HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	非整数次微分を用いたアンシャープマスクによる画像鮮鋭化
著者	魚住，純；泉，晴佳
引用	工学研究 ： 北海学園大学大学院工学研究科紀要，9: 27-36
発行日	2009-09-30

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

研究論文

非整数次微分を用いたアンシャープマスクによる画像鮮鋭化

魚住　純* ・ 泉　晴佳**

Image sharpening by means of unsharp masks using fractional derivatives

Jun Uozumi* and Haruka Izumi**

1．はじめに

何らかの原因でぼけを生じた画像から元の画像を回復したり，あるいは画像に含まれるエッジ部などを意図的に強調する処理として，画像の鮮鋭化処理がある．画像鮮鋭化には，多くの場合，アンシャープマスキングと呼ばれる高周波強調処理が用いられる．これは，元来，暗室において銀塩写真をアナログ的に処理する際に用いられた手法であるが，ディジタル画像においては，原画像からそのラプラシアン処理画像を差し引く演算として実現する場合が多い．ラプラシアンは高い空間周波数成分を等方的に強調する微分演算処理であるが，その周波数強調特性は，空間周波数の２乗に比例している．これに対して，高周波成分の強調特性を，等方性を維持しつつ，空間周波数の任意のべき乗に拡張したものとして，等方性非整数次微分演算がある．アンシャープマスクの生成にこの演算法を用いると，鮮鋭化における高周波強調特性に，微分次数という新しい自由度を導入することができる．本研究では，この考え方に基づいて，非等方性非整数次微分を用いたアンシャープマスクを定義し，それによる画像の鮮鋭化の特性を具体的画像を用いて考察する．

2．アンシャープマスキング

アンシャープマスクは，一度デフォーカスなどによりぼかした写真をフィルムに写し，それを元の画像から差し引くことにより作られる．デフォーカスは，画像に低域通過フィルタを作用させたものであるから，元の画像を$f(x,y)$とし，その低域通過処理した画像を$f_{\mathrm{lp}}(x,y)$とすると，アンシャープマスクは，

$$g(x,y)=f(x,y)-f_{\mathrm{lp}}(x,y) \tag{1}$$

と書ける[1]．この$g(x,y)$は，画像$f(x,y)$に高域通過フィルタを作用させたものに相当しており，これを$f(x,y)$に加えて，

$$f_{\mathrm{s}}(x,y)=f(x,y)+g(x,y) \tag{2}$$

とすることにより，鮮鋭化された画像$f_{\mathrm{s}}(x,y)$が得られる．この処理をアンシャープマスキングと呼ぶ．

ディジタル画像の場合には，画像$f(x,y)$を高域通過フィルタに通すことによりアンシャープマスク$g(x,y)$を生成することができる．高域通過処理には，画像にオペレータを直接作用させる方法とフーリエ変換を用いて空間周波数フィルタを作用させる方法があるが，フィルタ設計の自由度の点からは後者の方が有利である．空間周波数を用いて定義される高域通過フィルタ$H(\xi,\eta)$としては，理想型，バターワース型，ガウス型，ラプラシアン型などがあり，このうちの前３者は，それぞれ，

$$H_{\mathrm{I}}(\xi,\eta)=\begin{cases}0, & \rho\leq\rho_0\\ 1, & \rho>\rho_0\end{cases} \tag{3}$$

* 北海学園大学大学院工学研究科電子情報工学専攻
Graduate School of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University
** 北海学園大学工学部電子情報工学科（現在：札幌市建設局）
Faculty of Engineering (Electronics and Information Eng.), Hokkai-Gakuen University (present: Construction Bureau, City of Sapporo)

$$H_{\mathrm{B}}(\xi,\eta)=[1+(\rho_0/\rho)^2]^{-1} \tag{4}$$
$$H_{\mathrm{G}}(\xi,\eta)=1-\exp[-\rho^2/(2\rho_0^2)] \tag{5}$$

で定義される[2]．ただし，ξ，η は x，y に対応する空間周波数，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ はその動径成分である．ρ_0 は ρ のカットオフ周波数であり，これらのフィルタはいずれもカットオフ周波数を持っている．

これらに対し，ラプラシアン型のフィルタは，画像のラプラシアンを与える空間周波数フィルタ

$$L(\xi,\eta)=-4\pi^2(\xi^2+\eta^2)=-4\pi^2\rho^2 \tag{6}$$

を用いて，

$$H_{\mathrm{L}}(\xi,\eta)=-L(\xi,\eta)=4\pi^2\rho^2 \tag{7}$$

で与えられる．$H_{\mathrm{L}}(\xi,\eta)$は，特定のカットオフ周波数を持たない点で式(3)−(5)のフィルタとは性質が異なるが，アンシャープマスクの生成に最も多用される．すなわち，多くの場合，

$$\begin{aligned} g(x,y)&=-\nabla^2 f(x,y)\\ &=\mathcal{F}^{-1}[-L(\xi,\eta)F(\xi,\eta)]\\ &=\mathcal{F}^{-1}[4\pi^2\rho^2F(\xi,\eta)] \end{aligned} \tag{8}$$

