タイトル	重み付きルベーグ・ヒルベルト空間上の解析射影の有界性について
著者	山本，隆範；YAMAMOTO，Takanori
引用	北海学園大学学園論集(176)：61-92
発行日	2018-07-25

重み付きルベーグ・ヒルベルト空間上の解析射影の有界性について

山　本　隆　範

Boundedness of Analytic Projections on Weighted Lebesgue-Hilbert Spaces

Takanori YAMAMOTO

This paper is dedicated to the memory of late Professor Takahiko Nakazi

Abstract. An important case of non-positive operators, for which the classical theorems still hold is exhibited by the theory of Hilbert transforms. The (ordinary) Hilbert transform Hf of the function $f(x)$, $(-\infty<x<\infty)$, is defined by

(Ⅰ) $$Hf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Hf is understood as the limit, as $\varepsilon\to 0$, of $H_\varepsilon f$, where $H_\varepsilon f$ is defined for each $\varepsilon>0$ by

(Ⅰa) $$H_\varepsilon f(x)=\int_{|t-x|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}\,dt=\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Lusin, Privaloff and Plessner proved the pointwise convergence of $H_\varepsilon f$: for every $f\in L^p$, $p\geq 1$, the limit

(Ⅱ) $$\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon f(x)=Hf(x)$$

exists for almost all x. The limit function $Hf(x)$ is then taken as the definition of the singular integral (I).

While the function $Hf(x)$ exists, it may not be integrable. M. Riesz has shown that if $f\in L^p$, and

$p>1$ then also $Hf \in L^p$ and $H_\varepsilon f$ converges to Hf in the p[th]-mean, i.e.

(Ⅲ) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x)-H_\varepsilon f(x)|^p\, dx = 0, \qquad for\ f\in L^p,\ p>1.$$

Moreover, the following inequality of M. Riesz

(Ⅳ) $$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x)|^p dx \le \mathrm{O}_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx, \quad (p>1),$$

holds for any $f\in L^p$, where O_p dependes on p alone. (c.f. Cotlar [21])

This paper is concerned with the boundedness of the Hilbert transform and the analytic projection between two weighted Lebesgue-Hilbert spaces.

§1. $p=2$ のとき，単位円周上の Koosis の定理

P. Koosis は，次の定理 A と定理 B を示した。

[定理 A]（[62]，[65]）

$W\geqslant 0$，$W\in L^1(dx)$，$\alpha>0$，dx は実軸 $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度

次の（ｉ）～（iv）は同値である。

（ｉ）$^\exists U\geqslant 0$ a.e. $\int_{-\infty}^{\infty} U dx > 0$ s.t.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Hf|^2 U\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f|^2 W\, dx,\quad {}^\forall f(x) = \sum_{|\lambda|\geqslant\alpha} C_\lambda e^{i\lambda x}$$

（ii）$^\exists \Psi(z)$：指数型高々 α の整関数 s.t.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi|^2}{W}\frac{dx}{1+x^2} < \infty$$

（iii）$^\exists \varphi\in H^1$ outer，$|\varphi| = W$ a.e. $^\exists g \neq 0$，$g\in H^\infty$ s.t.

$$\left\| e^{2i\alpha x}\frac{|\varphi|}{\varphi} - g\right\|_\infty \leqslant 1$$

（iv）$^\exists \varphi\in H^1$ outer，$|\varphi| = W$ a.e. s.t.

$e^{2i\alpha x}\frac{|\varphi|}{\varphi} + H^\infty$ は，L^∞/H^∞ の単位球の端点でない。

[定理 B]（[63]）

$W\geqslant 0$，$W\in L^1(d\theta)$，$d\theta$ は単位円周 $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 測度

次の（ｉ），（ii）は同値である。

（ｉ）$^{\exists} U \geqslant 0$　a.e.　$\int_{\mathbb{T}} U d\theta > 0$　s.t.

$$\int_{\mathbb{T}} |Hf|^2 U\, d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, dx,\quad {}^{\forall} f = \sum_{|n| \geqslant 0} c_n e^{in\theta} \quad \text{trigonometric polynomial}$$

（ii）$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{W}\, d\theta < \infty$

［定義］

$\mathbb{T}$：単位円周，$\mathbb{Z}$：整数全体

$d\theta$：$\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度

$W(\theta) \geqslant 0,\ \in L^1(d\theta)$

$\mathcal{P}$：正則多項式全体 i.e.　$\mathcal{P} = \mathrm{span}\{e^{in\theta};\ n \geqslant 0,\ \in \mathbb{Z}\}$

$a, b \in \mathbb{Z}$：$a \leqslant -1 < 0 \leqslant b$ を充たす。

T：三角多項式全体の上で定義された作用素

$$(T, W, (a,b)) \equiv \left\{ U \;\middle|\; \begin{array}{l} U(\theta) \geqslant 0 \quad \text{a.e.} \quad \mathbb{T} \\ \int_{\mathbb{T}} |Tf|^2 U\, d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, d\theta \\ {}^{\forall} f \in e^{ib\theta} \mathcal{P} + e^{ia\theta} \overline{\mathcal{P}} \end{array} \right\}$$

一般に，$f \in \mathcal{D} \subseteq$ {三角多項式全体} なる時は，$(T, W, \mathcal{D})$ と書くことがある。

作用素 T として，次のような作用素を考える。

“$\widehat{\ }$”は Fourier 変換を意味する。

H：Hilbert 変換　$\widehat{Hf}(k) = \begin{cases} -i\,\hat{f}(k) & k \geqslant 0,\ k \in \mathbb{Z} \\ i\,\hat{f}(k) & k \leqslant -1 \end{cases}$

P：正則射影　$\widehat{Pf}(k) = \begin{cases} \hat{f}(k) & k \geqslant 0 \\ 0 & k \leqslant -1 \end{cases}$

P_E：$E \subset \mathbb{Z}$：有限集合　$\widehat{P_E f}(k) = \begin{cases} \hat{f}(k) & k \in E \\ 0 & k \notin E \end{cases}$

特に，$P_n \equiv P_{[0,n]}$とする。

$Hf(\theta) = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{T}} f(t) \left(1 + \cot \frac{t-\theta}{2}\right) dt$ と書ける。

但し，$\mathrm{p.v.}\int$ は Cauchy の主値積分を表わす。

［定理 1］

$W \geqslant 0,\ \in L^1(d\theta),\ a,b \in \mathbb{Z},\ a \leqslant -1,\ 0 \leqslant b$

次の（ｉ）～（vii）は同値である。

（ｉ）　$(H, W, (a, b)) \neq \{0\}$

（ⅰ）′　$(H, W, (a, b)) \ni {}^{\exists} U$　s.t.　$\log U \in L^1(d\theta)$

（ⅱ）　$(P, W, (a, b)) \neq \{0\}$

（ⅱ）′　$(P, W, (a, b)) \ni {}^{\exists} U$　s.t.　$\log U \in L^1(d\theta)$

（ⅲ）　${}^{\forall} n \geqslant 0$,　$(P_n, W, (a, b)) \ni {}^{\exists} U_n \not\equiv 0$　a.e.

（ⅲ）′　${}^{\forall} n \geqslant 0$,　${}^{\exists} K_n$：定数　s.t.

$$\int_{\mathbb{T}} |P_n f|^2 W\, d\theta \leqslant K_n \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, d\theta,\quad {}^{\forall} f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$$

（ⅳ）　${}^{\forall} E \subset \mathcal{P}$：有限次元部分空間　s.t.　$e^{ib\theta} \in E$ について，

$(P_E, W, (a, b)) \ni {}^{\exists} U_E \not\equiv 0$　a.e.

（ⅳ）′　${}^{\forall} E \subset \mathcal{P}$：有限次元部分空間　s.t.　$e^{ib\theta} \in E$ について，

$$\sup_{e^{ik\theta} \in E} \left| \widehat{f}(k) \right| \leqslant {}^{\exists} K_E \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, d\theta,\quad {}^{\forall} f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$$

（ⅴ）　$$\inf_{f \in e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}} \int_{\mathbb{T}} |e^{ib\theta} - f|^2 W\, d\theta > 0$$

（ⅵ）　${}^{\exists} \Psi(e^{i\theta}) \in \mathcal{P}$：$b-a-1$次　s.t.　$\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{|\Psi|^2}{W}\, d\theta < \infty$

（ⅶ）　${}^{\exists} \varphi \in H^1$　outer,　$|\varphi(\theta)| = W(\theta)$　a.e.　${}^{\exists} g \neq 0,\ \in H^\infty$

s.t.　$$\left\| e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} + g \right\|_\infty \leqslant 1$$

（ⅰ）↔（ⅱ），（ⅰ）′↔（ⅱ）′　の証明：

$2P = I + iH$ より明らか。特に $(H, W, (a, b)) \subseteq (P, W, (a, b))$ に注意する。

（ⅱ）′→（ⅲ）の証明：

（ⅱ）′　より，${}^{\exists} U$,　$\log U \in L^1(d\theta)$　s.t.　$\displaystyle\int |Pf|^2 U\, d\theta \leqslant \int |f|^2 W\, d\theta$

従って，$\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |P_n f|^2 U\, d\theta \leqslant C \int_{\mathbb{T}} |Pf|^2 U\, d\theta,\quad {}^{\forall} f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

を示せばよい。すなわち，

$\mathcal{M} \equiv \mathrm{span}\{e^{ik\theta};\ b \leqslant k \leqslant n\}$,　$\mathcal{N} \equiv \mathrm{span}\{e^{ik\theta};\ n+1 \leqslant k\}$

について，$\|x\|_{L^2(U)} \leqslant C' \|x+y\|_{L^2(U)}$,　${}^{\forall} x \in \mathcal{M}$,　${}^{\forall} y \in \mathcal{N}$

を示せばよい。

最初に，$[\mathcal{N}]_{L^2(U)} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ を示す。

∵$U \geqslant 0$,　$\log U \in L^1(d\theta)$ より，${}^{\exists} h \in H^2$ outer　s.t.　$|h|^2 = U$　a.e.

Beurling の定理より，$[h\mathcal{P}]_{L^2(d\theta)} = H^2$

一方，明らかに，$[h\mathcal{P}]_{L^2(d\theta)} = h[\mathcal{P}]_{L^2(U)}$

$\therefore [\mathcal{P}]_{L^2(U)} = h^{-1} H^2 \subseteq N_+$

$L^\infty(d\theta) \cap N_+ = H^\infty$ より，$L^\infty(d\theta) \cap [\mathcal{P}]_{L^2(U)} \subseteq H^\infty$

もし，$w \in [\mathcal{N}]_{L^2(U)} \cap \mathcal{M}$ ならば，

$^\exists y_j \in \mathcal{N}$ s.t. $y_j \underset{j}{\to} w$ in $L^2(U)$

$e^{-i(n+1)\theta} y_j \in \mathcal{P}$ より，$e^{-i(n+1)\theta} w \in [\mathcal{P}]_{L^2(U)} \cap L^\infty(d\theta) \subseteq H^\infty$

$\therefore w \in \mathcal{M} \cap e^{i(n+1)\theta} H^\infty = \{0\}$

$\therefore w = 0$

さて，上の不等式が不成立と仮定する。

$^\exists\{x_j\} \subseteq \mathcal{M}$，$^\exists\{y_j\} \subseteq \mathcal{N}$ s.t.

