データ：STEP 1 の断面設計終了時部材）

STEP 3 ：合成荷重時（STEP 1 ＋STEP 2 ）応力解析→自動断面設計

注）夏季も冬季同様STEP 1 ～STEP 3 の手順とする．

夏季について検討したのは，温度荷重を考慮した場合にいずれの季節がより厳しいのかを確認する為である．

解析は鉄骨造を対象としており，使用部材は**表3. 1**に示すSTKN 490Bの鋼管とした．プログラムは強軸，弱軸の断面２次モーメントが異なる矩形断面部材も扱えるが，ここではそれらの値が相等しい鋼管を用いた．STEP 1 の解析スタート時入力部材データは，バタフライ型HPシェルにおいては全て表中のNo. 5，鞍型シェルにおいては全てNo. 2 とした．得られた部材応力に対して，組み合わせ応力≦許容応力度を各部材が満たすまで，部材断面を更新しながら繰り返し計算を行った．具体的には，引張強度490（N/mm^2）を用いた際の基準値をF＝325（N/mm^2），ただしt≦40mm，鋼管の長期各許容応力度を次の通りとし，下記に示す組み合わせ応力判定式を用いて断面設計を行った．ただし，本論においては後述する様に積雪荷重を大胆に仮定したので，上記基準値Fに低減係数0.85を乗じた値を応力判定のF値とした．

許容曲げ応力度f_b = F/1.5，許容引張応力度$f_t = f_b$，許容せん断応力度$f_s = f_b/\sqrt{3}$

許容圧縮応力度f_c：$\lambda \le \Lambda$のとき，$f_c = \dfrac{\left\{1-0.4\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2\right\}F}{\upsilon}$，$\lambda > \Lambda$のとき，$f_c = \dfrac{0.277F}{\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2}$　(3.1)

ただし，$\Lambda = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{0.6F}}$：限界細長比，$\lambda$：圧縮材の細長比，E：ヤング係数，$\upsilon = \dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$

許容応力度の設計式としては，x，y軸回りの曲げモーメントM_x，M_yに圧縮軸力或いは引張軸力Nを組み合わせた以下の判定式を用いた．

表3.1　建築構造用炭素鋼鋼管（STKN）490B

No.	寸法 mm		断面積 cm^2	単位質量 kg/m	断面2次モーメント cm^4	断面2次半径 cm	断面係数 cm^3
	D	t			I	i	Z
1	114.3	6	20.41	16	300	3.83	52.5
2	165.2	5	25.16	19.8	808	5.67	97.8
3		6	30.01	23.6	952	5.63	115
4		7.1	35.26	27.7	1100	5.6	134
5	216.3	5.8	38.36	30.1	2130	7.45	197
6		8.2	53.61	42.1	2910	7.36	269
7		10	64.81	50.9	3460	7.3	320
8		12	77.02	60.5	4030	7.24	373
9		12.7	81.23	63.8	4230	7.21	391
10	267.4	6.6	54.08	42.4	4600	9.22	344
11		9.3	75.41	59.2	6290	9.13	470
12		12.7	101.6	79.8	8260	9.02	618
13	318.5	6.9	67.55	53	8200	11	515
14		7.9	77.09	60.5	9300	11	584
15		10.3	99.73	78.3	11900	10.9	744
16		12.7	122	95.8	14300	10.8	897
17	355.6	9.5	103.3	81.1	15500	12.2	871
18		11.1	120.1	94.3	17800	12.2	1000
19		12.7	136.8	107	20100	12.1	1130
20		16	170.7	134	24700	12	1390
21		19	200.9	158	28500	11.9	1610
22	406.4	9.5	118.5	93	23300	14	1150
23		12.7	157.1	123	30500	13.9	1500
24		16	196.2	154	37400	13.8	1840
25		19	231.2	182	43500	13.7	2140
26	450	19	257.3	202	59900	15.3	2660
27	457.2	12.7	177.3	139	43800	15.7	1920
28		16	221.8	174	54000	15.6	2360
29		19	261.6	205	62900	15.5	2750
30	500	19	287.1	225	83200	17	3330
31		22	330.4	259	94600	16.9	3780

注）鉄骨建設業協会，全国鐵構工業協会，「建築構造用鋼材便覧」，平成29年１月から抜粋

$N<0$ のとき，$\frac{\sigma_c}{f_c}+\frac{c\sigma_{bx}}{f_{bx}}+\frac{c\sigma_{by}}{f_{by}}\leq 1$　且つ　$\frac{t\sigma_{bx}+t\sigma_{by}-\sigma_c}{f_t}\leq 1$　(3.2)

$N>0$ のとき，$\frac{\sigma_t+t\sigma_{bx}+t\sigma_{by}}{f_t}\leq 1$　且つ　$\frac{c\sigma_{bx}}{f_{bx}}+\frac{c\sigma_{by}}{f_{by}}-\frac{\sigma_t}{f_b}\leq 1$　(3.3)

ただし，$t\sigma_{bx}$，$c\sigma_{bx}$：x軸回りの曲げによって生ずる引張側，圧縮側応力度

$t\sigma_{by}$，$c\sigma_{by}$：y軸回りの曲げによって生ずる引張側，圧縮側応力度

f_{bx}，f_{by}：x，y軸回りの許容曲げ応力度

上記判定式を満足するまで繰り返し計算を行った．なお，鉄骨のヤング係数はE＝205(kN/mm^2)，せん断弾性係数はG＝79(kN/mm^2)，温度荷重時解析の鉄骨の熱膨張係数は$\alpha=12\times10^{-6}$(1/℃)と仮定した．骨組の部材自重は部材ランクに応じた単位長さ当たりの重量×部材長を両端節点に1/2ずつ振り分けた．また，屋根荷重については総屋根荷重（＝屋根の水平投影面積×1.0(kN/m^2)）を後述するバタフライ型HPシェル：総屋根重量256(kN)，鞍型HPシェル（ソチミルコのレストラン）：対称性を考慮した解析モデル1/4に対して287.311(kN)と仮定し，それを骨組の部材自重の節点力比で按分して鉛直下向きに作用させた．その他の解析仮定としては，部材の接合条件は全て剛－剛，簡単のために部材接合部金物を考慮しなかった．なお，境界条件については解析結果の節にて説明する．

3.2　積雪および温度荷重

⑴ 積雪荷重

積雪は札幌市を想定し，積雪深１(m)，比重0.3,即ち積雪荷重Sw＝３(kN/m^2)を仮定した．曲面形状を有する屋根上積雪深については，「建築物荷重指針を活かす設計資料集１」[4]においても参考例を述べるに留まり，具体的な規定および風洞実験例は見当たらない．そこで，解析例のシェル形状はいずれも相当程度の屋根勾配を有し，屋根仕上げ材が摩擦抵抗の少ない材料で施工されているとの前提で，構造物高さ最頂部での積雪荷重を0.1Sw，脚部での低減無しとして1.0Sw，中間の高さは各節点支配面積の図心高さに応じて0.1Sw～1.0Swの範囲内で線形内挿補間した．ただし，バタフライ型HPシェルは屋根面の曲率が小さいので，上記内挿補間値に支配面積の辺長比を1.25倍（即ち面積比$1.25^2=1.5625$倍）した割増係数を更に乗じた値とした．

