タイトル	平均対数偏差と人口動態効果
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，67(1)：17-36
発行日	2019-06-30

《論説》

平均対数偏差と人口動態効果

木　村　和　範*

〈要旨〉

ムッカジーとショロックスの方式によって平均対数偏差の２時点間変化は，級内変動，級間変動，人口動態効果の３つに要因分解される。本稿では，人口動態効果が２時点間の級内変動の差の一部と２時点間の級内変動の差の一部の和であることを述べて，人口動態効果の実体的基礎を明らかにする。そして，年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が正（負）であるにもかかわらず，当該年齢階級の人口動態効果の値が，逆に負（正）になり得ること（場合によってはゼロにもなり得ること）を数学的に証明するとともに，そのことを数値例で示す。もって，ムッカジーとショロックスの方式による平均対数偏差が計測するとされる人口動態効果の有効性にたいして疑義を提起する。

〈Abstract〉

Mookhergee-Shorrocksian decomposition of the difference in mean log deviation at two different time points reveals intra-class variation, inter-class variation, and the effect of population ageing (hereafter EPA). This paper asserts that the EPA is the sum of a part of the intra-class variation difference between two time points and a part of the intra-class variation difference between the same two time points. The author contests the utility of such a decomposition, demonstrating that the Mookhergee-Shorrocksian numerical value of EPA for one or more age class(es) of households could be negative or zero in spite of the increase in the household-share concerned.

〈叙述の順序〉

*　北海学園大学名誉教授

はじめに

基準時点と比較時点における平均対数偏差（${}^0MLD$ と ${}^tMLD$）をそれぞれ計算しても，それだけでは，人口動態効果を算出できないこと，人口動態効果は平均対数偏差の２時点変化

$$\Delta MLD = {}^tMLD - {}^0MLD$$

にかんする要因分解式によって検出できることを，はじめて主張したムッカジーとショロックスの業績(1)は，人口構成の変化があたえる所得分布への影響にかんする先駆的研究と位置づけることができる。

本稿では，その要因分解式の有効性にかんする考察(2)をさらに深めるべく，要因分解式が検出するとされる人口動態効果に論点を限定する。そして，ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式が計測する人口動態効果の実体的基礎を明らかにする。その後，仮設した数値例を用いて，この方式によって導出される人口動態効果が「見かけ上」の格差拡大・縮小の計測指標たり得るかどうかを検討する。

１．平均対数偏差の要因分解(3)

(1)　単一時点

基準時点における所得（${}^0x_i, i=1,2,\ldots,{}^0N$；単位：百万円）の分布にかんする平均対数偏差（全年齢階級）を ${}^0MLD$ とし，比較時点における ${}^tx_i$（$i=1,2,\ldots,{}^tN$；単位：百万円）については ${}^tMLD$ とする。そして，${}^0MLD$ にたいする第 j 年齢階級の寄与分を

(1)　Mookherjee, D. and Shorrocks, A. F., “A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality,” *The Economic Journal*, Vol. 92, 1982. この論文における要因分解式の誘導については，「不平等，格差の分析手法　対数標準偏差　シュロックス分解」(http://takamasa.at.webry.info/200805/article_html, accessed on Jan. 18, 2018）が参考になる（cf. 木村和範「所得格差の変動にたいする人口動態効果の計測」『経済論集』（北海学園大学経済学部）第 66 巻第 1 号，2018 年 6 月（木村(2018a)）。平均対数偏差（およびその２時点間変化（差））の要因分解式については，ムッカジーとショロックの方式とは異なる別解も誘導されている（同「人口構成の変化と所得分布」同上，第 66 巻第 2 号，2018 年 9 月（木村(2018b)）。

(2)　木村和範「平均対数偏差の要因分解」『経済論集』（北海学園大学経済学部），第 66 巻第 4 号（小坂直人教授・野嵜久和教授退職記念号），2019 年 3 月（木村(2019)）。

(3)　次項で取り上げる MLD の２時点間変化（$\Delta MLD = {}^tMLD - {}^0MLD$）にかんする要因分解式を含め，本稿で使用した文字の意味については，木村（2019）参照。なお，MLD の定義式

$$MLD = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\log \bar{x} - \log x_i)$$

には，対数の真数条件により，統計系列を構成するすべての項の値が正であること（$x_i > 0$）が含意されている。したがって，基準時点および比較時点における所得分布の相加平均と相乗平均は正であり，また年齢階級別所得分布の相加平均と相乗平均も正である。