$\|x_j\| = 1$ 且 $x_j + y_j \underset{j}{\to} 0$ in $L^2(U)$

$\{x_j\}$ は有限次元空間 $\mathcal{M}$ の有界列ゆえ，収束部分列を持つ。

それを改めて $\{x_j\}$ と書く。

$\therefore x_j \underset{j}{\to} {}^\exists x \in \mathcal{M}$ in $L^2(U)$ $\therefore y_j \underset{j}{\to} -x$ in $L^2(U)$

$y_j \in \mathcal{N}$ より，$x \in [\mathcal{N}]_{L^2(U)} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ $\therefore x = 0$

一方，$\|x\| = \lim_j \|x_j\| = 1$ 矛盾。

（iii）→（iii）′ の証明：

有限次元空間では，全てのノルムは同値ゆえ，特に $L^2(U)$ ノルムと，$L^2(W)$ ノルムも同値である。

従って，

$$\int_{\mathbb{T}} |P_n f|^2 W\, d\theta \leqslant {}^\exists K_n \int_{\mathbb{T}} |P_n f|^2 U\, d\theta, \quad f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$$

$$\text{（iii）より，} \leqslant K_n \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, d\theta$$

（iii）→（iv）の証明：

$^\forall E \subset \mathcal{P}$：有限次元部分空間 s.t. $E \ni e^{ib\theta}$

について，$^\exists n \geqslant 0$ s.t. $E \subseteq \mathrm{span}\{e^{ik\theta}; 0 \leqslant k \leqslant n\}$

ゆえに，$\int_{\mathbb{T}} |P_E f|^2 U\, d\theta \leqslant C \int_{\mathbb{T}} |P_n f|^2 U\, d\theta$，$^\forall f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

を示せばよい。すなわち，

$\mathcal{M} \equiv \mathrm{span}\{e^{ik\theta}; b \leqslant k \leqslant n$，且 $k \in E\}$

$\mathcal{N} \equiv \mathrm{span}\{e^{ik\theta}; b \leqslant k \leqslant n$，且 $k \notin E\}$

について，

$\|x\|_{L^2(U)} \leqslant C' \|x + y\|_{L^2(U)}$，$^\forall x \in \mathcal{M}$，$^\forall y \in \mathcal{N}$

$\mathcal{N}$ も有限次元より，$\mathcal{N} = [\mathcal{N}]_{L^2(U)}$ となり，あとは，（ii）′→（iii）の証明と同様。

（iv）→（iv）′ の証明：

有限次元空間では，全てのノルムは同値ゆえ，

$$\sup_{e^{ik\theta}\in E}\left|\widehat{f}(k)\right| = \sup_{e^{ik\theta}\in E}\left|\widehat{P_E f}(k)\right| \leqslant {}^{\exists}K_E\int_{\mathbb{T}}|P_E f|^2 U\,d\theta$$

（iv）より，$\leqslant K_E\int_{\mathbb{T}}|f|^2 W\,d\theta$

（iv）′→（v）の証明：

$$e^{ib\theta}\in E\text{より，}\left|\widehat{f}(b)\right| \leqslant \sup_{e^{ik\theta}\in E}\left|\widehat{f}(k)\right| \overset{\text{(iv)}'}{\leqslant} {}^{\exists}K_E\int_{\mathbb{T}}|f|^2 W\,d\theta$$

$$\therefore \inf_{f\in e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}}\int_{\mathbb{T}}|e^{ib\theta}-f|^2 W\,d\theta \geqslant \frac{1}{K_E}>0$$

（v）→（vi）の証明：

（v）より，$e^{ib\theta}\notin\left[e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$ゆえ，

Hahn-Banachの分離定理より，

$$\exists g\neq 0\in L^2(W)\quad \text{s.t.}\quad \int_{\mathbb{T}}e^{-in\theta}g\,W\,d\theta=0,\quad \forall n\notin(a,b]$$

一方，$W\in L^1(d\theta)$ゆえ，Schwarzの不等式より，$gW\in L^1(d\theta)$

$\therefore gW=\sum_{n\in(a,b]}c_n e^{in\theta}$，$\Psi\equiv e^{-i(a+1)\theta}gW$

この時，$\int_{\mathbb{T}}\frac{|\Psi|}{W}^2 d\theta=\int_{\mathbb{T}}|g|^2 W\,d\theta<\infty$

（vi）→（vii）の証明：

Ψは正則多項式ゆえ，$\log|\Psi|\in L^1(d\theta)$。一方，

$$W\geqslant \log W=\log\frac{W}{|\Psi|^2}+\log|\Psi|^2\geqslant -\frac{|\Psi|^2}{W}+2\log|\Psi|\quad \text{a.e.}$$

$W,\ \frac{|\Psi|^2}{W}\in L^1(d\theta)$ より，$\log W\in L^1(d\theta)$

$\therefore \exists\varphi\in H^1$ outer　s.t.　$|\varphi|=W$　a.e.

$\frac{|\Psi|^2}{W}\in L^1(d\theta)$より，$G(z)\equiv\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\frac{|\Psi|^2}{W}\,d\theta$

$G(z)$は，$\{|z|<1\}$で正則かつ，$\mathrm{Re}\,G(z)>0$ゆえ，outerである。

この時，$\mathrm{Re}\,G(e^{i\theta})=\frac{|\Psi(e^{i\theta})|^2}{W(\theta)}$　a.e.

一方，$\forall u\in H^\infty$，$\|u\|_\infty\leqslant 1$について，$\mathrm{Re}\,\frac{1+u(\theta)}{1-u(\theta)}\geqslant 0$　a.e.ゆえ，

$$\left|\frac{e^{i(b-a-1)\theta}\,|\Psi|^2}{\left(\frac{1+u}{1-u}+G\right)\varphi}\right| = \left|\frac{\mathrm{Re}\ G}{\mathrm{Re}\left(\frac{1+u}{1-u}+G\right)}\right| \leqslant 1 \quad \text{a.e.}$$

$$\therefore g \equiv \frac{e^{i(b-a-1)\theta}\,|\Psi|^2}{\left(\frac{1+u}{1-u}+G\right)\varphi} \in L^\infty(d\theta)\cap N_+ = H^\infty$$

この時,

$$\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right| = \left|1-\frac{\mathrm{Re}\ G}{\frac{1+u}{1-u}+G}\right| = \left|\frac{\frac{1+u}{1-u}-\overline{G}}{\frac{1+u}{1-u}+G}\right| \leqslant 1 \quad \text{a.e.}$$

(vii)→(ii)′ の証明：

$$\begin{cases} {}^\exists g\neq 0,\ \in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad \left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right| \leqslant 1 \quad \text{a.e.} \\ \Rightarrow \\ {}^\exists g\neq 0,\ \in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad \log\left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right|\right) \in L^1(d\theta) \end{cases}$$

$$\therefore \rho \equiv 1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right|, \quad \log\ \rho \in L^1(d\theta)$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}F\,d\theta\right| = \left|\int_{\mathbb{T}}\left(e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right)e^{i\theta}F\,d\theta\right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}}(1-\rho)|F|\,d\theta, \quad {}^\forall F \in H^1$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta}W\,G\,d\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}}(1-\rho)W\,|G|\,d\theta, \quad {}^\forall G\in H^\infty$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\ W\,d\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f\overline{g}|(1-\rho)W\,d\theta, \quad \begin{matrix} {}^\forall f \in e^{ib\theta}H^\infty \\ {}^\forall g \in e^{ia\theta}\overline{H^\infty} \end{matrix}$$

$$\therefore \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2 W\,d\theta = \int_{\mathbb{T}}(|f|^2+|g|^2)W\,d\theta + 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\ W\,d\theta$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{T}}\left(|f|^2+|g|^2\right)W\,d\theta - 2\int_{\mathbb{T}}|f\overline{g}|(1-\rho)\ W\,d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{T}}((1-\rho)|f|+|g|)^2 W\,d\theta + \int_{\mathbb{T}}\left(1-(1-\rho)^2\right)|f|^2\ W\,d\theta$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{T}}|f|^2\left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right|^2\right)W\,d\theta$$

$$\therefore \left\{U = \left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right|^2\right)W\ ;\ {}^\exists g\in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad \left\|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}-g\right\|_\infty \leqslant 1\right\}$$

$\subseteq (P, W, (a,b))$

（ⅱ）→（vii） の証明：$\mathcal{P} \equiv$ {analytic polynomial 全体}

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 U \, d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2 W \, d\theta, \quad \begin{matrix} \forall f \in e^{ib\theta} \mathcal{P} \\ \forall g \in e^{ia\theta} \overline{\mathcal{P}} \end{matrix}$$

一般に $W \in L^1(d\theta)$ の時

$[\mathcal{P}]_{L^2(W)} \supset H^\infty$ ゆえ，

$\forall f \in e^{ib\theta} H^\infty$，$\forall g \in e^{ia\theta} \overline{H^\infty}$ について成り立つ。

この時，因数分解定理より，

$\forall F \in H^\infty$　$\exists B$：Blaschke product，$\exists \Phi \in H^\infty$：$\{|z|<1\}$ に zero を持たない。

s.t.　$F = B\,\Phi^2$

$\therefore e^{i(b-a)\theta} F = (e^{ib\theta}\,\Phi)\left(\overline{e^{ia\theta}\,\overline{B\Phi}}\right) = f\overline{g}$

$$\left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta} F \, W \, d\theta\right| = \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{g} \, W \, d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |f|^2 (W-U) d\theta + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |g|^2 W \, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{T}} |F| \left(W - \frac{U}{2}\right) d\theta$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} (\varphi F) d\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |\varphi F| \left(1 - \frac{U}{2W}\right) d\theta$$

$\{\varphi F \,;\, F \in H^\infty\} \subseteq H^1$　dense ゆえ，

$$\forall G \in H^1, \quad \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} G \, d\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |G| \left(1 - \frac{U}{2W}\right) d\theta$$

Hahn-Banach の定理より，

$$\exists g \in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{-\pi \leqslant \theta < \pi} \frac{\left| e^{i(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} - e^{i\theta} g \right|}{1-\sigma} \leqslant 1'$$

$$但し，\sigma \equiv \frac{U}{2W}$$

$\sigma \not\equiv 0$　a.e. ゆえ，$g \neq 0$

$$\therefore \quad \exists g \neq 0, \in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad \left| e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} - g \right| \leqslant 1 \quad \text{a.e.}$$

以上で定理 1 の証明が完成した。 ■

証明した順序は次の通りである。

$$
\begin{array}{ccccccc}
(\mathrm{i}) & \longleftarrow & (\mathrm{i})' & & (\mathrm{iii})' & \longrightarrow & (\mathrm{iv})' \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
(\mathrm{ii}) & \longleftarrow & (\mathrm{ii})' & \longrightarrow & (\mathrm{iii}) & \longrightarrow & (\mathrm{iv}) \\
& \searrow & \uparrow & & & & \downarrow \\
& & (\mathrm{vii}) & \longleftarrow & (\mathrm{vi}) & \longleftarrow & (\mathrm{v})
\end{array}
$$

○（ii）′→（v）も次のように証明できる。

$$\delta \equiv \inf_{f \in e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}} \int_{\mathbb{T}} |e^{ib\theta}-f|^2 W\, d\theta$$

この時，$\delta>0$ を示せばよい。

そこで，$\delta=0$ と仮定すると，

$$^{\exists}\{f_n\} \subseteq e^{i(b+1)\theta}\,\mathcal{P} + e^{ia\theta}\,\overline{\mathcal{P}} \quad \text{s.t.} \quad \int_{\mathbb{T}} |e^{ib\theta}-f_n|^2 W\, d\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

（ii）′より，$\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |e^{ib\theta}-Pf_n|^2 U\, d\theta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ 且 $\log U \in L^1(d\theta)$

なる U が存在する。

これは，Szegö の定理に矛盾する。

○（v）→（iii）も次のように証明できる。

（v）は，$e^{ib\theta} \notin \left[\, e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\,\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$ と同値である。

この時，$e^{i(b+1)\theta} \notin \left[\, e^{i(b+2)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\,\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$ となる。

「なぜなら，もし $\in$ が成り立つならば，明らかに，

$e^{ib\theta} \in \left[\, e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{i(a-1)\theta}\,\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$となり，（v）に矛盾。」

以下，帰納的に，$e^{ib\theta}, e^{i(b+1)\theta}, \cdots, e^{in\theta} \notin \left[\, e^{i(n+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\,\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$

となり，これは，（iii）に他ならない。

○（vi）→（ii）′ も次のように証明できる。

$\dfrac{|\Psi|^2}{W} \in L^1(d\theta)$より，$^{\exists}G$：outer　s.t.　$\mathrm{Re}\ G = \dfrac{|\Psi|^2}{W}$　a.e.