⑵ 温度荷重

建物は過酷な外気温や日射の影響を受けて，季節的な温度伸縮に日間の温度伸縮が重なり日々の温度伸縮が繰り返されている．通常，部材の有効温度として夏季においては，季節的な温度変動＋日間の温度変動＋日射の影響，冬季においては季節的な温度変動＋日間の温度変動，を考慮する取扱いを行う．

本報告の温度応答計算時の年間温度変動幅は札幌市を想定し，100年再現期待値60.1(℃)[4]に日射の影響を考慮した変動幅を加えて相当外気温を70℃と仮定する．一方，温度伸縮が生じない基準点は温度変動幅70℃の中心にあるとし，温度変化をT＝±35℃と仮定した．鉄骨のヤング係数をE，熱膨張係数をα，部材断面積をAと置くと，温度変化に拠る部材座標系表示の等価節点力は，次式で表される．

$$\{f_e\}=[f_{x1}\ \ f_{y1}\ \ f_{z1}\ \ m_{x1}\ \ m_{y1}\ \ m_{z1}\ \ f_{x2}\ \ f_{y2}\ \ f_{z2}\ \ m_{x2}\ \ m_{y2}\ \ m_{z2}]^T$$
$$=\mathrm{EA}\alpha\mathrm{T}[-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T \qquad (3.4)$$

ここで，座標変換マトリックスを[Γ]と置くと，$\{f_e\}=[\Gamma]\{F_E\}$であるから，全体座標系表示の等価節点力は，次式で表せる．$\{F_E\}=[\Gamma]^T\{f_e\}$ (3.5)

4　解析結果および考察

4.1　バタフライ型HPシェル

(1) 3点ピン支持冬季時解析結果

ここでは，解析手順STEP 1 ～STEP 3 の結果について検討する．**図4.1**は，節点番号，部材番号の付番で，部材接合部右下に節点番号を，部材中点近傍に部材番号を表示している．なお，図中マゼンタの○印を付した節点1，11，121は外的にはピン支持と仮定した．

先ず，STEP 1 の冬季常時荷重（＝部材自重＋屋根自重＋積雪荷重）時の解析結果を示す．

図4.2は節点変位図で，Z座標値－8 (m)の手前側が節点1，奥側が節点121，Z座標値 0 (m)の右端が節点11に対応し，ピン支持されている．青線が変形前，赤線が変形後の変位を表す．

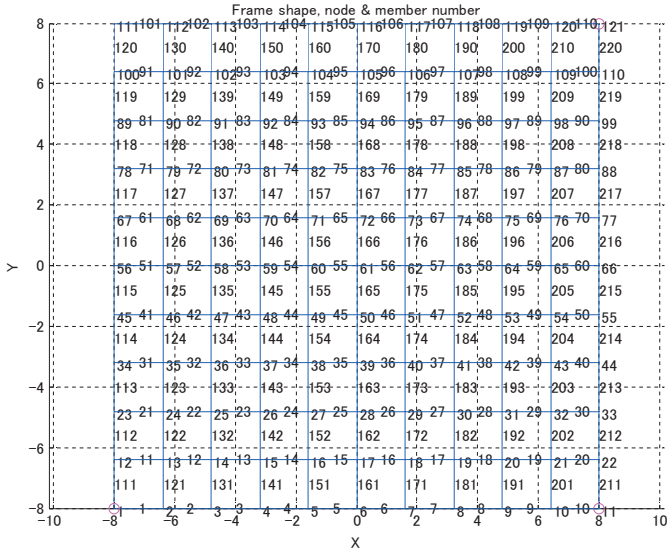
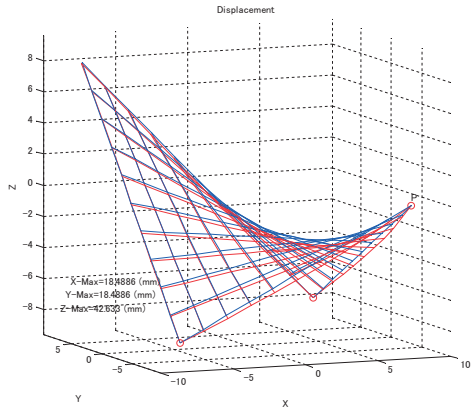
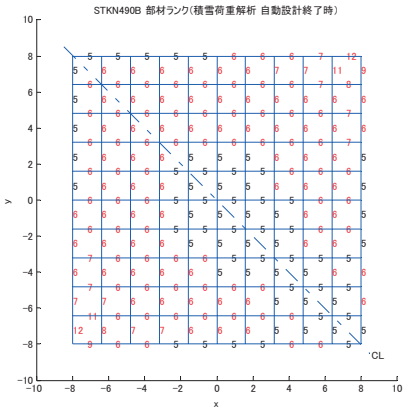


図4.1　節点番号，部材番号（真上からの俯瞰）



（最大鉛直下向き変位発生節点111）
図4. 2　積雪荷重時節点変位図



注）部材ランクは**表3. 1**の左端列のNo. に対応
図4. 3　STEP 1 断面設計終了時部材ランク

図中左下に示した数値は各方向の最大絶対変位である．Z（鉛直）方向の最大値は41節点（**図4. 3**に示す対称軸上シェル中央部）で発生している．**図4. 3**は，STEP 1 の断面設計終了時の部材ランク（**表3. 1**のNo. 欄）を示したもので，赤字は解析スタート時の一律の部材ランク 5 からランクアップした部材である．

次に，冬季温度変化をT＝－35℃と仮定したSTEP 2 の解析結果を示す．なお，この際の部材入力データは**図4. 3**に示したSTEP 1 断面設計終了時の部材とした．**図4. 4**は，節点変位図を示したもので，先の**図4. 2**とは異なり骨組左端頂部の節点111付近で逆方向の鉛直上向きに変位し，骨組中央部では先と同様下向きに変位している．頂部付近で上向きに変位したのは，中央部が冷えて部材が縮んだ反動としての反り返しが現れたものと推察される．一方，**図4. 5**は，真上から俯瞰した冬季常時荷重時と温度荷重時の合成荷重の解析スタート時合成鉛直変位を示している．同図から合成鉛直変位は，骨組中央部で凹み，左端頂部で逆に上向きに変位していることが分かる．一方，**図4. 6**～**4. 8**は合成荷重の解析スタート時における主要な部材応力（軸力，部材座標系表示のz軸，y軸回りモーメント）を示し，左図は冬季常時荷重時（即ち，積雪荷重時）応力，右図は温度荷重時の応力である．これら 3 つの図より，温度荷重時には材軸方向の熱伸縮によって生ずる軸力が支配的で，温度荷重時の軸力は積雪荷重の約82％であることが分かる．

次に，これらの積雪荷重時応力と温度荷重時応力を重ね合わせた最終結果について述べる．冬季は温度荷重を考慮することに拠りリスクが高まり，応力解析と断面設計が繰返し実行される．**図4. 9**は節点変位図，**図4. 10**～**4. 12**は主要な応力，**図4. 13**は最終的に得られた部材ランクを示したものである．**図4. 13**において赤字の部材は，**図4. 3**に示したSTEP 1 終了時からランクアップされた部材を示し，それらは両端ピンの境界梁近傍にある．同図から設計において温度応力を無視できないことが分かる．