が用いられ，これをアンシャープマスクの定義とする場合もある[3]．ただし，$F(\xi,\eta)$は $f(x,y)$のフーリエ変換であり，$\mathcal{F}^{-1}[\quad]$はフーリエ逆変換の演算を表す．

ラプラシアンは 2 次の微分演算子であり，フィルタ $H_{\mathrm{L}}(\xi,\eta)$は，周波数の 2 乗に比例して高周波を強調する．高域通過型でありながらカットオフ周波数を持たないという特徴は，このべき関数型の周波数特性に由来する．したがって，2 次の微分に限らず，これを任意の次数に拡張することで，より一般的なべき関数型の高域通過フィルタを構成できると考えられる．

3．等方性非整数次導関数

一般に，任意の関数 $f(x)$に対する微分演算の次数を，整数から非整数を含む非負の実数に拡張することができる[4,5]．その方法として，ここでは，Riemann-Liouville の積分から導出されるフーリエ逆変換表示

$$D_x^{\nu}f(x)=\mathcal{F}^{-1}[(i2\pi\xi)^{\nu}F(\xi)] \tag{9}$$

を考える[6]．ここで，D_x^{ν}は，変数 x による ν 次の微分演算子である．式(9)を用いると，$f(x,y)$のラプラシアンは

$$\nabla^2 f(x,y)=D_x^2 f(x,y)+D_y^2 f(x,y) \tag{10}$$

と書けるが，この微分を単に 2 次から ν 次に拡張した導関数[7]

$$\begin{aligned} D_{x+y}^{\nu\nu}f(x,y)&=D_x^{\nu}f(x,y)+D_y^{\nu}f(x,y)\\ &=\mathcal{F}^{-1}[\{(i2\pi\xi)^{\nu}+(i2\pi\eta)^{\nu}\}F(\xi,\eta)] \end{aligned} \tag{11}$$

はラプラシアンのような等方性を持たないことに加えて，抽出されるピークとトラフが，本来強調すべきエッジの両側の適切な位置に生じないことから，鮮鋭化には適さない．後者の問題は，式(9)を変形した非整数次絶対導関数[6]

$$D_{|x|}^{\nu}f(x)=\mathcal{F}^{-1}[|2\pi\xi|^{\nu}F(\xi)] \tag{12}$$

により回避できるが，非等方性の問題は依然残される．

画像のエッジ等の特徴を等方的に抽出する目的には，方向に依存しない微分演算である等方性非整数次導関数[7]

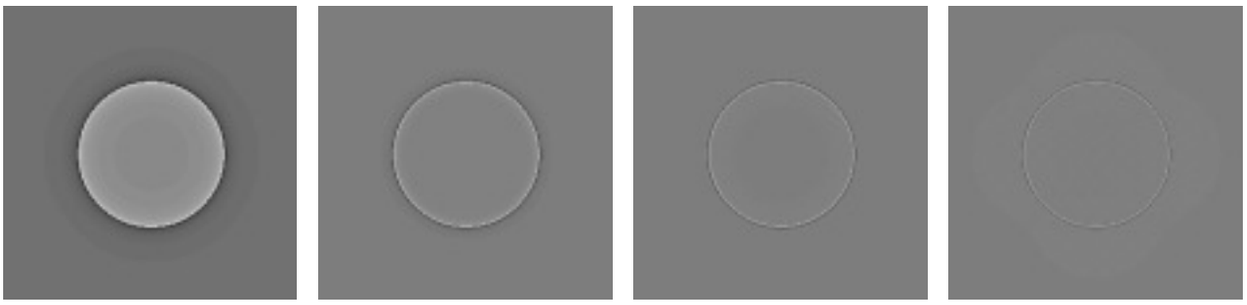
$$D_{\circ}^{\nu}f(x,y)=\mathcal{F}^{-1}[(2\pi\rho)^{\nu}F(\xi,\eta)] \tag{13}$$

が適している．これは，式(12)に示す非整数次絶対導関数のフィルタ関数$|2\pi\xi|^{\nu}$を 2 次元の空間周波数 ξ，η の動径成分 ρ の関数に拡張したものである．本論文では，この微分演算およびその結果の導関数を，便宜上，非整数次ラプラシアンと呼ぶことにする．

これらの微分およびそれを用いた鮮鋭化の特性を調べるために本研究で用いる画像を図 1 (a)および(b)に示す．大きさはいずれも 256×256 であり，濃度値は $0\leq f(x,y)\leq 255$ の整数値である．図 1 (a)に示す 2 値円画像に非整数次ラプラシアンを適用した結果を図 2 に示す．一般に，導関数は負の値を取りうることから，図 2 では，最小濃度値と