$u \in H^\infty$，$\|u\|_\infty \leqslant 1$

$$\rho \equiv 1-\left|1-\frac{2\mathrm{Re}\,G}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right| = 1-\left|\frac{\dfrac{1+u}{1-u}-\overline{G}}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right| \geqslant 0 \quad \text{a.e.}$$

$\rho\equiv 0$ となるのは，u が inner の時に限る。

$e^{i(b-a-1)\theta}\,\overline{\Psi}$ は analytic polynomial で，

$$\left|\frac{\Psi^2}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right| \leqslant \frac{|\Psi|^2}{\mathrm{Re}\, G} = W \quad \text{a.e. より} \quad \frac{e^{i(b-a-1)\theta}|\Psi|^2}{\dfrac{1+u}{1-u}+G} \in H^1$$

$\therefore {}^\forall f \in e^{ib\theta} H^\infty$　analytic polynomial

${}^\forall g \in e^{ia\theta} \overline{H^\infty}$　anti-analytic polynomial

について，

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, W\, d\theta = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}}\left(1-\frac{2\mathrm{Re}\, G}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right) f\,\overline{G}\, W\, d\theta$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}} |f\overline{g}|(1-\rho) W\, d\theta$$

$$\therefore \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2 W\, d\theta = \int_{\mathbb{T}} \left(|f|^2+|g|^2\right) W\, d\theta + 2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, W\, d\theta$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{T}} \left(|f|^2+|g|^2\right) W\, d\theta - 2\int_{\mathbb{T}} |f\overline{g}|(1-\rho) W\, d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{T}} ((1-\rho)|f|+|g|)^2 W\, d\theta + \int_{\mathbb{T}} \left(1-(1-\rho)^2\right)|f|^2\, W\, d\theta$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{T}} |f|^2\left(1-(1-\rho)^2\right) W\, d\theta$$

$$\therefore \left\{ U = \frac{4(\mathrm{Re}\, G)\left(\mathrm{Re}\,\dfrac{1+u}{1-u}\right)}{\left|G+\dfrac{1+u}{1-u}\right|^2} W \;;\; u \in H^\infty,\ \|u\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

$$\subseteq (P, W, (a, b))$$

$$\bigcirc\ \tau \equiv 1-\left|1-\frac{\mathrm{Re}\, G}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right| \overset{\rho\geqslant 0 \text{より}}{\geqslant} 1-\sqrt{1-\left|\frac{\mathrm{Re} G}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right|^2} \geqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{Re} G}{\dfrac{1+u}{1-u}+G}\right|^2$$

この τ についても，ρ と同様の事が言える。

○ u : not inner $\Rightarrow \log(1-\rho) \in L^1(d\theta)$ を示す。

$$\because \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, w\, d\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f\overline{g}|(1-\rho) W\, d\theta$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\rho} f\overline{g}(1-\rho) W\, d\theta\right| \leqslant \left\{\int_{\mathbb{T}} |f|^2(1-\rho) W\, d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\mathbb{T}} |g|^2(1-\rho) W\, d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

もし，$\log(1-\rho) \notin L^1(d\theta)$ ならば，$\log \mathrm{W} \in L^1(d\theta)$ より，

$\log(1-\rho) W \notin L^1(d\theta)$ となる。

$g=e^{ia\theta}$ とおくと，

$$\left|\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{1-\rho}e^{-ia\theta}f(1-\rho)W\,d\theta\right|\leqslant\left\{\int_{\mathbb{T}}|f|^2(1-\rho)Wd\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{T}}(1-\rho)W\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Szegö の定理より，$\forall f\in L^2((1-\rho)W)$ について成り立つ。

$$\therefore\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2(1-\rho)W\,d\theta\leqslant\int_{\mathbb{T}}(1-\rho)W\,d\theta$$

$$\therefore\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{\rho(2-\rho)}{1-\rho}\right)W\,d\theta=0\quad\therefore\int_{\mathbb{T}}\rho W\,d\theta=0$$

$$\therefore\int_{\mathbb{T}}\rho d\theta=0\quad\therefore\rho\equiv0\quad\text{a.e.}$$

一方，$\rho=1-\left|\dfrac{1-\dfrac{1-|u|^2}{|1-u|^2}\dfrac{W}{|F|^2}}{1+\dfrac{1-|u|^2}{|1-u|^2}\dfrac{W}{|F|^2}}\right|$

$\therefore|u(e^{i\theta})|\equiv1$　a.e.

$u\in H^\infty$ より u：inner 矛盾。

§2. $p=2$ のとき，単位円周上の Helson-Sarason の定理

［命題 1］（Helson-Sarason［46］）

$W\geqslant0,\ \in L^1(d\theta),\ a\leqslant-1<0\leqslant b$

次の（i）～（vi）は同値である。

（i）　$\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|Hf|^2W\,d\theta\leqslant C^2\int_{\mathbb{T}}|f|^2W\,d\theta,\ \forall f\in e^{ib\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

（ii）　$\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|Pf|^2W\,d\theta\leqslant K^2\int_{\mathbb{T}}|f|^2W\,d\theta,\ \forall f\in e^{ib\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

（iii）　$\displaystyle\inf\int_{\mathbb{T}}|f+g|^2W\,d\theta=\tau^2>0$，where

$$\int|f|^2W\,d\theta=\int|g|^2W\,d\theta=1,$$

$f\in e^{ib\theta}\mathcal{P},\ g\in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

（iv）　$\displaystyle\sup\left|\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}\,W\,d\theta\right|=\rho<1$，where

$$\int_{\mathbb{T}}|f|^2W\,d\theta=\int_{\mathbb{T}}|g|^2W\,d\theta=1,$$

$f\in e^{ib\theta}\mathcal{P},\ g\in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

（ｖ）　$^\exists \varphi\in H^1$　outer，$|\varphi(\theta)|=W(\theta)$　a.e.

$$\text{s.t.}\quad \left\| e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+H^\infty \right\|=\rho<1$$

（vi）　$^\exists \Psi\in$：$b-a-1$ 次，$^\exists \mu,\nu\in L^\infty(d\theta)$

$$\text{s.t.}\quad \|\nu\|_\infty=\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\ W(\theta)=|\Psi(\theta)|^2 e^{\mu(\theta)+\tilde{\nu}(\theta)}\quad \text{a.e.}$$

特に，$\|P\|=\inf K=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$，$\cos\varepsilon\leqslant\rho$

一方，$a=-b\neq0$の時，$\|H\|=\sqrt{\dfrac{1+\rho}{1-\rho}}$ となる。

証明

（ⅱ）→（ⅲ）：明らか。$\tau\geqslant K^{-1}$

（ⅲ）→（ⅱ）：ここは，Forelli［32］が示した。

$$0<\tau\leqslant\left\|\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|g\|}\right\|\leqslant\left\|\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|f\|}\right\|+\left\|\frac{g}{\|f\|}-\frac{g}{\|g\|}\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\|f\|}\left\{\|f+g\|+\Big|\|g\|-\|f\|\Big|\right\}\leqslant\frac{2}{\|f\|}\|f+g\|$$

$\therefore\|f\|\leqslant2\tau^{-1}\|f+g\|$　$\therefore K\leqslant2\tau^{-1}$

（ｉ）↔（ⅱ）：$2P=I+iH$ より明らか。

（ⅱ）→（iv）：$f\in e^{ib\theta}\mathcal{P}$，$g\in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$とする。

（ⅱ）より，$^\forall t\in\mathbb{R}$，$t^2\dfrac{K^2-1}{K^2}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|f|^2W\,d\theta+\int_{\mathbb{T}}|g|^2W\,d\theta+2t\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}\,W\,d\theta\geqslant0$

この２次不等式の判別式 $\leqslant0$ ゆえ，

$$\left|\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}\,W\,d\theta\right|\leqslant\frac{\sqrt{K^2-1}}{K}\left\{\int_{\mathbb{T}}|f|^2\,W\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{T}}|g|^2W\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

（iv）→（ⅱ）：

$$\|f+g\|_W^2=\|f\|_W^2+\|g\|_W^2+2\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}\,W\,d\theta$$

（iv）より，$\geqslant\|f\|_W^2+\|g\|_W^2-2\rho\|f\|_W\,\|g\|_W$

$\geqslant(1-\rho^2)\|f\|_W^2$

（iv）→（ｖ）：

$W\in L^1(d\theta)$ より，$[\mathcal{P}]_{L^2(W)}\supset H^\infty$ ゆえ，（ⅲ）は，

$^\forall f\in e^{ib\theta}H^\infty$，$^\forall g\in e^{ia\theta}\overline{H^\infty}$ について成り立つ。

この時，$^\forall F\in H^\infty$，$^\exists B$：Blaschke product，$^\exists \Phi\in H^\infty$：$(|z|<1)$ に zero を持たない。

s.t.　$F=B\Phi^2$　a.e.　$\mathbb{T}$

$f \equiv e^{ib\theta}\Phi$, $g \equiv e^{ia\theta}\overline{B\Phi}$ とおくと，

$$\left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta} F\ W\, d\theta\right| = \left|\int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\ W\, d\theta\right| \leqslant \rho \|f\|_W \|g\|_W = \rho \int |f| W\, d\theta$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} e^{1(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} (\varphi F) d\theta\right| \leqslant \rho \int_{\mathbb{T}} |\varphi F| d\theta$$

$\varphi \in H^1$ outer より，$\{\varphi F\,;\,F \in H^\infty\} \subseteq H^1$ dense ゆえ，

$$^\forall G \in H^1,\ \left|\int_{\mathbb{T}} e^{1(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} G\, d\theta\right| \leqslant \rho \int |G| d\theta$$

Hahn-Banach の双対定理より

$$\left\| e^{1(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} + H^\infty \right\| \leqslant \rho < 1$$

（ｖ）→（iv）：

$$\rho = \left\| e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} + H^\infty \right\| < 1$$

Hahn-Banach の双対定理より

$$^\forall G \in H^1,\ \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} G\, d\theta\right| \leqslant \rho \int_{\mathbb{T}} |G| d\theta$$

$$\therefore {}^\forall F \in H^\infty,\ \left|\int e^{i(b-a)\theta} F\ W\, d\theta\right| \leqslant \rho \int_{\mathbb{T}} |F| d\theta \quad (\because G = \varphi F)$$

$\therefore {}^\forall f \in e^{ib\theta}\mathcal{P}$, ${}^\forall g \in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$ について，

$$\left|\int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\ W\, d\theta\right| \leqslant \rho \int_{\mathbb{T}} |f\bar{g}| W\, d\theta \leqslant \rho \|f\|_W \|g\|_W$$

（ｖ）→（vi）：別証明になっている。

H^∞ の単位球は weak * compact ゆえ，${}^\exists h \in H^\infty$ s.t. $\left\| e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} + h \right\|_\infty = \rho < 1$

$\therefore |\arg e^{-i(b-a-1)\theta} \varphi h| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ a.e. 但し，$\cos\varepsilon = \rho$

$\nu(\theta) \equiv \arg e^{-i(b-a-1)\theta} \varphi h \quad \therefore \|\nu\|_\infty \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

Zygmund の定理より，$g(\theta) \equiv e^{\tilde{\nu}(\theta) - i\nu(\theta)} \in H^1(d\theta)$

$S(\theta) \equiv e^{i(b-a-1)\theta} \varphi\, h\, g \geqslant 0$ a.e.