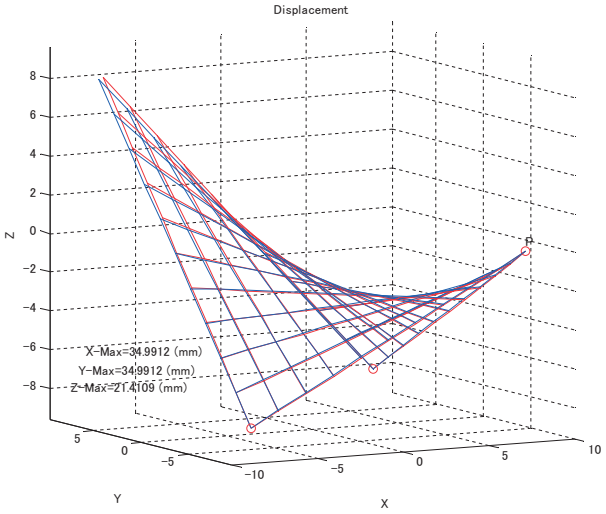


図4. 4　温度荷重時（T＝－35℃）節点変位図

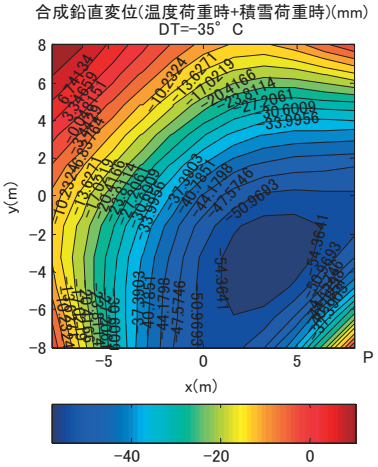


図4. 5　冬季合成荷重時の鉛直変位

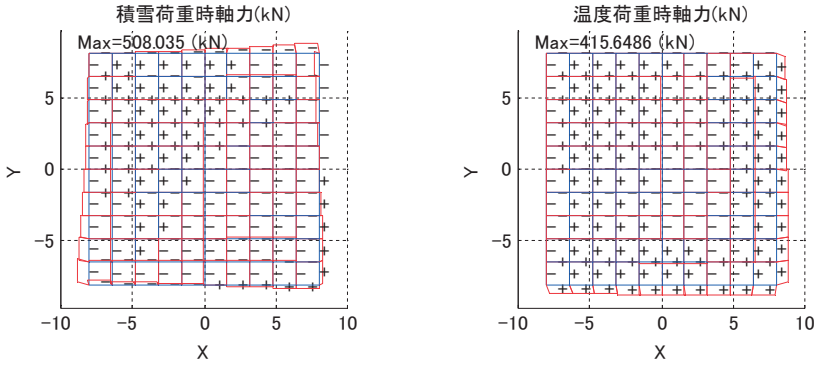


図4. 6　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）軸力

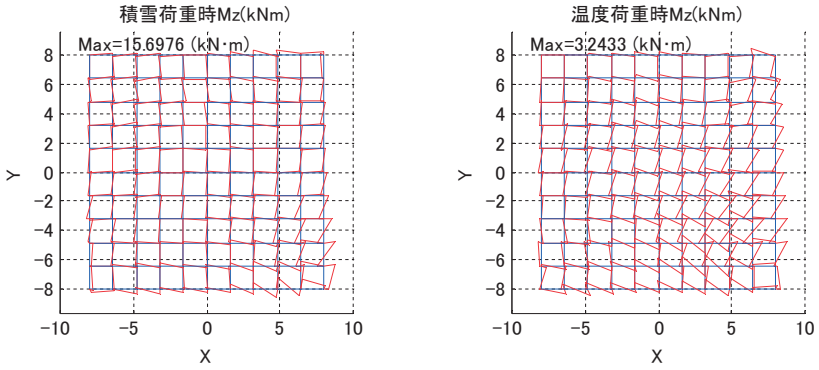


図4. 7　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）Mz

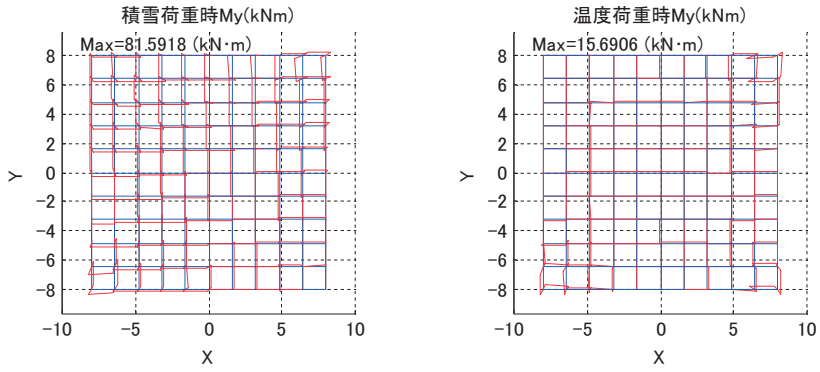
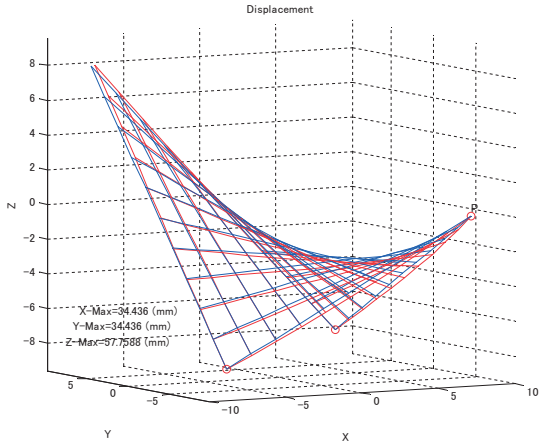
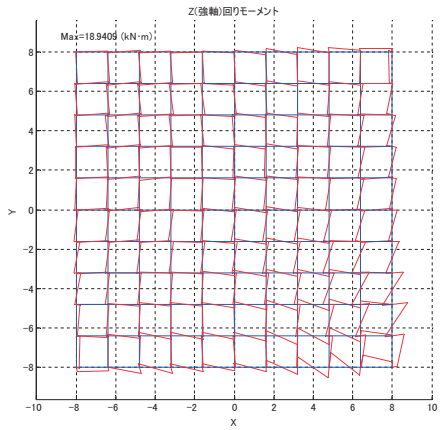


図4. 8　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）My



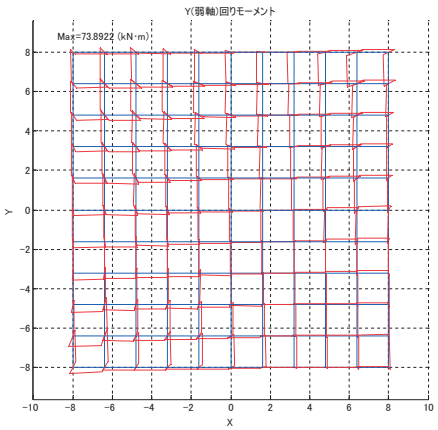
（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 9　合成荷重時節点変位