(a)　　(b)

図 1　(a) 2 値円画像と (b) 標準画像 Lenna



(a)　$\nu=0.5$　(b)　$\nu=1$　(c)　$\nu=1.5$　(d)　$\nu=2$

図２　２値円画像の等方性非整数次導関数の濃度スケール表示

(a)　$\nu=0.5$　(b)　$\nu=1$　(c)　$\nu=1.5$　(d)　$\nu=2$

図３　標準画像の等方性非整数次導関数の濃度スケール表示

最大濃度値をそれぞれ０と１に対応させる線形スケーリングを行って表示してあり，これを濃度スケール表示と呼ぶことにする．この図において，$\nu=2$ の場合が本来のラプラシアンに負号をつけたものに相当するが，$\nu\neq2$ においても，円周上の境界線の内側にオーバーシュート（明部）が，また外側にアンダーシュート（暗部）が，いずれも等方的に生じていることが分かる．

同様の演算を，図１(b)に示す標準画像 Lenna に適用した結果の濃度スケール表示を図３に示す．この結果においても，画像内の各エッジ部が ν の値に応じた度合いで，正しい位置に抽出されている．また，$\nu<2$ においては，ν が小さいほど，原画像中のゆっくりと変化している部分のトーンが残されている．

４．等方性非整数次導関数によるアンシャープマスキング

画像のラプラシアンを用いたアンシャープマスキングは，式(2)と式(8)から，

$$\begin{aligned} f_s(x,y)&=f(x,y)-k\nabla^2 f(x,y)\\ &=(1-k\nabla^2)f(x,y) \end{aligned} \tag{14}$$

と表すことができる．ただし，k（≥0)は，鮮鋭化の度合いを調整するために導入した係数である．式(13)を用いて式(14)を拡張することにより，非整数次ラプラシアンによる鮮鋭化

$$\begin{aligned} f_s(x,y)&=f(x,y)+kD_{\circ}^{\nu}f(x,y)\\ &=(1+kD_{\circ}^{\nu})f(x,y)\\ &=\mathcal{F}^{-1}[\{1+k(2\pi\rho)^{\nu}\}F(\xi,\eta)] \end{aligned} \tag{15}$$

を定義することができる．

本論文では，この式を用いた鮮鋭化処理が，k，ν，およびぼけの度合いによってどのような特性を示すかを考察し，適度な鮮鋭化を与えるパラメータ k，ν の値について検討する．このため，画像 Lenna にガウス型の低域通過空間周波数フィルタ

$$G(\rho)=\exp(-\rho^2/w^2) \tag{16}$$

を適用することにより，ぼけを伴う画像を作成し，それに対して鮮鋭化処理を行う．ここで，w はガウス関数の幅であり，ぼけに対するカットオフ周波数は $w/\sqrt{2}$で与えられる．

式(16)を用い，$w=60$ および 30 として，図１(b)に対して平滑化を行った結果を，それぞれ図４(a)および(b)に示す．したがって，図４(b)の画像の周波数帯域は，図４(a)の場合の半分である．図４(a)は，鮮鋭化処理の基本的特性を調べるために中程度の

(a)　　(b)

図 4　図 1 (b) を (a) 中程度に，および (b) 強く平滑化した画像

平滑化を行ったものであり，また，同図(b)は，さらに強いぼけを被った画像に対する鮮鋭化の効果を調べるためのものである．

本節では，図 4 (a)および図 4 (b)に対して，次数 $\nu=1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ の非整数次ラプラシアンを用いた鮮鋭化を行い，各次数に対して適当と思われる係数 k の値を検討する．

4.1　中程度平滑化画像の鮮鋭化

まず，図 4 (a)に示す，$w=60$ の中程度に平滑化された画像の鮮鋭化について考える．

次数 $\nu=1.0$ を用いた場合に，比較的良好な画像を与えていると思われる 4 つの異なる k の値を用いた鮮鋭化結果を図 5 (a)−(d)に示す．用いた k の値は，図に示してある．図 5 (a)では，平滑化前の原画像である図 1 (b)よりも，肩の肌や帽子が滑らかになっている．図 5 (b)は少し改善が見られるが，まだ帽子の横皺が十分に明瞭になっていない．図 5 (d)では，逆にコントラストが原画像以上に強く表示されている．このため，図 5 (a)，(b)，および(d)は，原画像に近い状態に鮮鋭化するという観点からは，鮮鋭化が不十分あるいは過剰であり，$\nu=1.0$ においては図 5 (c)を与える $k=5.0\times10^{-3}$ が最適な重み係数であると判断される．

次に，$\nu=2.0$ の場合について検討する．検討対象になる 4 つの結果を，図 6 (a)−(d)に示す．$\nu=1.0$ の場合と同様，図 6 (a)および(b)では全体的に滑らかな画像になっており，同図(d)では，コントラストが全体的に強く表示されている．したがって，$\nu=2.0$ においては，図 6 (c)を与える $k=1.8\times10^{-5}$ が最適な鮮鋭化処理を与える重み係数であると判断される．