${}^{0MLD}C_j$とし，${}^{t}MLD$にたいする第j年齢階級の寄与分を${}^{tMLD}C_j$とする。このとき，ムッカジーとショロックスの方式による単一時点における平均対数偏差の要因分解式[4]は，以下のとおりである（対数の底は1以上とする）。

基準時点

全年齢階級

$${}^{0}MLD=\frac{1}{{}^{0}N}\sum_{i=1}^{{}^{0}N}(\log {}^{0}\overline{x}-\log {}^{0}x_i)$$

$$=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{0}p_j\,(\log {}^{0}\overline{x}-\log {}^{0}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}} \quad (1\text{-}1)$$

年齢階級別寄与分

$${}^{0MLD}C_j=\overbrace{{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{{}^{0}p_j\,(\log {}^{0}\overline{x}-\log {}^{0}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}} \quad (1\text{-}2)$$

比較時点

全年齢階級

$${}^{t}MLD=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j\cdot{}^{t}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{t}p_j\,(\log {}^{t}\overline{x}-\log {}^{t}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}} \quad (1\text{-}3)$$

年齢階級別寄与分

$${}^{tMLD}C_j=\overbrace{{}^{t}p_j\cdot{}^{t}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{{}^{t}p_j\,(\log {}^{t}\overline{x}-\log {}^{t}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}} \quad (1\text{-}4)$$

(2)　2時点間の差

全年齢階級の所得分布の平均対数偏差にかんする2時点間変化

$$\Delta MLD={}^{t}MLD-{}^{0}MLD$$

を要因分解するには，それに先立って年齢階級別寄与分の差

$${}^{\Delta MLD}C_j={}^{tMLD}C_j-{}^{0MLD}C_j$$

を分解すればよい。ΔMLDは，年齢階級別寄与分の差の総和

$$\Delta MLD=\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}C_j$$

としてあたえられるからである。

ΔMLDにたいする年齢階級別寄与分の差（${}^{\Delta MLD}C_j$）は以下のように要因分解される[5]。この誘導は，すでに明らかである。あえて，屋上屋を架するのは，要因分解式の誘導過程のなかに，人口動態効果の数学的性質を解明する糸口があるからである。

$${}^{\Delta MLD}C_j={}^{tMLD}C_j-{}^{0MLD}C_j$$

$$=\overbrace{\left\{\overbrace{{}^{t}p_j\cdot{}^{t}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{{}^{t}p_j\,(\log {}^{t}\overline{x}-\log {}^{t}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{比較時点［(1-4)式］}}$$

$$-\overbrace{\left\{\overbrace{{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{{}^{0}p_j\,(\log {}^{0}\overline{x}-\log {}^{0}\overline{x}_j)}^{\text{級間変動}}\right\}}^{\text{基準時点［(1-2)式］}}$$

$$=\overbrace{({}^{t}p_j\cdot{}^{t}MLD_j-{}^{0}p_j\cdot{}^{0}MLD_j)}^{\text{級内変動の差［(1-5)式第1項］}}$$

$$+\overbrace{\{{}^{t}p_j\,(\log {}^{t}\overline{x}-\log {}^{t}\overline{x}_j)-{}^{0}p_j\,(\log {}^{0}\overline{x}-\log {}^{0}\overline{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差［(1-5)式第2項］}} \quad (1\text{-}5)$$

ここで，(1-5)式の第1項と第2項が，それぞれ，恒等式

$$a_1b_1-a_2b_2\equiv\frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2)+\frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2) \quad (1\text{-}6)$$