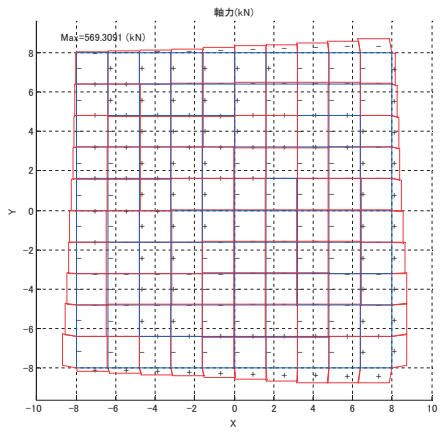
（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 10　合成荷重時Mz



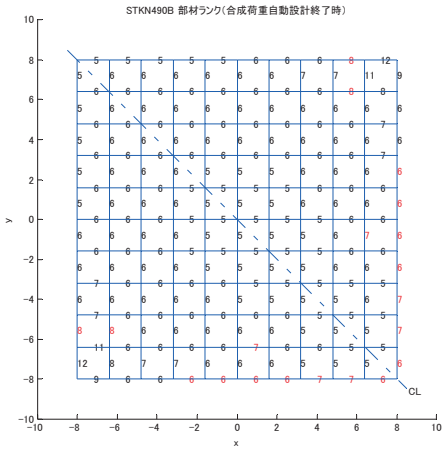
（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 11　合成荷重時My



（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 12　合成荷重時軸力



（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 13　合成荷重時部材ランク

⑵ 3 点ピン支持夏季時解析結果

夏季の解析結果について，以下に述べる．**図4. 14**～**4. 16**は，主要な部材応力を示し，左図は夏季常時荷重時，右図は温度荷重時の応力である．なお，温度荷重時応力は冬季と符号が反対で絶対値が等しい．**図4. 14**の右図より，部材が伸びることにより両端点が拘束されている境界梁の部材軸力が期待通り圧縮になっていることが分かる．また，夏季合成荷重時においては，**図4. 17**から骨組左端頂点の鉛直変位が温度荷重の影響で夏季常時荷重時の変位よりも更に下がること，**図4. 18**から軸力の最大絶対値が**図4. 12**に示した冬季合成荷重時の約81％に低下することが分かる．この影響もあり，夏季合成荷重時の断面設計終了時の部材ランクは，計算開始時のそれ（即ち**図4. 3**）と変わらなかった．これより，積雪寒冷地においては冬季の方が夏季よりも厳しいと云える．

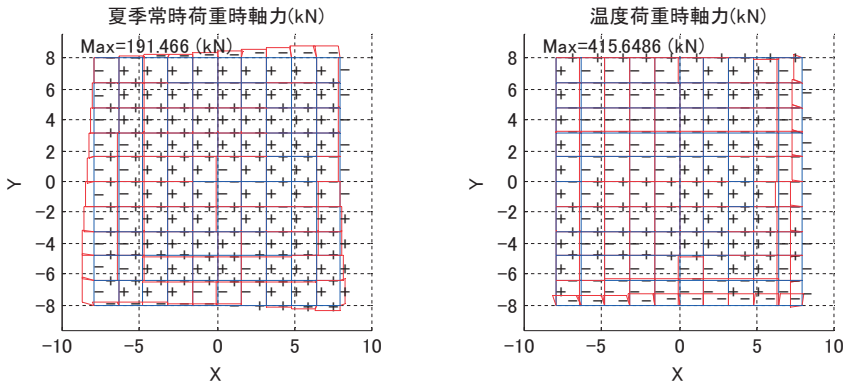


図4. 14　夏季常時荷重時（左），温度荷重時（右）軸力

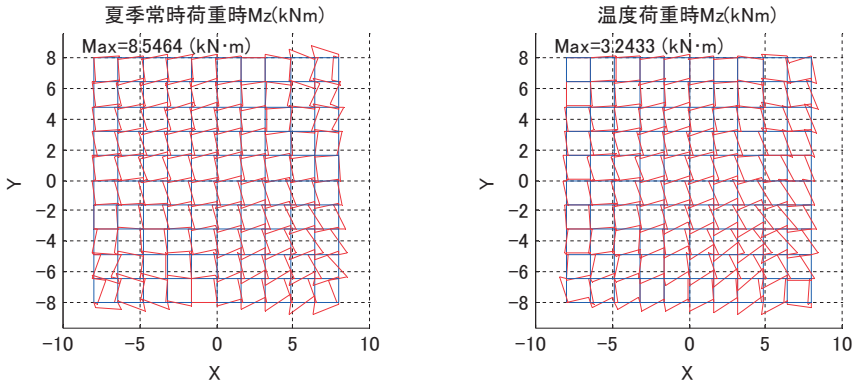


図4. 15　夏季常時荷重時（左），温度荷重時（右）Mz

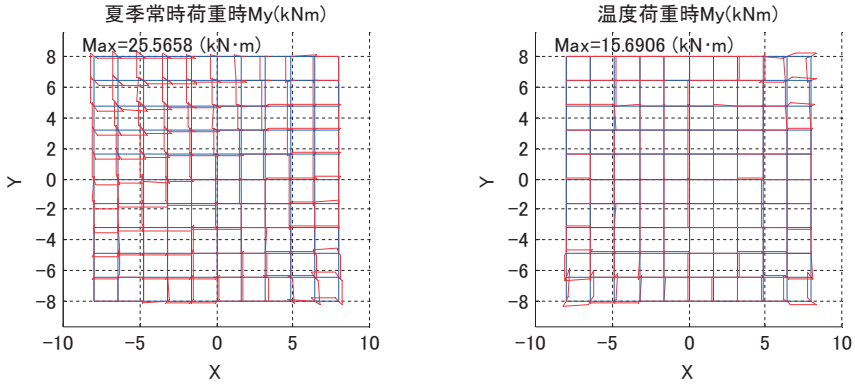


図4. 16　夏季常時荷重時（左），温度荷重時（右）My

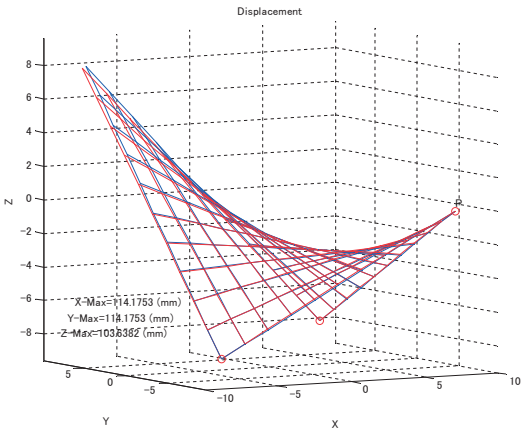


図4. 17　夏季合成荷重時変位

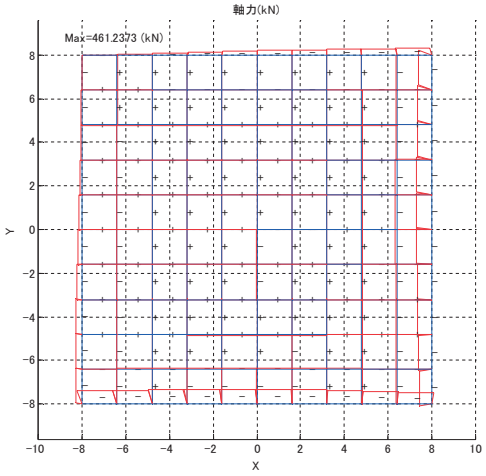
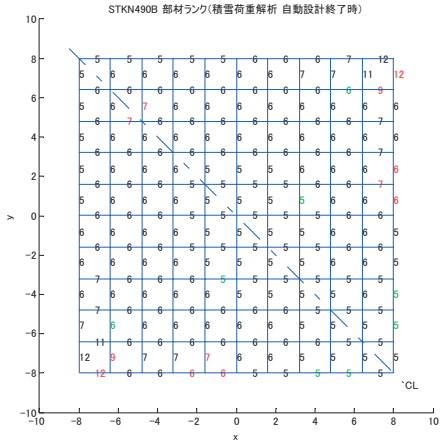