$e^{i(b-a-1)\theta} S = \varphi\, h\, g \in H^{\frac{1}{2}}$ ゆえ，${}^\exists B$：Blaschke product

${}^\exists \Psi \in H^1$：$\{|z| < 1\}$に zero を持たない。

s.t. $e^{i(b-a-1)\theta} S = B\, \Psi^2$ a.e.

$\therefore e^{-i(b-a-1)\theta} B\, \Psi^2 = S \geqq 0$　a.e.

$\therefore e^{-i(b-a-1)\theta} B\, \Psi^2 = |\Psi|^2 = \Psi\, \overline{\Psi}$　a.e.

$\Psi \in H^1$ より，$\Psi \neq 0$　a.e.　$\mathbb{T}$ ゆえ，

$$e^{-i(b-a-1)\theta} B\, \Psi = \overline{\Psi} \quad \text{a.e.}$$

両辺の Fourier 係数が一致することから，Ψ は高々 $b-a-1$ 次の正則多項式である。

この時，$|\varphi h g| = |S| = |\Psi|^2$　a.e.　$\mathbb{T}$ ゆえ，

$$W = |\varphi| = \frac{|\Psi|^2}{|hg|} = |\Psi|^2 \frac{1}{|h|} e^{-\tilde{\nu}\alpha} = |\Psi|^2 e^{\mu - \tilde{\nu}\alpha}$$

但し，$\mu(\theta) \equiv -\log|h(\theta)|$

(iv) より，$\mu \in L^\infty(d\theta)$，$\|\mu\|_\infty \leqq \max\left\{\log \frac{1}{1-\rho},\ \log(1+\rho)\right\}$

(vi)→(v):

$W = |\Psi|^2 e^{\mu + \tilde{\nu}}$，$\Psi$ の zeros は，全て $\mathbb{T}$ 上にあるように，取り直しておく。特に，$\Psi \in H^\infty$ outer となる。

(iv) と (i) の同値性より，$\mu \equiv 0$ としてよい。

$W = |\Psi|^2 e^{\tilde{\nu}}$ の時，$\varphi \equiv \Psi^2 e^{\tilde{\nu} - i\nu}$，$\|\nu\|_\infty \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ゆえ，Zygmund の定理より，

$\varphi \in H^1$outer，$|\varphi| = W$　a.e.

$$\therefore e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} = e^{i(b-a-1)\theta} \frac{e^{\tilde{\nu}}}{\Psi^2 e^{\tilde{\nu} - i\nu}} = \frac{e^{i(b-a-1)\theta}\, \overline{\Psi}}{\Psi} e^{i\nu}$$

この時 $\frac{e^{i(b-a-1)\theta}\, \overline{\Psi}}{\Psi} \in N_+ \cap L^\infty = H^\infty$

$$\therefore \left\| e^{i(b-a-1)\theta} \frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{e^{i(b-a-1)\theta}\, \overline{\Psi}}{\Psi} \cos\|\nu\|_\infty \right\|_\infty$$

$$= \left\| e^{i\nu} - \cos\|\nu\|_\infty \right\|_\infty \leqq \sin\|\nu\|_\infty < 1 \qquad \blacksquare$$

§ 3. $p=2$ のとき，2つの凸集合 $(P, W, (a, b))$ と $(H, W, (a, b))$

[補題 2]

$W \geqq 0 \in L^1(d\theta)$，$a \leqq -1 < 0 \leqq b$

この時，$\forall U \in (P, W, (a, b))$ について，$\log(W - U) \in L^1(d\theta)$

証明

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 U d\theta \leqq \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2 W d\theta,\quad {}^\forall f \in e^{ib\theta}\mathcal{P},\quad {}^\forall g \in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$$

$$\therefore {}^\forall t \in \mathbb{R},\quad t^2 \int_{\mathbb{T}} |f|^2 (W-U) d\theta + 2t \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, W d\theta + \int_{\mathbb{T}} |g|^2 W d\theta \geqq 0$$

この2次方程式の判別式 $\leqq 0$ ゆえ，

$$\left|\int_{\mathbb{T}} f\bar{g}Wd\theta\right|^2 \leqslant \left\{\int_{\mathbb{T}} |f|^2(W-U)d\theta\right\}\left\{\int_{\mathbb{T}} |g|^2 Wd\theta\right\}$$

$g \equiv e^{ia\theta}$

$$\left|\int_{\mathbb{T}} e^{-ia\theta} fWd\theta\right|^2 \leqslant \left\{\int_{\mathbb{T}} |f|^2(W-U)d\theta\right\}\left\{\int_{\mathbb{T}} Wd\theta\right\}$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} \frac{W}{W-U} e^{-ia\theta} f(W-U)d\theta\right| \leqslant \left\{\int_{\mathbb{T}} |f|^2(W-U)d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int Wd\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

この時，$\int_{\mathbb{T}} \log(W-U)d\theta = -\infty$ と仮定する。

Szegö の定理より，$^\forall f \in L^2(W-U)$ について，不等式が成り立つ。

$$\therefore \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{W}{W-U}\right)^2 (W-U)d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} Wd\theta$$

$$\therefore \int_{\mathbb{T}} Ud\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} \frac{WU}{W-U} d\theta \leqslant 0$$

$\therefore U \equiv 0$ a.e. 仮定より $\int_{\mathbb{T}} \log Wd\theta = -\infty$

これは，$\log W \in L^1(d\theta)$ に矛盾。

$\therefore \log(W-U) \in L^1(d\theta)$ ■

［命題 3］

$W \geqslant 0 \in L^1(d\theta)$　$a \leqslant -1 < 0 \leqslant b$　この時，

$$(P,W,(a,b)) = \left\{U \geqslant 0\,;\, ^\exists g \in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad U \leqslant \left(1 - \left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi} + g\right|^2\right)W \quad \text{a.e.}\right\}$$

証明

$\supseteq$：定理で既に証明した。

$\subseteq$ を示す：$^\forall U \subseteq (P, W, (a, b))$　fix.

命題 4 より，$\log(W-U) \in L^1(d\theta)$ ゆえ，

$$^\exists \phi \in H^\infty \quad \text{outer} \quad \text{s.t.} \quad |\phi|^4 = \frac{W-U}{W} \quad \text{a.e.}$$

一方，$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 Ud\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2 Wd\theta$，$^\forall f \in e^{ib\theta}\mathcal{P}$，$^\forall g \in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

より，$\left|\int_{\mathbb{T}} f\bar{g}Wd\theta\right| \leqslant \left\{\int_{\mathbb{T}} |f|^2(W-U)d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\mathbb{T}} |g|^2 Wd\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$ を得る。………☆

$^\forall F \in \mathcal{P}$，$^\exists B$：Blaschke product，$^\exists \Phi \in \mathcal{P}$：$\{|z|<1\}$ に zeros を持たない。

s.t.　$F=B\Phi^2$　a.e.

この時，$\Phi\psi\in[\mathcal{P}]_{L^2(W)}$，且 $B\Phi\psi^{-1}\in[\mathcal{P}]_{L^2(W-U)}$

$\because \varphi^{\frac{1}{2}}\Phi\psi\in H^2=\left[\varphi^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}\right]_{L^2(d\theta)}$ （∵Beurlingの定理による。）

$\therefore \Phi\psi\in[\mathcal{P}]_{L^2(|\varphi|)}=[\mathcal{P}]_{L^2(W)}$

一方，$\varphi^{\frac{1}{2}}\psi B\Phi\psi^{-1}=\varphi^{\frac{1}{2}}B\Phi\in H^2=\left[\varphi^{\frac{1}{2}}\psi\mathcal{P}\right]_{L^2(d\theta)}$

$\therefore B\Phi\psi^{-1}\in[\mathcal{P}]_{L^2\left(\left|\varphi^{\frac{1}{2}}\psi\right|^2\right)}=[\mathcal{P}]_{L^2(W-U)}$

ゆえに，$g\equiv e^{ia\theta}\overline{\Phi\psi}\in\left[e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^2(W)}$

$f\equiv e^{ib\theta}B\Phi\psi^{-1}\in[e^{ib\theta}\mathcal{P}]_{L^2(W-U)}$

$$\therefore\left|\int_{\mathbb{T}}e^{i(b-a)\theta}FWd\theta\right|=\left|\int_{\mathbb{T}}f\bar{g}Wd\theta\right|$$

☆より $\leqslant\left\{\int_{\mathbb{T}}|f|^2(W-U)d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int|g|^2Wd\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$

$$=\int_{\mathbb{T}}|F|W^{\frac{1}{2}}(W-U)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$TF\equiv\int_{\mathbb{T}}e^{i(b-a)\theta}FWd\theta,\quad {}^\forall F\in\mathcal{P}$$

$$d\mu(\theta)\equiv W^{\frac{1}{2}}(W-U)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$|TF|=\left|\int_{\mathbb{T}}e^{i(b-a)\theta}FWd\theta\right|\leqslant\int_{\mathbb{T}}|F|d\mu(\theta)$$

従って，Tは，Hahn-Banachの定理より，ノルムを保って$(L^1(d\mu))^*$に拡張される。

$\therefore {}^\exists k\in L^\infty(d\mu)$　s.t.　$\|k\|_\infty\leqslant 1$，$\int_{\mathbb{T}}e^{i(b-a)\theta}FWd\theta=\int_{\mathbb{T}}Fkd\mu(\theta)$

この時 $\log W$，$\log(W-U)\in L^1(d\theta)$ ゆえ，$L^\infty(d\mu)=L^\infty(d\theta)$ となる。

$\therefore G\equiv kW^{\frac{1}{2}}(W-U)^{\frac{1}{2}}-e^{i(b-a)\theta}W\in e^{i\theta}H^1$

$\therefore \mathrm{g}\equiv e^{-i\theta}\dfrac{G}{\varphi}\in N_+\cap L^\infty(d\theta)=H^\infty$

$$\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|=|k|\left|\frac{W-U}{W}\right|^{\frac{1}{2}}\leqslant\left|\frac{W-U}{W}\right|^{\frac{1}{2}}\quad \text{a.e.}$$

$\therefore \mathrm{U}\leqslant\left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\dfrac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|^2\right)W$　a.e.　■

［注意］

この命題は，凸集合 $(P, W, (a, b))$ の almost everywhere の意味での極大元は全て，

$U=\left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|^2\right)W$ なる形になる事を言っている。

特に，$a=-1$，$b=0$ の時は，$U=\left(1-\left|\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|^2\right)W$ なる形になり，$\frac{|\varphi|}{\varphi}=\frac{F}{|F|}$　a.e　なる $F\in H^1$ は，

$F=\frac{1}{\varphi}$ に限る事は，Neuwirth and Newman［87］の定理より明らか。

従って，Adamian，Arov and Krein の定理（Garnett［39］p.160）より，極大元は全て，

$$U=\left(1-\left|\frac{|\varphi|}{\varphi}-\frac{2\frac{1}{\varphi}}{G+\frac{1+u}{1-u}}\right|\right)W=W-\left|W-\frac{2}{G+\frac{1+u}{1-u}}\right|$$

但し，$G(z)\equiv\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ \frac{1}{W(\theta)}d\theta$，$u\in H^\infty$，$\|u\|_\infty\leqslant 1$ となる。

［定義］

$W\geqslant 0$，$\in L^1(d\theta)$，$a\leqslant -1<0\leqslant b$

$$(H,W,(a,b))\equiv\left\{U\ \middle|\ \begin{array}{l} U(\theta)\geqslant 0 \quad \text{a.e.} \\ \int_{\mathbb{T}}|Hf|^2(W-U)\,d\theta\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f|^2(W+U)\,d\theta \\ {}^\forall f\in e^{ib\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}} \end{array}\right\}$$