と同型であることに着目して，(1-5)式を整理する。

(4)　木村（2018a：31頁以下）

(5)　木村（2018a：34頁以下）

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}C_j \\
=&\overbrace{\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)\\&+\frac{1}{2}({}^tp_j-{}^0p_j)({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\end{aligned}\right\}}^{\text{級内変動の差((1-6)式によって変形した(1-5)式第1項)[(1-7)式第1項]}}\\
&+\overbrace{\left[\begin{aligned}&\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^t\overline{x}_j)-(\log{}^0\overline{x}-\log{}^0\overline{x}_j)\}\\&+\frac{1}{2}({}^tp_j-{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^t\overline{x}_j)+(\log{}^0\overline{x}-\log{}^0\overline{x}_j)\}\end{aligned}\right]}^{\text{級間変動の差((1-6)式によって変形した(1-5)式第2項)[(1-7)式第2項]}}
\end{aligned}
\tag{1-7}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)}^{\text{級内変動の差((1-7)式第1項)の一部[(1-8)式第1項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j-{}^0p_j)({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)}^{\text{級内変動の差((1-7)式第1項)の一部[(1-8)式第2項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^t\overline{x}_j)-(\log{}^0\overline{x}-\log{}^0\overline{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差((1-7)式第2項)の一部[(1-8)式第3項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j-{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^t\overline{x}_j)+(\log{}^0\overline{x}-\log{}^0\overline{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差((1-7)式第2項)の一部[(1-8)式第4項]}}
\end{aligned}
\tag{1-8}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)}^{\text{級内変動の差の一部((1-8)式第1項)[(1-9)式第1項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^0\overline{x})-(\log{}^t\overline{x}_j-\log{}^0\overline{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差の一部(項を入れ換えた(1-8)式第3項)[(1-9)式第2項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)({}^tp_j-{}^0p_j)}^{\text{級内変動の差の一部(項を入れ換えた(1-8)第2項)[(1-9)式第3項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}\{(\log{}^t\overline{x}+\log{}^0\overline{x})-(\log{}^t\overline{x}_j+\log{}^0\overline{x}_j)\}({}^tp_j-{}^0p_j)}^{\text{級間変動の差の一部(項を入れ換えた(1-8)式第4項)[(1-9)式第4項]}}
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)({}^tMLD_j-{}^0MLD_j)}^{\text{級内変動の差の一部((1-9)式第1項)[(1-10)式第1項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\{(\log{}^t\overline{x}-\log{}^0\overline{x})-(\log{}^t\overline{x}_j-\log{}^0\overline{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差の一部((1-9)式第2項)[(1-10)式第2項]}}\\
&+\overbrace{\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)({}^tp_j-{}^0p_j)}^{\text{級内変動の差の一部((1-9)式第3項)[(1-10)式第3項]}}\\
&+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}+\log{}^0\overline{x})-\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}_j+\log{}^0\overline{x}_j)\right\}({}^tp_j-{}^0p_j)}^{\text{級間変動の差の一部(変形した(1-9)式第4項)[(1-10)式第4項]}}
\end{aligned}
\tag{1-10}
$$

ここで，次のようにおく。

$$
\begin{aligned}
\overline{p}_j&=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\\
\Delta p_j&={}^tp_j-{}^0p_j\\
\overline{MLD}_j&=\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\\
\Delta MLD_j&={}^tMLD_j-{}^0MLD_j\\
\Delta\log\overline{x}&=\log{}^t\overline{x}-\log{}^0\overline{x}\\
\Delta\log\overline{x}_j&=\log{}^t\overline{x}_j-\log{}^0\overline{x}_j\\
\overline{\log\overline{x}}&=\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}+\log{}^0\overline{x})\\
\overline{\log\overline{x}_j}&=\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}_j+\log{}^0\overline{x}_j)
\end{aligned}
\tag{1-11}
$$

(1-11)式を(1-10)式に代入すると，次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}C_j\\
=&\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\substack{\text{級内変動の差の一部((1-10)式第1項)}\\ \text{[(1-12)式第1項]}}}\\
&+\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動の差の一部((1-10)式第2項)}\\ \text{[(1-12)式第2項]}}}\\
&+\overbrace{\overline{MLD}_j\cdot\Delta p_j}^{\substack{\text{級内変動の差の一部((1-10)式第3項)}\\ \text{[(1-12)式第3項]}}}\\
&+\overbrace{(\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j})\Delta p_j}^{\substack{\text{級内変動の差の一部((1-10)式第4項)}\\ \text{[(1-12)式第4項]}}}
\end{aligned}
\tag{1-12}
$$

$$
=\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\substack{\text{級内変動(第}j\text{年齢階級)((1-12)式第1項)}\\ \text{[(1-13)式第1項]}\\ {}^{\Delta MLD}_{Intra}C_j}}
$$

$$+\quad \overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\substack{\text{級間変動(第}j\text{年齢階級)((1-12)式第2項)}\\ \text{[(1-13)式第2項]}\\ {}^{\Delta MLD}_{Inter}C_j}}$$

$$+\quad \overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)((1-12)式第3項+(1-12)式第4項)}\\ \text{[(1-13)式第3項]}\\ {}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j}} \tag{1-13}$$