図4. 18　夏季合成荷重時軸力

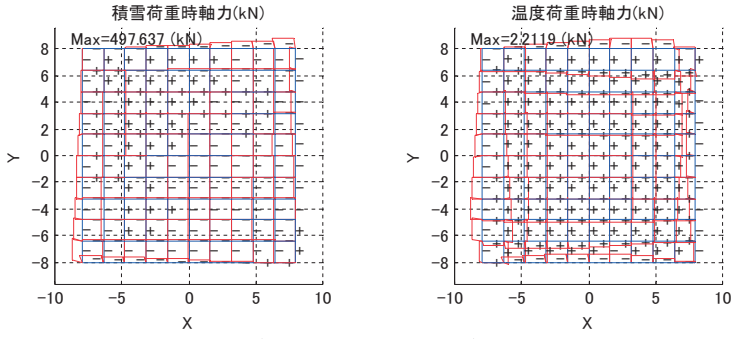
⑶ 2点ピン，1点ローラー支持冬季時解析結果

図4. 1における節点11（**図4. 2**のP点）の境界条件をピンからZ方向の併進変位のみを拘束したローラーに変更した場合（**図4. 3**の対称軸CL参照）について検討する．これは，対称軸方向ローラーとしての取扱いに伴うX–Y平面拘束力の低下が，温度荷重時応力におよぼす影響を調べるために行った．**図4. 19**は，STEP 1 の冬季常時荷重の断面設計終了時部材ランクを示したもので，**図4. 3**の節点11がピンの部材ランクに対して赤字がランクアップ，緑字が逆にランクダウンした部材を示している．右下隅節点11の近傍で部材ランクが低下しているが，逆に左下隅節点 1 および右上隅節点121の近傍では部材ランクが増大している．一方，**図4. 20**～**4. 22**に示す合成荷重解析スタート時の部材応力は，**図4. 6**～**4. 8**と比較して積雪荷重時にはそれ程差が見られないが，温度荷重時には例えば軸力は 1 %未満と大きく低減している．**図4. 23**は，合成荷重時の最終的な部材ランクを示したもので，**図4. 3**のSTEP 1 終了時と比較して赤字がランクアップ，緑字が逆にランクダウンした部材を示している．以上，支点の 1 つをピンからロー



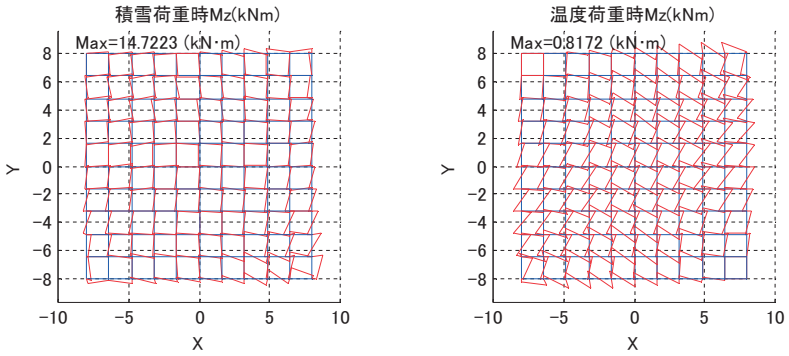
（11節点斜めローラー支点）

図4. 19　STEP 1 断面設計終了時部材ランク



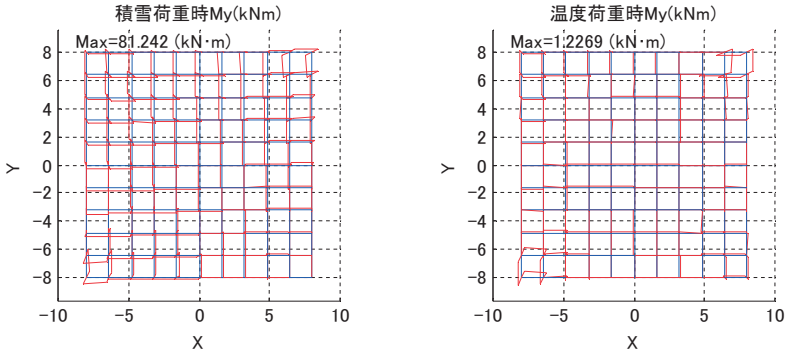
（11節点斜めローラー支点）

図4. 20　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）軸力



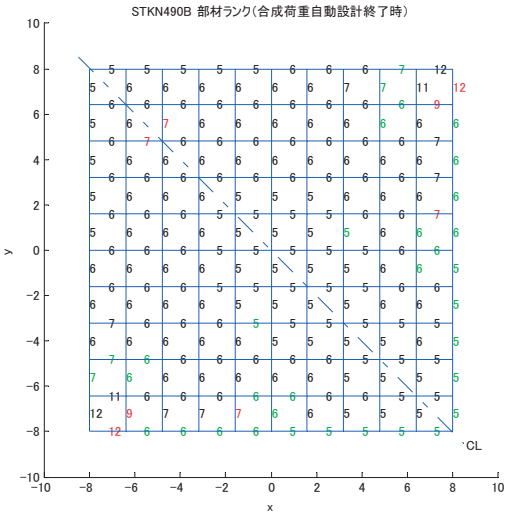
（11節点斜めローラー支点）

図4. 21　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）Mz



（11節点斜めローラー支点）

図4. 22　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）My



（11節点斜めローラー支点）

図4. 23　合成荷重時部材ランク

ラーにした場合の方が温度荷重の影響が小さくなり，部材ランクが下がるものが相対的に多いが，ランクアップする部材もあることには留意すべきである．

4. 2　鞍型HPシェル（ソチミルコのレストラン）

冬季時解析結果

前節と同様にSTEP 1 ～STEP 3 の結果について検討する．ただし，鉛直荷重時解析の対称性を考慮し，本報告では解析モデルの1/4について示す．**図4. 24**の節点番号，部材番号付番は，番号表示が重なり判読が困難であるので，ここでは同図に示した境界条件に着目して説明する．同図中のシェル接合部境界梁脚部のマゼンタ○印は完全固定（19, 146節点），骨組中心の青色○印（左上隅節点）はZ方向併進変位を除く全ての自由度を拘束，X＝ 0 の縦方向対称軸上の青色○印はX方向併進変位およびY,Z軸回り回転角の拘束，Y＝ 0 の水平方向対称軸上の緑色○印はY方向併進変位およびX，Z軸回り回転角の拘束，を仮定している．