同様に，$\nu=3.0$ の場合である図 7 (a)−(d)においては，同図(b)の $k=4.5\times10^{-8}$ が最も良好な鮮鋭化を与えている．最後に，図 8 (a)−(d)に示す $\nu=4.0$ の場合においては，同図(c)の $k=8.0\times10^{-11}$ を最適な重み係数と判断する．

以上，$\nu=1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ の 4 つの次数に対して検討を行った結果，$\nu=1.0, 2.0$ に比べて，$\nu=3.0, 4.0$ のように高い微分次数を用いた方が，より原画像に近い状態に鮮鋭化された画像が得られることが分かった．また，このような，中程度の平滑化画像であれば，従来のラプラシアンである $\nu=2.0$ よりも高い次数を用いることにより，ほぼ原画像と変わらない程度にまで回復が可能でり，実数次に拡張したラプラシアンを用いた鮮鋭化の有効性が示された．

4.2　強度平滑化画像の鮮鋭化

次に，強く平滑化した画像である図 4 (b)に対する鮮鋭化について検討を行う．

まず，$\nu=1.0$ の場合に対して，適当と思われる係数 k の値を検討する．比較的良好な結果を与える 4 つの場合を図 9 (a)−(d)に示す．この図に示すように，平滑化が強くなると，鮮鋭化処理による原画像の回復は，前節の場合ほど良好な結果とはならない．また，重み係数 k も，図 5 の場合よりも，若干高い数値になっている．図 9 (a)−(d)は，いずれも鮮鋭化は不十分であるが，その中で比較するならば，図 9 (a)はエッジがぼやけ過ぎている一方，同図(c)および(d)では，コントラストが過度になっている．したがって，$\nu=1.0$ においては図 9 (b)である $k=8.0\times10^{-3}$ が最適値であると判断される．

次に，$\nu=2.0$ を用いて同様の計算を行った結果を図 10 (a)−(d)に示す．$\nu=2.0$ においても，$\nu=1.0$ の場合と比較して鮮鋭な画像が得られるものの，原画像の細部を再現する画像とはなっていない．図 10 (a)は，まだ不鮮明さが強い一方，(c)および(d)はコントラストが高すぎると思われる．したがって，$\nu=2.0$ においては，図 10 (b)である $k=7.5\times10^{-5}$ が，最適なエッジ強調の度合いを与える重み係数であると判断される．

$\nu=3.0$ の場合，図 11 (a)−(d)に示すように，$\nu=1.0$ および 2.0 の場合よりも良好な画像が得られている．その中でも，図 11 (c)の $k=4.5\times10^{-7}$ が重み係数の最適値であると思われる．

最後に，$\nu=4.0$ においては，図 12 (a)−(d)に示すように，$\nu=3.0$ よりもさらに画質が改善されてお

(a)　$k=3.0\times10^{-3}$　(b)　$k=4.0\times10^{-3}$　(c)　$k=5.0\times10^{-3}$　(d)　$k=6.0\times10^{-3}$

図 5　中程度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=1.0$）

(a)　$k=1.0\times10^{-5}$　(b)　$k=1.4\times10^{-5}$　(c)　$k=1.8\times10^{-5}$　(d)　$k=2.2\times10^{-5}$

図 6　中程度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=2.0$）

(a)　$k=4.0\times10^{-8}$　(b)　$k=4.5\times10^{-8}$　(c)　$k=5.0\times10^{-8}$　(d)　$k=5.5\times10^{-8}$

図 7　中程度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=3.0$）

(a)　$k=6.0\times10^{-11}$　(b)　$k=7.0\times10^{-11}$　(c)　$k=8.0\times10^{-11}$　(d)　$k=9.0\times10^{-11}$

図 8　中程度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=4.0$）

り，図 12(c)に用いた $k=2.0\times10^{-9}$ が最適な重み係数であると判断される．

したがって，強く平滑化された画像においても，従来のラプラシアンである $\nu=2.0$ あるいはそれより低い次数よりも，$\nu=3.0$，ないし $\nu=4.0$ のように高い次数の微分を用いた方が，より鮮鋭な画

(a)　$k=7.0\times10^{-3}$　(b)　$k=8.0\times10^{-3}$　(c)　$k=9.0\times10^{-3}$　(d)　$k=1.0\times10^{-2}$

図 9　強度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=1.0$）

(a)　$k=7.0\times10^{-5}$　(b)　$k=7.5\times10^{-5}$　(c)　$k=8.0\times10^{-5}$　(d)　$k=8.5\times10^{-5}$

図 10　強度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=2.0$）

(a)　$k=3.5\times10^{-7}$　(b)　$k=4.0\times10^{-7}$　(c)　$k=4.5\times10^{-7}$　(d)　$k=5.0\times10^{-7}$