［命題 4］

$$(H, W, (a, b))=\left\{U\leqslant W\ ;\ {}^\exists g\in H^\infty \quad \text{s.t.} \quad U\geqslant\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|W \quad \text{a.e.}\right\}$$

証明

$\supseteq$ を示す：

${}^\forall h\in H^\infty$，$f\in e^{ib\theta}\mathcal{P}$，$g\in e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{T}}f\overline{g}Wd\theta\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f\overline{g}||W+\overline{e}^{i(b-a-1)\theta}\varphi g|d\theta$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f\overline{g}|\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|Wd\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\left(|f|^2+|g|^2\right)\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|Wd\theta$$

$$\therefore \int_{\mathbb{T}} |f-g|^2\left(1-\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|\right)Wd\theta$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2\left(1+\left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right|\right)Wd\theta$$

$\subseteq$ を示す：

$$\int_{\mathbb{T}} |f-g|^2(W-U)d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f+g|^2(W+U)d\theta$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\,Wd\theta\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \left(|f|^2+|g|^2\right)Ud\theta$$

$$\therefore \left|\int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta}FWd\theta\right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |F|Ud\theta \quad {}^{\forall}F\in\mathcal{P}$$

$$TF \equiv \int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta}FWd\theta$$

$$\therefore |TF| \leqslant \int_{\mathbb{T}} |F|Ud\theta$$

Hahn–Banach の定理より，T を $L^1(U)^*$ に，ノルムを保って拡張できる。

$$\therefore {}^{\exists}k \in L^\infty(U) \quad \text{s.t.} \quad \|k\|_\infty \leqslant 1, \ \int_{\mathbb{T}} e^{i(b-a)\theta}FWd\theta = \int_{\mathbb{T}} FkUd\theta$$

この時，$\log U = \log\frac{1}{2}((W+U)-(W-U))$ ゆえ，命題 4 より，

$\log U \in L^1(d\theta)$。従って，$L^\infty(U) = L^\infty(d\theta)$

$$\therefore G \equiv kU - e^{i(b-a)\theta}W \in e^{i\theta}H^1$$

$$g \equiv e^{-i\theta}\frac{G}{\varphi} \in N_+ \cap L^\infty(d\theta) = H^\infty$$

$$\therefore \left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right| = \left|e^{i(b-a)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+\frac{G}{\varphi}\right|$$

$$= |kU|\frac{1}{W} \leqslant \frac{U}{W} \quad \text{a.e.}$$

$$\therefore U \geqslant \left|e^{i(b-a-1)\theta}\frac{|\varphi|}{\varphi}+g\right| \quad \text{a.e.}$$ ■

［注意］

前の命題の注意と同様に，$a=-1$，$b=0$ の時は，凸集合 $(H, W, (-1, 0))$ の極小元は，$u \in H^\infty$，$\|u\|_\infty \leqslant 1$ なる u を parameter として，記述できる。

§ 4. $1 \leqslant p < \infty$ のとき

今まではHilbert空間 $L^2(W)$ の中で考えてきた。
次に，$L^p(W)$　$1<p<\infty$ の場合を少し考えてみる。

$$(T,W,(a,b))_p \equiv \left\{ U \;\middle|\; \begin{array}{c} U(\theta) \geqslant 0 \quad \text{a.e.} \\ \int_{\mathbb{T}} |Tf|^p U \, d\theta \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f|^p W \, d\theta \\ {}^{\forall} f \in e^{ib\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}} \end{array} \right\}$$

［命題5］（単位円周 $\mathbb{T}$）

$1<p<\infty$，$W \geqslant 0$，$\in L^1(d\theta)$，$a \leqslant -1 < 0 \leqslant b$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$

次の（ｉ）～（iii）は同値である。

（ｉ）　$(P_b,\ W,\ (a,b))_p \neq \phi$

（ii）　${}^{\exists}\Psi \in \mathcal{P}$：$b-a-1$ 次 s.t. $\int_{\mathbb{T}} |\Psi|^{p'} W^{-\frac{1}{p-1}} d\theta < \infty$

（iii）　${}^{\exists}\varphi \in H^1$　outer，$|\varphi(\theta)| = W(\theta)$　a.e.　${}^{\exists} g \neq 0 \in H^\infty$

$$\text{s.t.} \quad \left\| e^{i(b-a-1)\cdot\frac{p'}{2}\theta} \left(\frac{|\varphi|}{\varphi} \right)^{\frac{1}{p-1}} - g \right\|_\infty \leqslant 1$$

証明

（ｉ）→（ii）：

双対定理より

$$0 < \delta \equiv \inf \left\{ \left\{ \int_{\mathbb{T}} |e^{ib\theta}+g|^p W \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} : g \in e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P} + e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}} \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} e^{-ib\theta} h \, W \, d\theta \right| : \int |h|^{p'} W \, d\theta = 1,\ \int e^{-in\theta} h \, W \, d\theta = 0,\ {}^{\forall} n \notin (a,b] \right\}$$

$$= \max \left\{ \left| \widehat{F}(b) \right| : \int |F|^{p'} W^{-\frac{1}{p-1}} d\theta = 1,\ \widehat{F}(n) = 0,\ {}^{\forall} n \notin (a,b] \right\}$$

但し，$F \equiv hW$，Hölderの不等式より，$F \in L^1(d\theta)$

このmaxをattainする F を F_0 とおく。

$$= \left| \widehat{F}_0(b) \right| = \left\{ \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{F_0}{\widehat{F}_0(b)} \right|^{p'} W^{-\frac{1}{p-1}} d\theta \right\}^{-\frac{1}{p'}}$$

$$\therefore \Psi \equiv \frac{F_0}{\widehat{F}_0(b)},\quad \int_{\mathbb{T}} |\Psi|^{p'} W^{-\frac{1}{p-1}} d\theta = \delta^{-p'} < \infty$$

$\Psi \in \mathcal{P}$：$b-a-1$ 次

(ⅱ)→(ⅰ)：

Hölder の不等式より，$\forall g\in e^{i(b+1)\theta}\mathcal{P}+e^{ia\theta}\overline{\mathcal{P}}$ と $\forall F=\sum_{n=a+1}^{b}c_n e^{in\theta}$，$C_b=1$ について，

$$\left\{\int_{\mathbb{T}}|e^{ib\theta}+g|^p W\,d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{T}}|F|^{p'}W^{-\frac{1}{p-1}}d\theta\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\geqslant\left|\int_{\mathbb{T}}(e^{-ib\theta}+\overline{g})F\,d\theta\right|=\left|\widehat{F}(b)\right|=1$$

$$\therefore \inf_g\left\{\int_{\mathbb{T}}|e^{ib\theta}+g|^p W\,d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\geqslant \sup_{\substack{F\\ \widehat{F}(b)=1}}\left\{\int_{\mathbb{T}}|F|^{p'}\,W^{-\frac{1}{p-1}}d\theta\right\}^{-\frac{1}{p'}}$$

(ⅱ) より >0

(ⅲ)→(ⅱ)：

次の事実を使う。(Koosis［64］p.231)

$u(\theta)$：$\mathbb{T}$上の unimodular について，次の (a)，(b) は同値。

(a)　$\exists g\neq 0\in H^\infty$　s.t.　$\|u-g\|_\infty\leqslant 1$

(b)　$\exists k\in H^1$　outer　s.t.　$u=\dfrac{k}{|k|}$　a.e.

従って，(ⅲ) より，

$\exists k\in H^1$　outer　s.t.　$e^{i(b-a-1)\frac{p'}{2}\theta}\left(\dfrac{|\varphi|}{\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}}=\dfrac{k}{|k|}$　a.e.

$e^{-i(b-a-1)\theta}\,\varphi^{\frac{2}{p}}\,k^{\frac{2}{p'}}\geqslant 0$　a.e.

$\Psi\equiv\varphi^{\frac{1}{p}}\,k^{\frac{1}{p'}}\in H^1$ outer，$e^{-i(b-a-1)\theta}\,\Psi^2\geqslant 0$　a.e.

$\therefore e^{-i(b-a-1)\theta}\,\Psi^2=|\Psi|^2=\Psi\,\overline{\Psi}$　a.e.

$\Psi\in H^1$ より，$\Psi\neq 0$　a.e. ゆえ，$e^{-i(b-a-1)\theta}\,\Psi=\overline{\Psi}$　a.e.

両辺の Fourier 係数は一致するから，

$\Psi=C_0+C_1\,e^{i\theta}+\cdots+C_{b-a-1}\,e^{i(b-a-1)\theta}$ となる。

この時 $\int_{\mathbb{T}}|\Psi|^{p'}W^{-\frac{1}{p-1}}\,d\theta=\int_{\mathbb{T}}|k|\,d\theta<\infty$

(ⅱ)→(ⅲ)：

$\Psi=\prod_{j=1}^{b-a-1}(e^{i\theta}-a_j)$，$\forall|a_j|=1$ と，取り直しておく。

(ⅱ) より容易に，$\log W\in L^1(d\theta)$ を得る。

$\therefore \exists\varphi\in H^1$ auter　s.t.　$|\varphi(\theta)|=W(\theta)$　a.e.

一方 $\exists k\in H^1$ auter　s.t.　$|k(\theta)|=|\Psi|^{p'}\,W^{-\frac{1}{p-1}}$　a.e.

$\therefore \varphi^{\frac{1}{p-1}}\,k=\gamma\prod_{j=1}^{b-a-1}(e^{i\theta}-a_j)^{p'}$，$|\gamma|=1$，$\gamma=1$ としてよい。

$$\therefore e^{i(b-a-1)\frac{p'}{2}\theta}\left(\frac{|\varphi|}{\varphi}\right)^{\frac{1}{p-1}}=e^{i(b-a-1)\frac{p'}{2}\theta}\left(\prod_{j=1}^{b-a-1}\frac{|e^{i\theta}-a_j|^2}{(e^{i\theta}-a_j)}\right)^{\frac{p'}{2}}\frac{k}{|k|}$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{b-a-1}\frac{e^{-i\theta}-\overline{a}_j}{e^{i\theta}-a_j}e^{i\theta}\right)^{\frac{p'}{2}}\frac{k}{|k|}=C\frac{k}{|k|},\ |C|=1\ 定数$$

再び前の事実より，（ｉ）を得る。 ■

［注意］

定理１の証明と同様にして，次の（iv），（ｖ）も同値なる事が示される。実際，（ｉ）→（iv）→（ｖ）→（ｉ）となる。

（iv）　$^{\forall}n\geqslant 0,\ ^{\exists}U_n\in(P_n,W,(a,b))_p$　s.t.　$U_n\not\equiv 0$　a.e.

（ｖ）　$^{\forall}E\subseteq\mathcal{P}$：有限次元部分空間　s.t.　$e^{ib\theta}\in E$

に対して，$^{\exists}U_E\in(P_n,W,(a,b))_p$　s.t.　$U_n\not\equiv 0$　a.e.