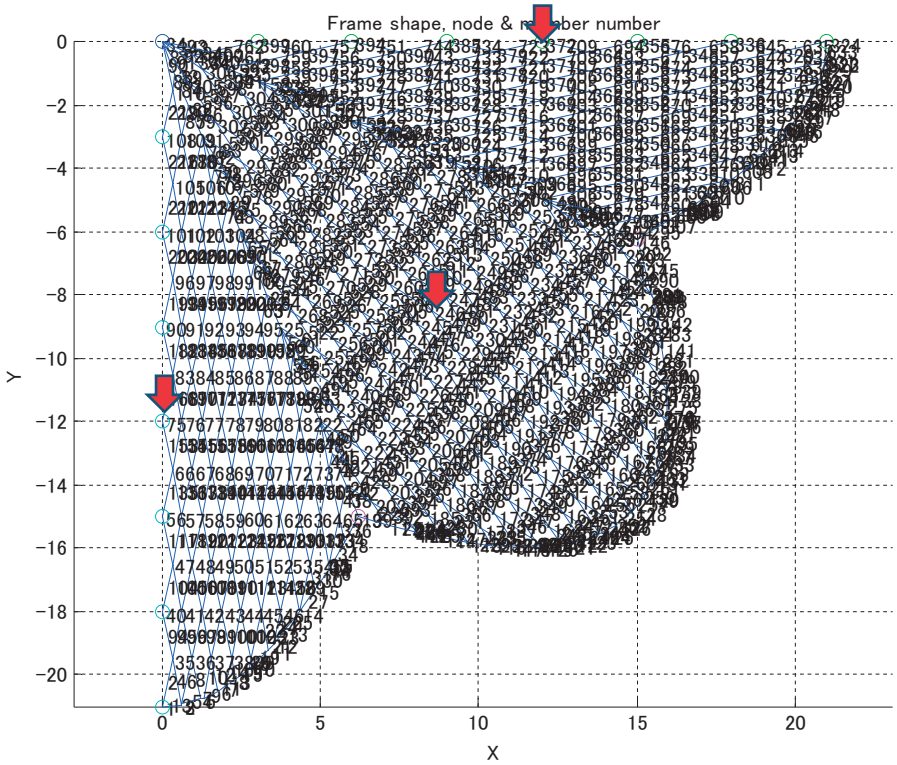
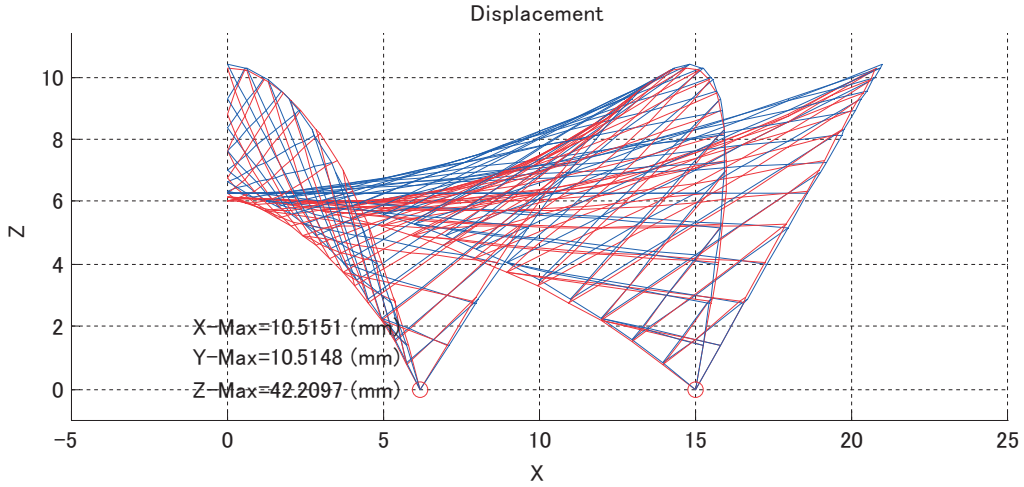


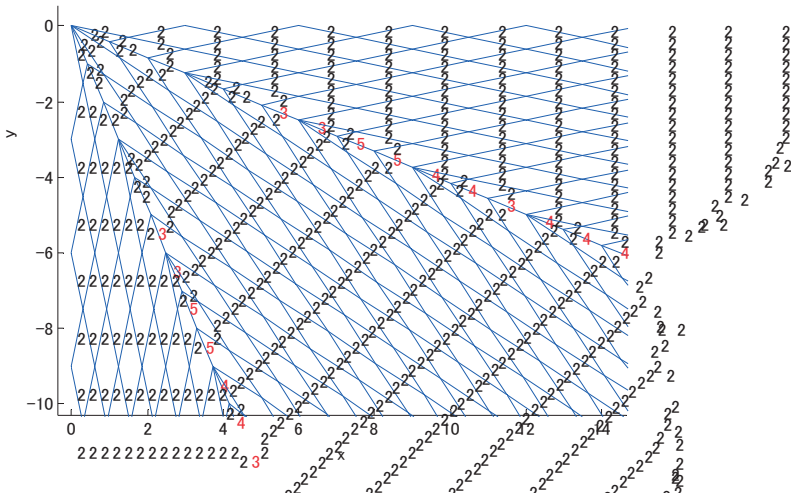
図4. 24　節点番号，部材番号
（真上からの俯瞰：最大鉛直方向変位は75, 246, 372節点で発生）

図4. 25は積雪荷重時の節点変位図で，**図4. 24**のY軸方向負側から解析モデルを真横に見た図である．同図の鉛直方向下向きの最大変位42. 2097(mm)は，**図4. 24**の赤色矢印の先端で生起している．**図4. 26**はSTEP 1 断面設計終了時の部材ランク拡大図で，解析開始時の部材ランクを全て２とした場合の結果である．バタフライ型HPシェル（全て部材ランク５）よりも部材ランクを下げたのは，積雪荷重が先に掲げた割増係数1. 5625相当分および１節点当たりの支配面積が1/2. 74と小さかった為である．同図には，解析スタート時部材断面がシェル接合部境界梁脚部側2/3の赤字部材がランクアップ部材であることが示されている．その他の部材については，解析スタート時の部材ランク２に同じである．