図 11　強度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=3.0$）

(a)　$k=1.0\times10^{-9}$　(b)　$k=1.5\times10^{-9}$　(c)　$k=2.0\times10^{-9}$　(d)　$k=2.5\times10^{-9}$

図 12　強度平滑化画像の鮮鋭化処理結果（$\nu=4.0$）

像が得られることが分かる．しかし，画像の平滑化が強いほど，鮮鋭化処理による原画像の回復は難しい．

4.3　重み係数の見積り

前節では，異なる ν の値に対して，最適と思わ

れる係数 k の値を個別に調べた．その結果，ν の値や平滑化の度合いによって k の最適値は 10^{-2} から 10^{-9} のオーダーまで大きく変化しており，原画像が未知の対象に対して最適な k を定めるは困難である．このため，本節では，最適な k の値を見積もる方法について検討を行う．

k の値が，微分次数 ν に大きく依存する理由は，画像の導関数の値が次数によって大きく変化することにあると考えられる．実際，画像 Lenna について $D_{\circ}^{\nu}f(x,y)$ の絶対値の最大値

$$m=\max|D_{\circ}^{\nu}f(x,y)| \tag{17}$$

を計算すると，その値は 10^{3} から 10^{11} のオーダー間で変化し，次数が高いほどその値は大きいという結果が得られた．そこで，係数 k を

$$k=\frac{a}{m} \tag{18}$$

と表し，k の代わりに a を用いて重み係数を表すことを考える．式(18)を式(15)に代入して，

$$f_{s}(x,y)=f(x,y)+a\frac{D_{\circ}^{\nu}f(x,y)}{m} \tag{19}$$

と表すと，a は，非整数次ラプラシアンの項を m で規格化したものに対する重み係数であることが分かる．

実際に，中程度の平滑化画像に対する最適鮮鋭化を与えた k の値に対して a を計算した結果，

$$a=\begin{cases}87\ ;\ \nu=1.0\\ 86\ ;\ \nu=2.0\\ 76\ ;\ \nu=3.0\\ 67\ ;\ \nu=4.0\end{cases} \tag{20}$$

が得られた．これより，k の値は ν によって大きく変化するものの，係数 a は比較的安定した値となることが分かる．式(20)に示す a の値の平均値は $\langle a\rangle=79$ であり，各 a の値は $+10\%$（$\nu=1.0$），-15%（$\nu=4.0$）の比較的狭い範囲にある．図5−8で考察した k の値は，各 ν に対して，ある間隔で与えた4つの離散値から定めていること，また，最適値の決定には主観的な判断が含まれていることから，一定程度の不確かさを含んでいると考えられる．したがって，画像 Lenna を $w=60$ のガウス関数で中程度に平滑化した場合の鮮鋭化においては，重み係数を，ν に依らず，$a=79$ 程度とすることにより，ほぼ適切な鮮鋭化が行えると考えられる．

$w=30$ のガウス関数を用いた強度平滑化画像についても，同様に，各 ν の値に対して a を計算した結果，

$$a=\begin{cases}71\ ;\ \nu=1.0\\ 93\ ;\ \nu=2.0\\ 106\ ;\ \nu=3.0\\ 111\ ;\ \nu=4.0\end{cases} \tag{21}$$

が得られ，その平均値は $\langle a\rangle=96$ となった．式(21)の値は，この平均値に対して，$+16\%$（$\nu=4.0$），-26%（$\nu=1.0$）の範囲に広がっており，中程度の平滑化の場合よりもその広がりは大きい．したがって，画像 Lenna の $w=30$ のガウス関数による平滑化画像を鮮鋭化する場合には，$a=96$ 程度の値が一応の目安として使用可能であるが，その適否の判断は，得られた画像を見て適切に判断する必要があるといえる．

強く平滑化された画像では，鮮鋭化による原画像に近い画像の回復は困難であり，それゆえ，最適画質の判定も曖昧にならざるを得ないことからも，状況に応じた適切な係数の決定が必要とされる．原画像の回復は，本来 deconvolution によってなされるべきであり，鮮鋭化による原画像の回復はあくまで近似的かつ簡便な手段としてのみ有効である．しかしながら，拡張した次数を持つ本方法によれば，従来のラプラシアンによる鮮鋭化よりも良好な画像が得られることは注目に値する．

係数 a の値は，式(20)においては単調増加しており，式(21)においては単調減少している．このような一定の傾向にある係数を，それぞれ単一の平均値で置き換えることは，必ずしも適切ではないと考えられるが，本研究では視覚的な判断により最適な係数を推定していることから，これ以上の定量的な考察は行わないこととする．