［命題６］

$0<p<\infty$

$\mathcal{D}\subseteq${三角多項式の全体}　部分空間

T：$\mathcal{D}$ の中の作用素で，$^{\forall}\alpha\in\mathbb{R}$，$(Tf)_\alpha=Tf_\alpha$，$^{\forall}f\in\mathcal{D}$

　が成り立つ。 但し，$f_\alpha(\theta)\equiv f(\theta+\alpha)$とする。

この時，次の（ｉ），（ii）は同値である。

（ｉ）　$^{\exists}W\in L^1(d\theta)$　s.t.　$(T,W,\mathcal{D})_p\neq\{0\}$

（ii）　$\int_{\mathbb{T}}|Tf|^p d\theta\leqslant C\int_{\mathbb{T}}|f|^p d\theta$，$^{\forall}f\in\mathcal{D}$

証明

（ii）→（ｉ）：明らか。

（ｉ）→（ii）：

$^{\exists}U\not\equiv 0$　s.t.　$^{\forall}\alpha\in\mathbb{R}$，$\int_{\mathbb{T}}|Tf_\alpha(\theta)|^pU(\theta)\,d\theta\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f_\alpha(\theta)|^pW(\theta)\,d\theta$，$^{\forall}f\in\mathcal{D}$

$Tf_\alpha=(Tf)_\alpha$ なる仮定より，$Tf_\alpha(\theta)=(Tf)_\alpha(\theta)=(Tf)(\theta+\alpha)$ ゆえ，

$^{\forall}\alpha\in\mathbb{R}$　$\int_{\mathbb{T}}|(Tf)(\theta+\alpha)|^pU(\theta)\,d\theta\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f(\theta+\alpha)|^pW(\theta)\,d\theta$，$^{\forall}f\in\mathcal{D}$

$U,W\in L^1(d\theta)$，$Tf,f\in L^\infty(d\theta)$ ゆえ，両辺とも，$L^\infty(d\alpha)$ に属する。

$$\therefore\int_{\mathbb{T}}\left\{\int_{\mathbb{T}}|(Tf)(\theta+\alpha)|^pU(\theta)\,d\theta\right\}d\alpha\leqslant\int_{\mathbb{T}}\left\{\int_{\mathbb{T}}|f(\theta+\alpha)|^pW(\theta)\,d\theta\right\}d\alpha$$

Fubini の定理と Lebesgue 積分の不変性より

$$\left\{\int_{\mathbb{T}}|(Tf)(\alpha)|^p d\alpha\right\}\left\{\int_{\mathbb{T}} U(\theta)d\theta\right\}\leqslant\left\{\int_{\mathbb{T}}|f(\alpha)|^p d\alpha\right\}\left\{\int_{\mathbb{T}} W(\theta)d\theta\right\}$$

$$\therefore\int_{\mathbb{T}}|Tf|^p d\theta\leqslant\frac{\|W\|_1}{\|U\|_1}\int_{\mathbb{T}}|f|^p d\theta,\quad {}^{\forall}f\in\mathscr{D}$$ ■

［系］

$\Lambda\subset\mathbb{Z}$ 有限集合，$\mathscr{D}\equiv\left\{f\in\text{三角多項式}\,;\,\hat{f}(n)=0,\ {}^{\forall}n\in\Lambda\right\}$

この時，${}^{\forall}W\in L^1(d\theta)$，$(H,W,\mathscr{D})_1=(P,W,\mathscr{D})_1=\{0\}$

証明

Durenの本［30］p.63より，${}^{\forall}n\geqslant 2$，$f(\theta)\equiv\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{\log k}\in L^1(d\theta)$，$Hf(\theta)\notin L^1(d\theta)$ ゆえ，

H は$\left[e^{in\theta}\mathcal{P}+e^{-in\theta}\overline{\mathcal{P}}\right]_{L^1(d\theta)}$ の中で，非有界である。特に，$[\mathscr{D}]_{L^1(d\theta)}$ の中でも，非有界である。

一方，$2P=I+iH$ ゆえ，P についても同様である。

$(Pf)_\alpha=Pf_\alpha$，$(Hf)_\alpha=Hf_\alpha$ ゆえ，上の命題に帰着する。

■

［命題7］

$1<p<\infty$，$d\nu$，$d\mu$：正値有限正則測度

${}^{\exists}n$　s.t.　$\int_{\mathbb{T}}|pf|^p d\nu\leqslant\int_{\mathbb{T}}|f|^P d\mu$，${}^{\forall}f\in e^{in\theta}\mathcal{P}+e^{-in\theta}\overline{\mathcal{P}}$

⇨ $d\nu$：絶対連続，且 $\nu_a\leqslant\mu_a$　a.e.

証明

Hölderの不等式より，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

$$\left|\int_{\mathbb{T}}Pf\,d\nu\right|\leqslant\left(\int_{\mathbb{T}}d\nu\right)^{\frac{1}{P'}}\left(\int_{\mathbb{T}}|Pf|^P d\nu\right)^{\frac{1}{P}}\leqslant\left(\int_{\mathbb{T}}d\nu\right)^{\frac{1}{P'}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f|^P d\mu\right)^{\frac{1}{P}}$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{T}}d\nu\right)^{\frac{1}{P'}}\left(\int_{\mathbb{T}}d\mu\right)^{\frac{1}{P'}}\|f\|_\infty$$

$\phi f\equiv\int_{\mathbb{T}}Pf\,d\nu$，$\phi$ は $e^{in\theta}\mathcal{P}+e^{-in\theta}\overline{\mathcal{P}}$ 上の $\|\cdot\|_\infty$ による有界線形汎関数ゆえ，Hahn－Banachの定理より，ϕ を $C(\mathbb{T})$ 上の ${}^{\exists}\Phi$ に拡張できる。この時，Rieszの定理より，

${}^{\exists}d\mathrm{V}$：正値有限正則測度　s.t.　$\Phi f=\begin{cases}\int_{\mathbb{T}}fdV, & f\in C(\mathbb{T})\\ \phi f, & f\in e^{in\theta}\mathcal{P}+e^{-in\theta}\overline{\mathcal{P}}\end{cases}$

${}^{\forall}k\leqslant -n$，$\int_{\mathbb{T}}e^{ik\theta}dV=\phi e^{ik\theta}=0$ ゆえ，F. and M. Rieszの定理より dV は絶対連続である。同様に，

${}^{\forall}k\geqslant n$，$\int_{\mathbb{T}}e^{ik\theta}\,d(\nu-V)=\phi e^{ik\theta}-\Phi e^{ik\theta}=0$ より，$d(\nu-V)$ も絶対連続ゆえ，$d\nu$ も絶対連続である。

$\therefore \quad dv = dV_a$

一方，$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 d(\mu - \nu_a) \geqq 0$，$\forall f \in e^{in\theta}\mathcal{P}$ ゆえ，μ，ν_a の正則性より，$d(\mu-\nu_a) \geqq 0$ となる。

$\therefore \quad \mu_a \geqq \nu_a \quad$ a.e. ■

§ 5. 実数直線上のとき

［定義］

$\mathbb{R}$：実軸（実数全体）

dx：$\mathbb{R}$上の Lebesgue 測度

$W(x) \geqq 0$，$\in L^1(dx)$

$\mathcal{P} \equiv \mathrm{span}\{e^{i\lambda x}; \lambda \geqq 0 \in \mathbb{R}\}$

α，$\beta \in \mathbb{R}$，$\alpha \leqq 0 \leqq \beta$，$\alpha \neq \beta$

T：定義域が，$\mathrm{span}\{e^{i\lambda x}; \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$の作用素

$$(T,W,(\alpha,\beta)) \equiv \left\{ U \left| \begin{array}{l} U(x) \geqq 0 \quad \text{a.e.} \quad \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}} |Tf|^2 U\, dx \leqq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 W\, dx \\ \forall f \in e^{i\beta x}\, \mathcal{O}f + e^{i\alpha x}\, \overline{\mathcal{O}f} \end{array} \right. \right\}$$

Tとして，次のような作用素を考える。

“$\widehat{\ }$”は，$\mathbb{R}$上の Fourier 変換を表わす。

H：$\mathbb{R}$上の Hilbert 変換 $\quad \widehat{Hf}(\lambda) = \begin{cases} -i\,\hat{f}(\lambda) & \lambda \geqq 0 \quad \in \mathbb{R} \\ i\,\hat{f}(\lambda) & \lambda < 0 \end{cases}$

P：H^∞の中への射影作用素 $\quad \widehat{Pf}(\lambda) = \begin{cases} \hat{f}(\lambda) & \lambda \geqq 0 \\ 0 & \lambda < 0 \end{cases}$

$Hf(x) = \dfrac{1}{\pi}\, \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \dfrac{f(t)}{x-t} dt$ と書ける。

但し，$\mathrm{p.v.}\int$ は，Cauchy の主値積分を表わす。

［補題 8］

$\forall \beta > 0$，$(P, W, (0, \beta)) = \{0\}$

証明

$$\int_{\mathbb{R}} U dx \leqq \int_{\mathbb{R}} |1 - e^{i\lambda x}|^2 W dx, \quad \forall \lambda < 0$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} U dx \leqq \lim_{\lambda \uparrow 0} \int_{\mathbb{R}} |1 - e^{i\lambda x}|^2 W dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \uparrow 0} |1 - e^{i\lambda x}|^2 W dx = 0$$

$\therefore U \equiv 0 \quad$ a.e. ■

［定理 2］

$W \geqslant 0,\ \in L^1(dx)$

$\alpha > 0,\ \in \mathbb{R}$について，次の（ｉ）～（ｖ）は同値である。

（ｉ）$\|Hf\|_W \leqslant C\|f\|_W \quad {}^\forall f = \sum_{|\lambda| \geqslant \alpha} C_n e^{in\theta},\ C_n \in \mathbb{C}$

（ii）$\|Pf\|_W \leqslant K\|f\|_W \quad {}^\forall f = \sum_{|\lambda| \geqslant \alpha} C_n e^{in\theta},\ C_n \in \mathbb{C}$

（iii）$\sup_{\|f\|_W = \|g\|_W = 1\ f = \sum_{\lambda \geqslant \alpha} C_n e^{in\theta},\ g = \sum_{\lambda \leqslant \alpha} C_n' e^{in\theta}} \left|(f,g)_W\right| = \rho < 1$

（iv）${}^\exists \varphi \in H^1$ outer, $|\varphi| = W$ a.e. $\mathbb{R}$

$$\text{s.t.}\quad \left\| e^{2i\alpha x}\frac{|\varphi|}{\varphi} + H^\infty \right\| = \rho < 1$$

（ｖ）${}^\exists \Psi$：指数型高々αの整関数

$${}^\exists \mu,\ \nu \in L^\infty(dx) \quad \text{s.t.} \quad \|\nu\|_\infty = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ W = |\Psi|^2 e^{\mu + \tilde{\nu}} \quad \text{a.e. } \mathbb{R}.$$

証明

（ｉ）↔（ii）↔（iii）↔（iv）の証明は，命題 1 と同じ。

（vi）→（ｖ）：

H^∞の単位球は weak * compact ゆえ，${}^\exists h \in H^\infty$ s.t. $\left\| e^{2i\alpha x}\frac{|\varphi|}{\varphi} + h \right\|_\infty = \rho < 1$

$$\therefore |\ \arg e^{-2i\alpha x}\varphi h| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{a.e.} \quad \cos\varepsilon \leqslant \rho$$

${}^\exists V(\zeta)$：harmonic in $(|\zeta| < 1)$

$V(e^{i\theta}) = \ \arg\ e^{-2i\alpha x}\varphi(x)h(x)$ a.e.

但し，$e^{i\theta} = \dfrac{i - x}{i + x},\ \zeta = \dfrac{i - z}{i + z}$

Zygmund の定理より，$e^{\tilde{V}(\zeta) - iV(\zeta)} \in H^1(|\zeta| < 1)$

$G(z) \equiv e^{\tilde{V}(\zeta) - iV(\zeta)}$

$$\therefore -\arg\ G(x) = V\left(\frac{i - x}{i + x}\right) = \ \arg\ e^{-2i\alpha x}\varphi(x)h(x) \quad \text{a.e.}$$

$$\therefore S(x) \equiv e^{-2i\alpha x}\,\varphi(x)\,h(x)\,G(x) \geqslant 0 \quad \text{a.e.}$$

Koosis［62］より，${}^\exists \Psi$：指数型高々 α の整関数

s.t. $S(x) = |\Psi(x)|^2$ a.e. $\mathbb{R}$

$\therefore |\Psi(x)|^2 = S(x) = |\varphi(x)h(x)G(x)|$ a.e.

$$\therefore W(x) = |\varphi(x)| = \frac{|\Psi(x)|^2}{|h(x)G(x)|} = |\Psi(x)|^2 \frac{1}{|h(x)|} e^{-\tilde{V}(\zeta)}$$

$$\mu(x) \equiv \log \frac{1}{|h(x)|} \in L^{\infty}(dx), \|u\|_{\infty} \leqslant \max\left\{\log \frac{1}{1-\rho}, \log(1+\rho)\right\}$$

$$\nu(x) \equiv V(e^{i\theta}), \nu(x) \in L^{\infty}(dx), \|\nu\|_{\infty} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

$\therefore W(x) = |\Psi(x)|^2 \ e^{\mu(x)+\tilde{\nu}(x)}$ a.e.