246節点座標値（px, py)＝(8. 4853, −8. 4853)，鉛直撓み/スパン長＝１/711

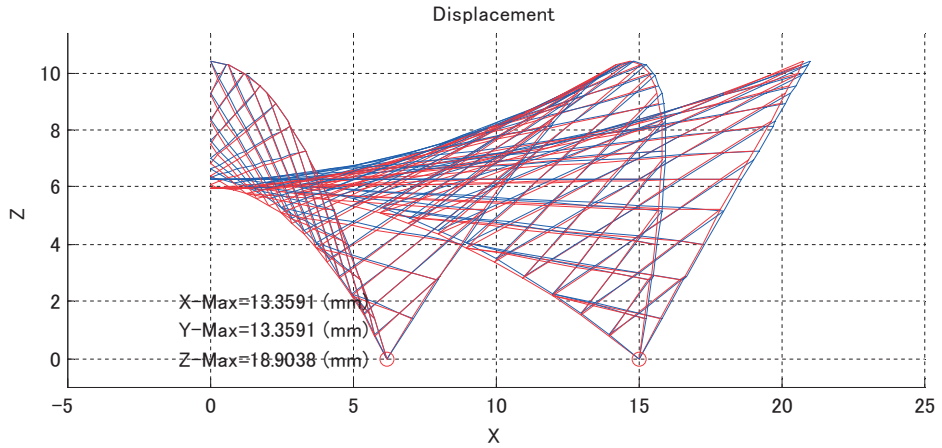
図4. 25　積雪荷重時節点変位図（最大鉛直下向き変位発生節点246）



（一部拡大図）

図4. 26　STEP 1 断面設計終了時部材ランク

次に，冬季温度変化をT＝－35℃と仮定した場合のSTEP 2 の解析結果を示す．なお，この際の部材入力データは**図4. 26**に示したSTEP 1 終了時の部材である．**図4. 27**は節点変位図を示したもので，部材が縮むことに拠り骨組中心節点（同図の左端）において鉛直下向きの最大変位が生起し，その値は18. 9038（mm）である．**図4. 28**～**4. 30**は，積雪荷重時と温度荷重時の部材応力（軸力，部材座標系のzおよびy軸回りモーメント）を示したものである．先のバタフライ型HPシェルでは積雪荷重時に対する温度荷重時の軸力は約82％の値であったが，**図4. 28**の結果は温度荷重時の値が約1/62と非常に小さくなっている．これは，支点間がバタフライ型HPシェルでは直線部材で繋がれていたのに対して，1/4骨組モデルではシェル接合部境界梁脚部２箇所のみで外的に固定支持され，曲率の大きい圧縮アーチで繋がれているため拘束力が大幅に弱められ，結果として骨組全体が自由温度伸縮状態に近づいたことに起因する．



発生節点座標値：建物中心px（34）＝0，py（34）＝0，鉛直撓み/スパン長＝ 1 /1587

図4. 27　温度荷重時（T＝－35℃）節点変位図（最大鉛直下向き変位発生節点34）

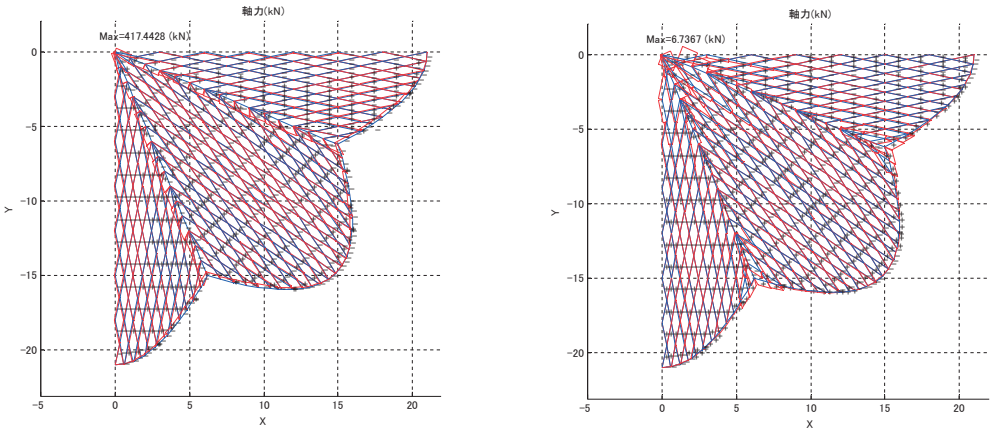


図4. 28　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）軸力

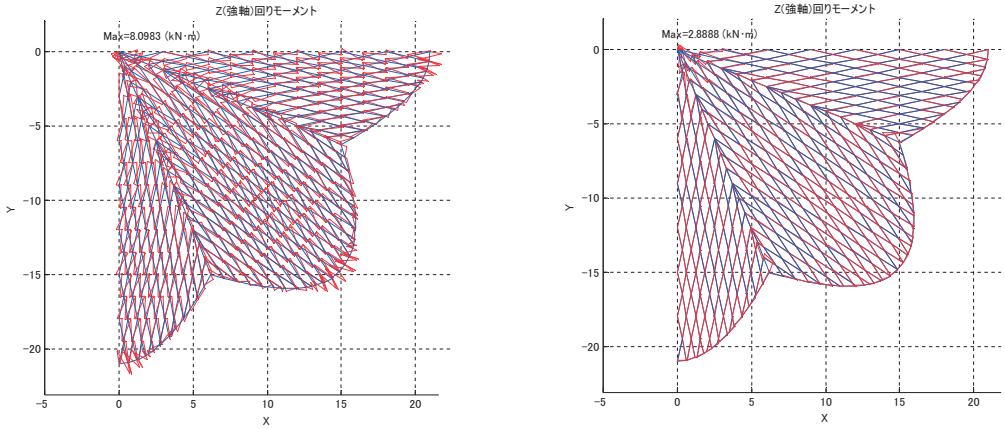


図4. 29　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）Mz

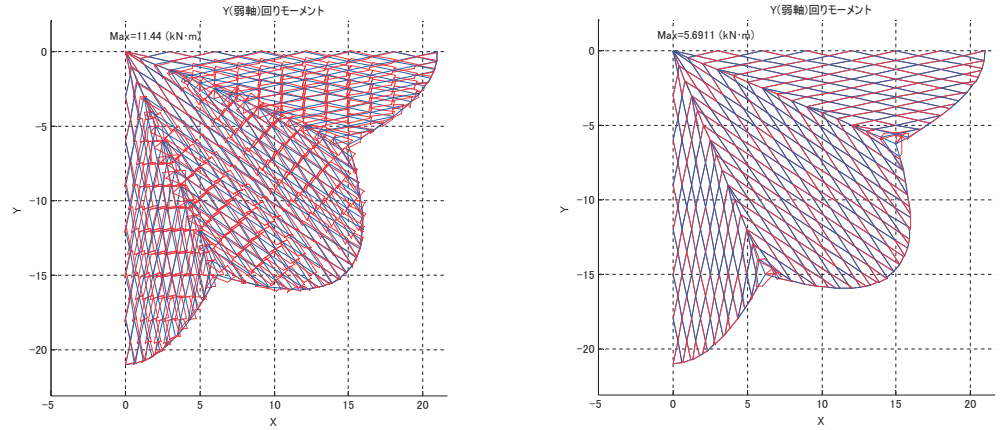


図4. 30　積雪荷重時（左），温度荷重時（右）My

図4. 31～**4. 34**は，積雪荷重時と温度荷重時を重ね合せた合成荷重時の節点変位図および主要な部材応力図であるが，上記で述べた様に温度荷重時部材応力の相対的影響が小さいため，**図4. 35**に示す合成荷重時の断面設計終了時部材ランクは，**図4. 26**に示したSTEP 1 の積雪荷重時と比較し，赤字で示すランクアップ部材は 1 部材のみであった．なお図は省略したが，シェル交差部境界梁脚部を完全固定からピン支持に変更した場合には，**図4. 35**に相当する合成荷重時部材ランクは**図4. 26**と同じで，ランクアップする部材は発生しなかった．