5．空間周波数に基づく考察

本節では，フーリエ空間における空間周波数に基づいて，非整数次ラプラシアンによるアンシャープマスキング処理の特性を考察する．

式(16)に示したガウス型低域通過フィルタ関数を，中程度の平滑化に用いた $w=60$ の場合について図13(a)に示す．横軸は，画素単位で表した空間周波数 ξ_{i} であり，たとえば $\xi_{i}=50$ は，原画像の横幅内に50 line pairs が入る周波数を意味する．また，原画像 Lenna のパワースペクトル $|F(\xi,\eta)|^{2}$

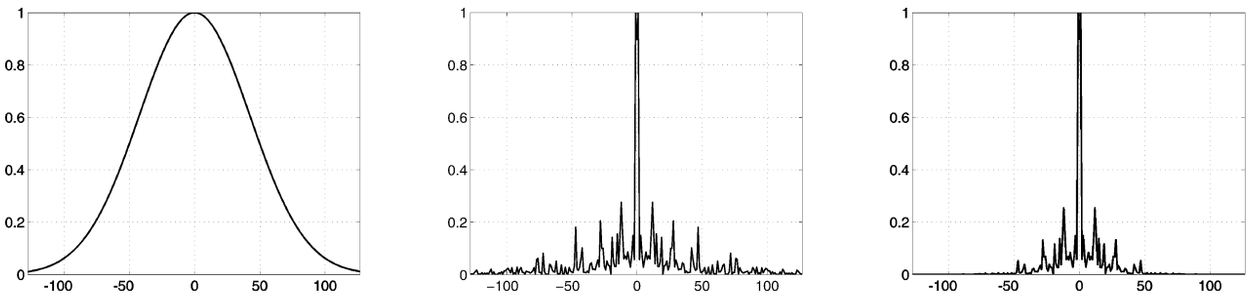
の ξ 軸上の断面 $|F(\xi,0)|^2$ を図 13 (b)に，この画像にガウス型フィルタを適用して生成した中程度平滑化画像のパワースペクトルの断面図を同図(c)に示す．ただし，表示上の簡略化のため，最大値で規格化してある．図 13 (c)のパワースペクトルは，$w=60$ という値に対応して，$\xi_i>50$ の高周波成分が特に強く減衰していることが分かる．

この平滑化画像を鮮鋭化するために用いた非整数次ラプラシアンフィルタのフィルタ関数 $(2\pi\rho)^\nu$ の ξ 軸上の断面，すなわち $(2\pi\xi)^\nu$ を 4 つの ν の値に対して表示した結果を図 14 (a)−(d)に示す．ただし，図 13 (b)および(c)がパワースペクトルであることに対応させるため，図 14 にはフィルタ関数の 2 乗を表示してある．

図 14 に示すように，ν の値が大きいほど，高周波数領域での関数の立ち上がりが急激になっている．なお，ν が大きいほど低周波領域を抑制するように見えるが，これは表示範囲の最大値を 1 に規格化したことによるみかけ上の現象であり，フィルタ関数は，$\xi_i>(2\pi)^{-1}$ において常に 1 より大きいことに注意する必要がある．

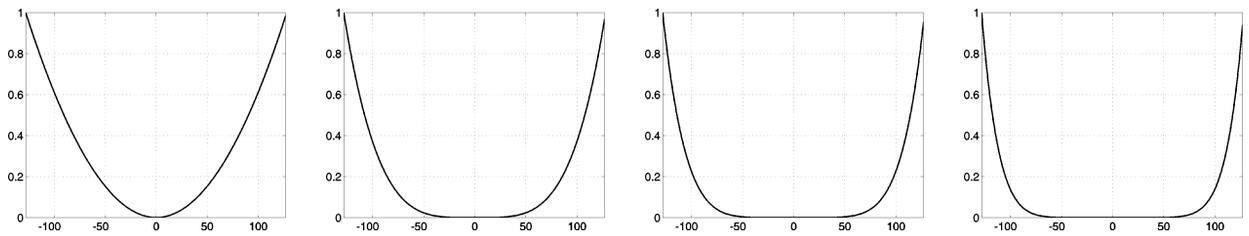
図 15 (a)−(d)を比較すると，$\nu=1.0$ および 2.0 においては，$\xi_i<50$ の中低域の周波数成分が，原画像よりも大きくなっており，$\xi_i>50$ の高周波成分を十分に回復できないことによる鮮鋭度の不足分を，この中低周波成分の強調により補っているものと考えられる．$\nu=3.0$ では，この点がある程度改善され，$\nu=4.0$ においては，$\xi_i>100$ の高周波端の除いて，ほぼ原画像と同じパワースペクトルが回復されていることが分かる．このことからも，$\nu=2$ に相当する従来のラプラシアンを用いたアンシャープマスキングに対する本方法の優位性が分かる．

一方，図 4 (b)の強度平滑化画像に用いた幅 $w=30$ のガウス型フィルタ関数を図 16 (a)に，原画像のパワースペクトルの ξ 軸断面図を同図(b)に，平