（v）→（iv）: Schwarz の不等式より，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(x)|}{\sqrt{1+x^2}} dx \leqslant \left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\mu-\tilde{\nu}}}{1+x^2} dx\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\int_{\mathbb{R}} |\Psi|^2 e^{\mu+\tilde{\nu}} dx\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

特に $\int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ より $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^{+}|\Psi(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ さらに

Ψ は指数型の整関数ゆえ，$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\Psi(x)||}{1+x^2} dx < \infty$ となる。

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} \frac{\log W(x)}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\log|\Psi|^2}{1+x^2} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\log e^{-\mu-\tilde{\nu}}}{1+x^2} dx$$

$$\geqslant -2\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\Psi||}{1+x^2} dx \ - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\mu-\tilde{\nu}}}{1+x^2} dx > -\infty$$

$\therefore {}^{\exists}\varphi \in H^1(dx)$ outer s.t. $|\varphi(x)| = W(x)$ a.e.

$e^{\mu} \in L^{\infty}(dx)$ ゆえ，$\mu \equiv 0$ としても，一般性を失わないことは（iv）と（ii）の同値性により，容易にわかる。

従って，$W = |\Psi|^2 e^{\tilde{\nu}}$ について示す。

$G \equiv e^{-\tilde{\nu}+i\nu}$ この時，$\frac{e^{2i\alpha x}|\Psi|^2}{\varphi G} \in H^{\infty}(dx)$ なる事を，少しの間認めると，

$$\left|e^{2i\alpha x}\frac{|\varphi|}{\varphi} - \frac{e^{2i\alpha x}|\Psi|^2}{\varphi G}\cos\|\nu\|_{\infty}\right| = \left|1 - \frac{|\Psi|^2}{WG}\cos\|\nu\|_{\infty}\right| = \left|1 - e^{-i\nu}\cos\|\nu\|_{\infty}\right| = \left|e^{i\nu} - \cos\|\nu\|_{\infty}\right| \leqslant \cos\varepsilon < 1 \quad \text{a.e.}$$

最後に，$\frac{e^{2i\alpha x}|\Psi|^2}{\varphi G} \in H^{\infty}(dx)$ を示す。

∵一般に，指数型 α の整関数 Ψ について，

$$\log|\Psi(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} \log|\Psi(t)| dt + dy \qquad z = x+iy, \ y>0.$$

なる事が知られている。

Jensen の不等式より，

$$|e^{i\alpha z}\Psi(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} |\Psi(t)| dt \qquad (y>0)$$

上半平面において，左辺は劣調和，右辺は調和ゆえ，

Garnettの本［39］p.51より，

$\frac{e^{i\alpha z}\Psi(z)}{(z+i)^2}\in H^1, (z+i)^2\in N_+$ ゆえ，特に，$e^{i\alpha z}\Psi(z)\in N_+$

同様に，$e^{i\alpha z}\overline{\Psi(\bar{z})}\in N_+$ となる。

一方 $\left|\frac{e^{2i\alpha x}|\Psi|^2}{\varphi G}\right|=\frac{|\Psi|^2}{W|G|}=1$　　a.e.

$\therefore\frac{e^{2i\alpha x}|\Psi|^2}{\varphi G}\in N_+\cap L^\infty=H^\infty$ ■

［注意］

補題8より，$(P, W, (\alpha,\beta))\neq\{0\}$ なるためには，$\alpha<0$ でなければならない。従って，定理2における，$\alpha>0$ なる仮定は，強くない。

最後に，$\forall\alpha>0, (P, W, (-\alpha,\alpha))\neq\{0\}$ なる $W\geqslant 0\in L^1(dx)$ の例を作る。

［例1］

$W(x)\geqslant 0$，$\in L^1(dx)$ 且，${}^\exists G(x):x\geqslant 0$ で減少する非負偶関数

s.t.（ｉ）$\int_0^\infty\frac{\log G}{1+x^2}dx>-\infty$

（ii）$\int_{-\infty}^\infty\frac{G}{(1+x^2)W}dx>-\infty$

証明：よく知られているように，

${}^\forall\alpha>0$，${}^\exists\Psi$：指数型 α の整関数　s,t. $\frac{\Psi^2}{G}\in L^\infty(\mathbb{R})$

$\therefore\int_{-\infty}^\infty\frac{|\Psi|^2}{(1+x^2)W}dx\leqslant\left\|\frac{\Psi^2}{G}\right\|_\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{G}{(1-x^2)W}dx<\infty$

よって，定理Aに帰着する。 ■

［例2］（Koosis［65］）

$W(x)\geqslant 0$，$\in L^1(dx)$

（ｉ）$\int_{-\infty}^\infty\frac{\log W}{1+x^2}dx>-\infty$

（ii）$G(x)\equiv\frac{W(x)W(-x)}{W(x)+W(-x)}$　は，$x\geqslant 0$　で減少する非負偶関数

証明

$$\int_0^\infty \frac{\log G}{1+x^2}\,dx \geqslant \int_{-\infty}^\infty \log W\,dx - \int_{-\infty}^\infty \frac{W}{1+x^2}\,dx > -\infty$$

一方，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{G}{(1+x^2)W}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{W(-x)}{W(x)+W(-x)}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$

よって，例 1 に帰着する。■

[例 3]

$W(x) \geqslant 0$，$\in L^1(dx)$

（ i ）$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\log W}{1+x^2}\,dx > -\infty$

（ ii ）$W(x)$ は $x \geqslant 0$ で減少する非負偶関数

証明

例 2 より明らか。■

[例 4]

$W(x) \equiv \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n$ $(n \geqslant 1)$ は，例 3 の条件をみたしている。

実際，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1+x^2}\,dx = -n\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx = -n\pi\log 2 > -\infty$

[例 5]（Koosis［65］）

$W(x) \geqslant 0$，$\in L^1(dx)$

${}^\exists E(z)$：指数型の整関数

$$\text{s.t.}\begin{cases} W(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(|E(x)|^2+1)} \text{ a.e.} \\ 且,\ \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\log^+|E(x)|}{1+x^2}dx < \infty \end{cases}$$

証明

Beurling and Malliavin の定理より，

${}^\forall \alpha > 0$，${}^\exists f_\alpha(z) \not\equiv 0$・指数型 α の整関数

s.t. $\Psi_\alpha(x)$，$E(x)f_\alpha(x) \in L^\infty(dx)$

この時，

$\Psi_\alpha(z) \equiv f_\alpha(z)\left(\dfrac{\sin\frac{\alpha z}{2}}{z}\right)^2$ は，指数型高々 2α の整関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_\alpha(x)|^2}{(x^2+1)W(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|E(x)|^2+1)|\Psi_\alpha(x)|^2\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (|E(x)|^2+1)|f_\alpha(x)|^2 \left(\frac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{x}\right)^2 dx$$

$$\leqslant (\|E^2 f_\alpha^2\|_\infty + \|f_\alpha^2\|_\infty) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{x}\right)^2 dx$$

$$= (\|Ef_\alpha\|_\infty^2 + \|f_\alpha\|_\infty^2) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \alpha < \infty \qquad \blacksquare$$

REFERENCES

[1] V. Adamian, D. Arov, and M. Krein, *Beskoniechnye gankeliovy matritsy i obobshchonnye zadachi Karateodori-Feiera i I. Shura*, Funktsionalnyi Analiz i ievo Prilozheniia, **2**: (1968), 1–17.

[2] N. Akhiezer, *Lektsii po teorii approksimatsii*, second augmented edition, Nauka, Moscow, 1965.

[3] T. Ando, *Projections in Krein spaces*, Linear Algebra Appl. **431** (2009), 2346–2358.

[4] T. Ando, *Linear Operators on Krein Spaces,* Lecture Note, Hokkaido University, Sapporo, Japan, 1979.

[5] T. Ando, *Contractive projections in L^p spaces*, Pacific J. Math. **17** (1966), 391–405.

[6] T. Ando, *Unbounded or bounded idempotent operators in Hilbert space*, Linear Algebra Appl. **438** (2011), 3769–3775.

[7] R. Arocena, *A refinement of the Helson-Szegö theorem and the determination of the extremal measures*, Studia Math. **71** (1981), 203–221.

[8] R. Arocena, and M. Cotlar, *A generalized Herglotz-Bochner theorem and L^2-weighted inequalities with finite measures*, Conference on harmonic analysis in Honor of Antoni Zygmund (Chicago, Ill, 1981), *Wadsworth Math. Ser.*, pp. 258–269, Wadsworth, Belmont, 1983.

[9] R. Arocena, M. Cotlar, and C. Sadosky, *Weighted inequalities in L^2 and lifting properties, Advances in Math.* Suppl. Studies 7A, 95–128, Academic Press, New York, 1981.

[10] A. Beurling and P. Malliavin, *On Fourier transforms of measures with compact support*, Acta Math., **107** (1962), 201–302.

[11] E. Bishop and R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Puro Math., VII, *Convexity*, (1963), pp. 27–35.

[12] R. Boas, *Entire functions*, Academic Press New York, 1954.

[13] A. Böttcher and B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, Akademie-Verlag, Berlin, and Springer-Verlag, 1990.

[14] A. Böttcher and I. M. Spitkovsky, *A gentle guide to the basis of two projections theory*, Linear Algebra Appl. **432** (2010), 1412–1439.

[15] A. Brown and P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*. J. Reine Angew. Math. **213** (1963/1964), 89–102.

[16] D. Buckholtz, *Inverting the difference of Hilbert space projections*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 60–61.

[17] C. Burnap and I. Jung, *Composition operators with weak hyponormality*, J. Math, Anal. Appl. **337** (2008), 686–694.

[18] L. Carleson and P. Jones, *Weighted norm inequalities and a theorem of Koosis*, Institut Mittag-Leffler, report no. 2 (1981).

[19] M. Chō, T. Nakazi and T. Yamazaki, *Hyponormal operators and two-isometry*, Far East J. of Mathematical Sciences **49** (2011), 111–119.

[20] R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[21] M. Cotlar, A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems, Rev. Mat. Cuyana **1** (1955), 105–167.

[22] M. Cotlar and C. Sadosky, *On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels*, pp. 383–407, *Harmonic analysis in Euclidean spaces* (Williamstown, MA, 1978), Part 1, eds. G. Weiss and S. Wainger, Proc. Symp. Pure Math. 35, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.

[23] M. Cotlar and C. Sadosky, *Toeplitz liftings of Hankel forms*, pp. 22–43, Function spaces and applications (Lund, 1986), Lect. Notes Math. 1302, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988.

[24] M. Cotlar and C. Sadosky, *Weakly positive matrix measures, generalized Toeplitz forms, and their applications to Hankel and Hilbert transform operators*, pp. 93–120, Operator Theory: Adv. and Appl. (Basel, Birkhäuser), vol. 58, 1992.

[25] M. Cotlar and C. Sadosky, *Revisiting almost orthogonality and eigen expansions*, Function spaces, interpolation theory and related topics, Lund, 2000 (de Gruyter, Berlin, 2002), 249–271.