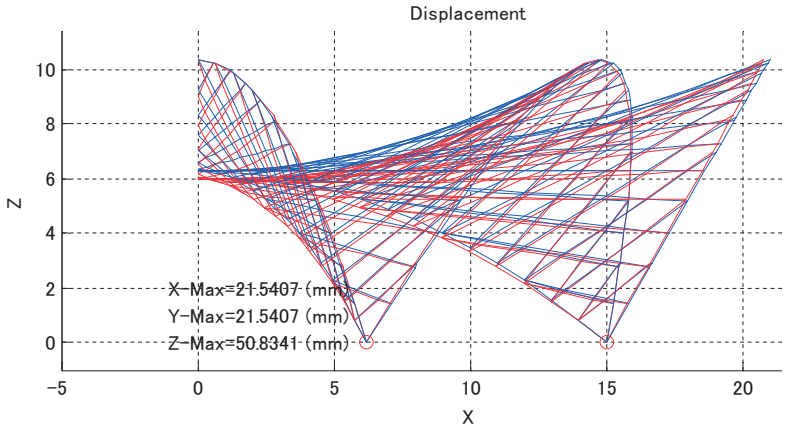
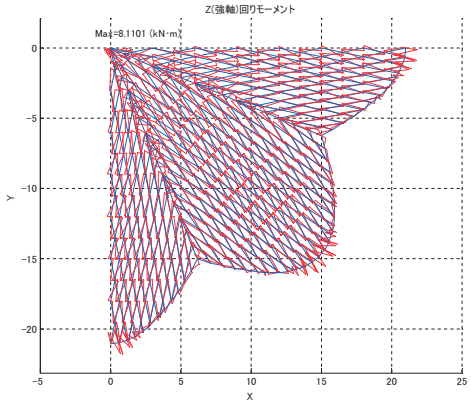
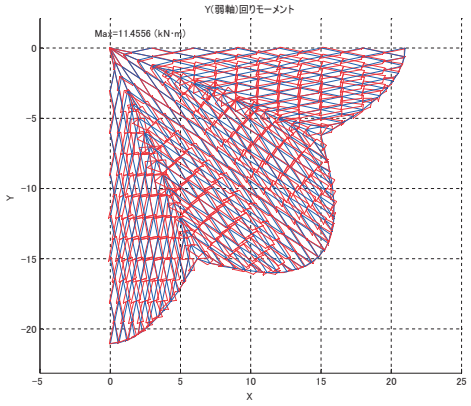


図4. 31　合成荷重時節点変位



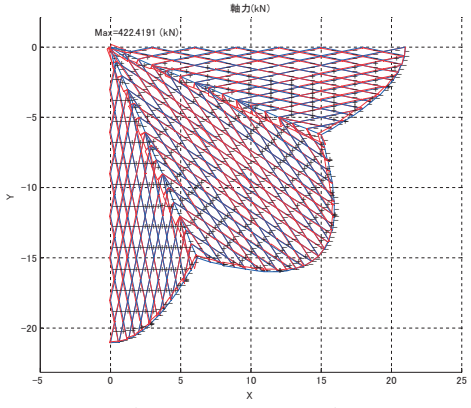
（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 32　合成荷重時Mz



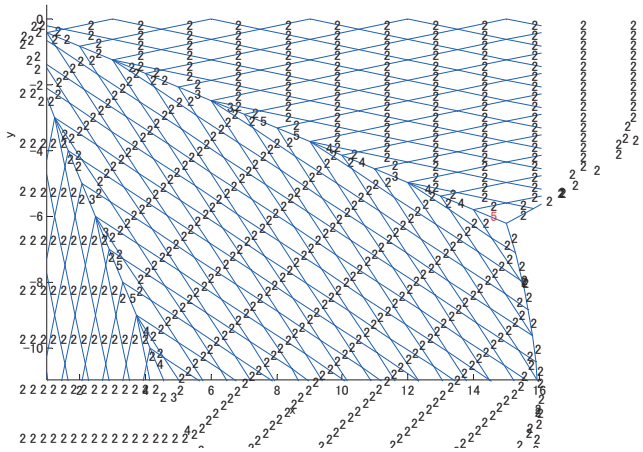
（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 33　合成荷重時My



（STEP 3 断面設計終了時）

図4. 34　合成荷重時軸力



STEP 3 断面設計終了時（一部拡大図）

図4. 35　合成荷重時部材ランク

4. 3　積雪荷重時，温度荷重時部材応力の相互比較

最後に積雪荷重時，温度荷重時部材応力の相互比較を**表4. 1**に示す．同表(a)よりバタフライ型のHPシェル３点ピン支持の支点間拘束が強い場合，温度荷重時軸力の最大絶対値は積雪荷重時の約82％と大きく軸力が支配的であるが，片方がローラー支持され支点間の拘束が緩和されると，同表(b)に示す様に大幅に応力が低減することが分かる．

一方，鞍型シェルにおいても脚部支点間の拘束が弱まるので，温度荷重時の軸力が著しく小さい．しかし，前項で述べた様に支点間の拘束の程度に差はあっても積雪荷重時に対して，ランクアップする部材があることに留意すべきである．

表4. 1　主要な部材応力

最大絶対値	積雪荷重時	温度荷重時
軸力(kN)	508.035	415.6486
Mz(kNm)	15.6976	3.2433
My(kNm)	81.5918	15.6906

(a) バタフライ型HPシェル(3点ピン)

最大絶対値	積雪荷重時	温度荷重時
軸力(kN)	497.637	2.2119
Mz(kNm)	14.7223	0.8172
My(kNm)	81.242	1.2269

(b) バタフライ型HPシェル(斜めローラー)

最大絶対値	積雪荷重時	温度荷重時
軸力(kN)	417.4428	6.7367
Mz(kNm)	8.0983	2.8888
My(kNm)	11.44	5.6911

(c) 鞍型HPシェル(1/4モデル：2点固定)

5　まとめ

HPシェルの生成法とその３次元骨組解析の取扱いについて述べた後，札幌市を想定した積雪荷重と温度荷重を考慮し，鉄骨造HPシェル構造物の温度応答について検討した．本解析例に限られるが，得られた結果は下記に示す通りである．

1）温度応力は解析モデルの形状と拘束条件に大きく依存するが，温度応力を考慮すると積雪荷重時の部材断面設計に対してランクアップする部材が生じ，発生数の程度に差はあるものの温度応力を設計上無視できない．

2）バタフライ型HPシェル3点ピン支持の例に見る様に支点間の拘束が強ければ，温度荷重時の軸力が積雪荷重時の約82%とかなり大きくなる．

3）積雪寒冷地においては温度応力を考慮すると，部材断面設計は積雪荷重の影響もあり夏季よりも冬季に厳しい．

参考文献

1）Vasant S. Kelkar, Robert T. Sewell, “Fundamentals of the Analysis & Design of SHELL STRUCTURES”, PRENTICE–HALL INC., 1987.

2）斉藤裕　監修，「Felix Candelaフェリックス・キャンデラの世界」，TOTO出版，1995．8．

3）F. W. Beaufait, W.H.Rowan, Jr, P.G.Hoadley, R.M.Hackett, “COMPUTER METHOD OF STRUCTURAL ANALYSIS”，日本語訳：盛岡昌夫，“コンピュータによる骨組構造解析”，培風館，1972．

4）日本建築学会，「建築物荷重指針を活かす設計資料集1」，2016，2．