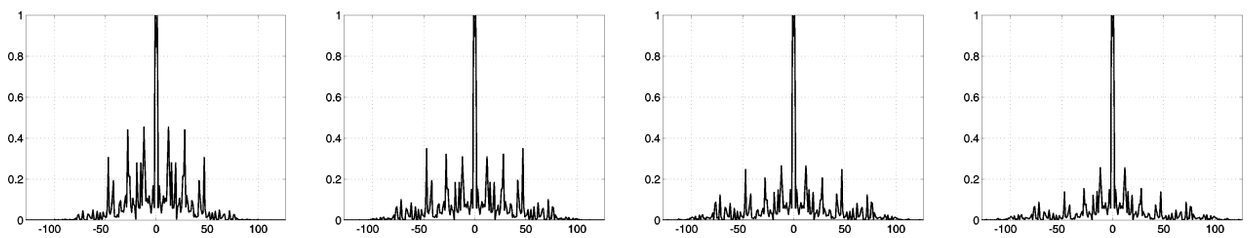
(a)　(b)　(c)

図 13　(a) $w=60$ のガウス型フィルタ関数と，(b) 標準画像 Lenna および (c) その中程度平滑化画像のパワースペクトル



(a)　$\nu=1.0$　(b)　$\nu=2.0$　(c)　$\nu=3.0$　(d)　$\nu=4.0$

図 14　等方性非整数次微分のフィルタ関数の 2 乗（ξ 軸断面）



(a)　$\nu=1.0$　(b)　$\nu=2.0$　(c)　$\nu=3.0$　(d)　$\nu=4.0$

図 15　係数 k（適正値）の鮮鋭化画像（$w=60$）のパワースペクトル

滑化された画像のパワースペクトルの断面を同図(c)に示す．

この強度平滑化画像に対して，個別に定めた k の最適値を用いて求めたパワースペクトルを，ν の各値に対してプロットした結果を図 17(a)−(d)に示す．$\nu=1.0$ や $\nu=2.0$ では，図 14 に示すように，フィルタの高周波領域の立ち上がりが弱いため，高周波成分の十分な回復ができず，図 15(a)および(b)の場合以上に中低周波成分を強調して，見かけ上の鮮鋭度を補っていることがわかる．$\nu=3.0$ や $\nu=4.0$ においても，高周波成分の十分な回復はなされていないが，これらの次数が持つ強い高周波強調効果により，$\xi_i>50$ の周波数成分が一部回復され，それにより中低周波成分の過剰な強調は相当程度抑制されている．$\nu>4.0$ のより高次のラプラシアンを用いることにより，さらに若干の高周波成分の回復が可能であると考えられるが，図 16(a)に示すように，高周波成分はガウス関数の裾により急速に減衰し，実質的に消失しており，べき関数型の高域通過フィルタによるアンシャープマスキングでも，その回復には限界がある．

このように，$w=30$ という強い平滑化を被った場合，従来のラプラシアンよりも大きい微分次数を用いることにより，従来法に比べて良好な鮮鋭化を行える可能性があることが示された．

6．おわりに

焦点ずれなどの原因によりぼけを生じた画像を鮮鋭化する方法として従来用いられているアンシャープマスキングの手法を改善することを目的に，それに用いられる代表的な高域通過フィルタであるラプラシアン型フィルタを等方性非整数次導関数に置き換える方法を提案した．

この方法は，通常用いられる他の高域通過フィルタとは異なり，特定のカットオフ周波数を持たない点で，ラプラシアンと性質を共有し，等方性を維持しつつ，微分の次数をラプラシアンの 2 から非整数を含む任意の実数に拡張する点で，従来のラプラシアンによるアンシャープマスキング法に優る特性を有している．

この方法の有効性を確認するため，標準画像 Lenna の平滑化画像に対する鮮鋭化処理を行った．平滑化は，中程度および強度の 2 つの異なる度合いで行い，各画像に対して，1.0，2.0，3.0，4.0 の各微分次数による非整数次ラプラシアンを用いた鮮鋭化を行った．非整数の次数も可能であるが，次数が大きく異なることによる特性の違いを調べるため，本報告ではこの範囲の整数次数を用いた．各次数に対して，非整数次ラプラシアンの項に対する重み係数を変えながら画像を生成し，原画像と比較しながら，画像細部の再現性や