[26] C. C. Cowen, *Hyponormality of Toeplitz operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 809–812.

[27] M. Dominguez, *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups*, Integral Equations Operator Theory **40** (2001), 212–230.

[28] M. Dominguez, *Weighted inequalities for the Hilbert transform and the adjoint operator in the continuous case*, Studia Math. **95** (1990), 229–236.

[29] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory (2nd ed.)*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1998.

[30] P. Duren: *Theory of* H^p *spaces*. Academic Press, New York 1970.

[31] V. B. Dybin and S. M. Grudsky, *Introduction to the theory of Toeplitz operators with infinite index*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2002.

[32] I. Feldman, N. Ya. Krupnik and A. Markus, *On the norm of polynomials of two adjoint projections*, Integral Equations Operator Theory **14** (1991), 69–90.

[33] F. Forelli: *The Marcel Riesz theorem on conjugate functions*. Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 369–390.

[34] M. Fujii and Y. Nakatsu, *On subclasses of hyponormal operators*, Proc. Japan Acad., Ser. A. **51** (1975), 243–246.

[35] T. Furuta, *Invitation to Linear Operators from Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space*. Taylor & Francis, London, 2001.

[36] B. G. Gabdulkhaev, *Optimal approximations of solutions of linear problems* (Kazansk. Gos. Univ., Kazan, 1980) [in Russian].

[37] F. D. Gakhov, *Boundary-value problems* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

[38] J. Garnett: *Two remarks on interpolation by bounded analytic functions.*: “Banach spaces of analytic functions.” Lecture notes in Math. **604**. Springer, Berlin (1977), 32–40.

[39] J. Garnett, *Bounded analytic functions* (Revised First Edition), Graduate Texts in Math., Springer, Berlin, 2006.

[40] I. Gohberg and N. Ya. Krupnik, *One-dimensional linear singular integral equations*. "Shtiintsa", Kishinev, 1973 (Russian); English transl.: Vol. I and II, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1992.

[41] F. D. Gakhov, *Boundary value problems* [in Russian], Fizmatgiz, Moscow (1963).

[42] C. Gu, *Algebraic properties of Cauchy singular integral operators on the unit circle*, Taiwanese J. Math. **20** (2016), 161–189.

[43] C. Gu, I. S. Hwang, D. Kang and W. Y. Lee, *Normal singular Cauchy integral operators with operator-valued symbols*, J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), 289–308.

[44] P. R. Halmos, *Ten problems in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 887–933.

[45] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book, 2nd ed.*, Springer-Verlag, 1982.

[46] H. Helson and D. Sarason, Past and future, Math. Scand. **21** (1967), 5–16.

[47] H. Helson and G. Szegö, *A problem in prediction theory*, Annali di Mat. Bologna (IV), vol. **51** (1960), 107–138.

[48] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs, 1962.

[49] R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden: *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*. Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973) 227–251.

[50] I. S. Hwang and W. Y. Lee, *Subnormal Toeplitz operators and the kernels of their self-commutators*, J. Math. Anal. Appl. **361** (2010), 270–275.

[51] I. S. Hwang and W. Y. Lee, *Hyponormal Toeplitz operators with rational symbols*, J. Oper. Theory **56** (2006), 47–58.

[52] T. Ito and T. K. Wong. *Subnormality and quasinormality of Toeplitz operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 157–164.

[53] Z. Jabłoński and J. Stochel, *Unbounded 2-hyperexpansive operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **44** (2001), 613–629.

[54] J.-P. Kahane, *Another theorem on bounded analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **18** (1967), pp. 827–831.

[55] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **7** (1957), 293–314.

[56] B. V. Khvedelidze, "The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable," in: Contemporary Problems of Mathematics [in Russian], VINITI, Moscow, 1975, 7, pp. 5–162 (Itogi Nauki i Tekhniki).

[57] Y. Kim, E. Ko, J. Lee and T. Nakazi, *Hyponormality of singular Cauchy integral operators with matrix-valued symbols*, preprint.

[58] E. Ko, I. E. Lee and T. Nakazi, *On the dilation of truncated Toeplitz operators II*, Preprint.

[59] E. Ko, I. E. Lee and T. Nakazi, *Hyponormality of the dilation of truncated Toepltz operators*, in preparation.

[60] P. Koosis, *Sur la non-totalité de certaines suites d'exponentielles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **75** (1958), 125–152.

[61] P. Koosis, *Interior compact spaces of functions on a half-line*, Comm. Pure. Appl. Math. **10** (1957), 583–615.

[62] P. Koosis: *Moyennes quadratiques pondérées de transformées de Hilbert et fonctions de type exponantial*. C. R. Acad. Sci. Paris **276** (1973), 1201–1204.

[63] P. Koosis: *Moyennes quadratiques pondérées de fonctions periodiques et de leurs conjuguées harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **291** (1980), 255–257.

[64] P. Koosis, *Introduction to H^p spaces (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, 1998.
[65] P. Koosis, *Weighted quadratic means of Hilbert transforms*, Duke Math. J. **38** (1971), 609–634.
[66] N. Ya. Krupnik, *Banach algebras with symbol and singular integral operators*, "Shtiintsa", Kishinev, 1984 (Russian); English transl.: Birkhäuser-Verlag, Basel, 1987.
[67] N. Ya. Krupnik and I. E. Verbitsky, *Exact constants in the theorem of K. I. Babenko and B. V. Khvedelidze on the boundedness of singular operators* (Russian), *Soobshzh. AN Gruz. SSR* **85** (1977), no. 1, 21–24.
[68] P. Lax, *Remarks on the preceding paper*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 617–622.
[69] I. K. Lifanov, *The Method of Singular Integral Equations and the Numerical Experiment* ("Yanus", Moscow, 1995) [in Russian].
[70] B. A. Lotto, *Range inclusion of Toeplitz and Hankel operators*, J. Operator Theory **24** (1990), 17–22.
[71] R. A. Martínez-Avendaño, Rosenthal P.: *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*. Springer, Berlin (2007).
[72] S. G. Mikhlin, and S. Prössdorf, *Singular integral operators*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.
[73] J. Moeller and P. Frederickson, *A density theorem for lacunary Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 82–86.
[74] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*. Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
[75] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for classical operators*. Proc. Symposia in Pure Math. **35**, Part I (1979), 69–83.
[76] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations* (Nauka, Moscow, 1968) [in Russian].
[77] T. Nakazi, *Range inclusion of two same type concrete operators*, preprint.
[78] T. Nakazi, *Norm inequality of $AP + BQ$ for selfadjoint projections P and Q with $PQ = 0$*, J. Math, Ineq. **7** (2013), 513–516.
[79] T. Nakazi, *Hyponormal singular integral operators with Cauchy kernel on L^2*, Commun, Korean Math. Soc. **33** (2018), 787–798.
[80] T. Nakazi, *Exposed points and extremal problems in H^1*, J. Funct. Anal. **53** (1983), 224–230.
[81] T. Nakazi, *Weighted norm inequalities and uniform algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 507–512.
[82] T. Nakazi and K. Takahashi, *Hyponormal Toeplitz operators and extremal problems of Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 753–767.
[83] T. Nakazi, and T. Yamamoto, *A Lifting theorem and uniform algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 79–94.
[84] T. Nakazi, and T. Yamamoto, *Some singular integral operators and Helson-Szegö measures, J. Funct. Anal.* **88** (1990), 366–384.
[85] T. Nakazi and T. Yamamoto, *Norms of some singular integral operators*, J. Operator. Th. **40** (1998), 187–207.
[86] T. Nakazi and T. Yamamoto, *Normal singular integral operators with Cauchy kernel on L^2*, Integr. Equ. Oper. Th. **78** (2014), 233–248.
[87] J. Neuwirth and D. J. Newman: *Positive $H^{\frac{1}{2}}$ functions are constant*. Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 958.
[88] N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: An Easy Reading*. Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
[89] N. K. Nikolskii, *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[90] A. V. Ozhegova, "*The uniform approximations of solutions to weakly singular integral equations of*

the firsk kind," Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Kazan, 1996).

[91] A. V. Ozhegova and L. E. Valiullova, "*The uniform approximation of solutions to singular integral equations of the first kind by projective methods*," in Proceedings of the First International Research and Practice Conference "Scientific Potential to the World' 2004," 2004 (Nauka i Osvita, Dnepropetrovsk, 2004), **31**, p. 64.

[92] R. Phelps, *Extreme points in function algebras*, Duke Math. J. **32** (1965), 267–278.

[93] R. Phelps, *Weak* support points of convex sets in* E^*, Israel J. Math. **2** (1964), 177–182.

[94] S. C. Power, *Hankel Operators on Hilbert space*, Pitman, Boston, Mass., 1982.

[95] S. Prösdorf, *Some classes of singular equations* [Russian translation], Mir, Moscow (1979).

[96] S. Richter, *A representation theorem for cyclic analytic two isometries*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 325–349.

[97] R. Rochberg, *Toeplitz operators on weighted* H^p *spaces*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 291–298.

[98] W. Rogosinski and H. S. Shapiro, *On certain extremum problems for analytic functions*, Acta Math., **90** (1953), 287–318.

[99] Rubio de Francia, *Boundedness of maximal functions and singular integrals in weighted* L^p *spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 673–679.

[100] C. Sadosky, *Some applications of majorized Toeplitz kernels*, pp. 581–626, *Topics in Modern Harmonic Analysis*, Proc. Seminar Torino and Milano (May-June 1982), Vol. II Inst. Naz. Alta Matematica F. Severi, Roma, 1983.

[101] C. Sadosky, *The mathematical contributions of Mischa Cotlar since 1955*, Analysis and Partial Differential Equations, pp. 715–742, Dekker, New York, 1990.

[102] C. Sadosky, *Liftings of kernels shift-invariant in scattering theory*, pp. 303–336, Holomorphic spaces, eds. Sh. Axler, J. McCarthy and D. Sarason, MSRI Publications 33, Cambridge Univ. Press, 1998.

[103] D. Sarason, *Generalized interpolation in* H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179–203.

[104] D. Sarason: *An addendum to "Past and future*." Math. Scand. **30** (1972), 62–64.

[105] D. Sarason, *Function theory on the unit circle*, Virginia Polytechnic Institute and State Univ., Blacksburg, VA, 1979.

[106] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Oper. Matrices, **1** (2007), 419–526.

[107] E. Sawyer, *Two weight norm inequalities for certain maximal and integral operators*. Lecture Notes in Math. **908**. Springer, Berlin (1981), 102–127.

[108] S. M. Shimorin, *Wold-type decompositions and wanderling subspaces of operators close to isometries*, J. reine angew. Math. **531** (2001), 147–189.

[109] Y. Sone and T. Yoshino, *Remark on the range inclusions of Toeplitz and Hankel operators*, Proc. Japan Acad., Ser. A. **71** (1995), 168–170.

[110] I. M. Spitkovsky, *On partial indices of continuous matrix-valued functions, Soviet Math. Doklady* **17** (1976), 1155–1159.

[111] T. Yamamoto, *On the generalization of the theorem of Helson and Szegö*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), 1–11.

[112] T. Yamamoto, *On weighted norm inequalities in* L^2 *on the unit circle*, Journal of Hokkai-Gakuen University **52** (1985), 13–19.

[113] T. Yamamoto, *Boundedness of some singular integral operators in weighted* L^2 *spaces*, J. Operator Theory **32** (1994), 243–254.

[114] T. Yamamoto, *Majorization of singular integral operators with Cauchy kernel on* L^2, Ann. Funct. Anal. 5 (2014), 101–108.

[115] N. Young, *An introduction to Hilbert space*. Cambridge Univ. Press, 1988.

[116] A. Zygmund, *Trigonometric series*, I, II, (Third Edition) Cambridge Univ. Press, 2002.