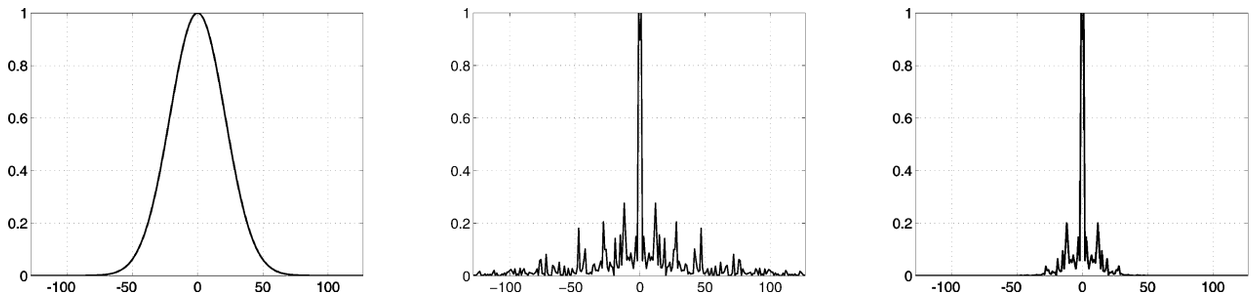
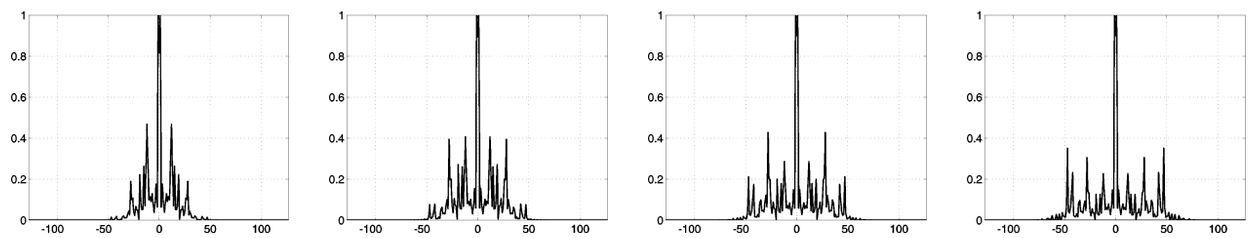


図 16　(a) $w=30$ のガウス型フィルタ関数と，(b) 標準画像 Lenna および (c) 強く平滑化した標準画像 Lenna のパワースペクトル



(a)　$\nu=1.0$　(b)　$\nu=2.0$　(c)　$\nu=3.0$　(d)　$\nu=4.0$

図 17　係数 k（適正値）の鮮鋭化画像（$w=30$）のパワースペクトル

全体のコントラストなどに注目した視覚的判断により，最適な重み係数を決定した．

その結果，中程度および強度平滑化画像のいずれにおいても，次数 1.0 や，従来のラプラシアンに対応する次数 2.0 に比べて，次数 3.0 および 4.0 による鮮鋭化の方が良好な鮮鋭化画像を与えた．また，後者の中では，次数 4.0 がよりよい結果を与えた．中程度平滑化画像においては，高い次数を用いることにより，原画像とほぼ同じ画質にまで鮮鋭化がなされた．一方，強度平滑化画像においては，高い次数の方が良好な結果を与えたものの，原画像に同程度までには鮮鋭化されなかった．

最適な鮮鋭化画像を与える重み係数については，等方的非整数次導関数をその絶対値の最大値で規格化した関数に対する重み係数を用いることで，中程度および強度平滑化画像のそれぞれにおいて，80 程度および 100 程度の値を得た．

本方法による鮮鋭化の特性を空間周波数の観点から明らかにするため，画像のパワースペクトルの振る舞いについて考察を行った．その結果，中程度平滑化画像においては，次数 1.0 および 2.0 の比較的低い次数による鮮鋭化では，高周波成分の回復が不十分であり，それによる鮮鋭度の不足を中低周波成分の過度な強調により補うことで，全体的な視覚的鮮鋭度を高めていることが分かった．これに対して，次数 3.0 および 4.0 の高い次数を用いた鮮鋭化では，高周波成分も適切に回復され，中低周波成分も原画像のスペクトルと同程度の回復に留まることが示された．一方，強度平滑化画像においては，高い次数を用いた場合，原画像と同程度までの高周波成分の回復は達成できないものの，より低い次数を用いた場合に比べて，中低周波成分の過度の強調が抑えられ，比較的自然な鮮鋭化画像が実現されることが明らかとなった．

以上のことから，従来の次数 2.0 を用いたラプラシアンフィルタによるアンシャープマスキングに比べて，高い次数まで利用可能な非整数次ラプラシアンによるアンシャープマスキング方の有効性が示された．

【参考文献】

1）R. C. Gonzalez and R. E. Woods: Digital Image Processing, Third Edition, Pearson, 2008, pp. 160-165.

2）同上，pp. 280-288.

3）高木幹雄，下田陽久：新編　画像解析ハンドブック，東京大学出版会，2004，p. 1227.

4）I. Bodlubny: Fractional Differential Equations, Academic, 1999.

5）森口繁一・他：数学公式Ｉ，岩波書店，1956，p. 52.

6）魚住　純：FFT による 2 次元画像の非整数次微分処理（Ｉ）―１次元導関数―，工学研究（北海学園大学大学院工学研究科紀要），7，pp. 49-59，2007.

7）魚住　純：FFT による 2 次元画像の非整数次微分処理（II）―２次元導関数―，工学研究（北海学園大学大学院工学研究科紀要），7，pp. 61-72，2007.