この(1-13)式は，ムカッジーとショロックスの方式によって誘導される平均対数偏差の差の要因分解式として，つとに明らかである。ここまでは目新しいことは何もない。

全年齢階級にかんする級内変動，級間変動，人口動態効果は，それぞれ，年齢階級別の級内変動，級間変動，人口動態効果の総和としてあたえられる。(1-13)式により，全年齢階級にかんする平均対数偏差の2時点間変化(ΔMLD)は，以下のように要因分解される。これもまた，すでに明らかである。

$$\begin{aligned}
&\Delta MLD\\
&=\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}C_j\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Intra}C_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Inter}C_j}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\,(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
\end{aligned}\tag{1-14}$$

2．人口動態効果

(1)　級内変動の差の一部と級間変動の差の一部の和としての人口動態効果

年齢階級別人口動態効果の数学的性質を考察するには，(1-13)式における人口動態効果(${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$)の数式

$$\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j$$

によるよりも，そこに至る数式展開の過程を(1-10)式まで遡及して，年齢階級別人口動態効果の源泉から出発するほうが，事柄は明確になる。前節で，あえて年齢階級別人口動態効果の誘導過程を再掲した理由は，そこにある。

前節から明らかなように，${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$については，以下の恒等式が成立する。

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\substack{\text{人口動態効果(第}j\text{年齢階級)}\\ \text{[(1-13)式第3項]}}}\\
&\equiv\overbrace{\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)}^{\substack{\text{級内変動の差の一部}\\ \text{[(1-10)式第3項]}}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}+\log{}^{0}\bar{x})-\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}_j+\log{}^{0}\bar{x}_j)\right\}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j)}^{\substack{\text{級間変動の差の一部}\\ \text{[(1-10)式第4項]}}}
\end{aligned}$$

ここから次のことが明らかになる。すなわち，(1-5)式を起点として，(1-11)式による置換を経て，要因分解式としての(1-13)式を誘導する過程を見れば，その(1-13)式が表す年齢階級別人口動態効果(${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$)には，2つの源泉があることが分かる。

第1の源泉は，全年齢階級の平均対数偏差の2時点間変化(ΔMLD)にたいする年齢階級別寄与分(${}^{\Delta MLD}C_j$)

$$^{\Delta MLD}C_j = \overbrace{({}^t p_j \cdot {}^t MLD_j - {}^0 p_j \cdot {}^0 MLD_j)}^{\text{級内変動の差[(1-5)式第1項]}}$$
$$+\overbrace{\{{}^t p_j(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) - {}^0 p_j(\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差[(1-5)式第2項]}}$$
(1-5)式[再掲]

を構成する級内変動の差

$$\overbrace{({}^t p_j \cdot {}^t MLD_j - {}^0 p_j \cdot {}^0 MLD_j)}^{\text{級内変動の差[(1-5)式第1項]}}$$

を，恒等式

$$a_1b_1 - a_2b_2 \equiv \frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2) + \frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)$$
(1-6)[再掲]

によって整理したときに得られる

$$\overbrace{\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)({}^t MLD_j - {}^0 MLD_j)\\ &+\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)\end{aligned}\right\}}^{\text{級内変動の差[(1-7)式第1項]}}$$

の一部，すなわち

$$\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)$$
$$= \overbrace{\frac{1}{2}({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)({}^t p_j - {}^0 p_j)}^{\text{(1-10)式第3項}} \qquad (2\text{-}1)$$

である。

年齢階級別人口動態効果の第 2 の源泉は，

$$^{\Delta MLD}C_j$$
$$= \overbrace{({}^t p_j \cdot {}^t MLD_j - {}^0 p_j \cdot {}^0 MLD_j)}^{\text{級内変動の差[(1-5)式第1項]}}$$
$$+\overbrace{\{{}^t p_j(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) - {}^0 p_j(\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差[(1-5)式第2項]}}$$
(1-5)式[再掲]

を構成する級間変動の差

$$\overbrace{\{{}^t p_j(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) - {}^0 p_j(\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}}^{\text{級間変動の差[(1-5)式第2項]}}$$

を，同じ恒等式

$$a_1b_1 - a_2b_2 \equiv \frac{1}{2}(a_1+a_2)(b_1-b_2) + \frac{1}{2}(a_1-a_2)(b_1+b_2)$$
(1-6)[再掲]

を用いて整理することによって得られる

$$\overbrace{\left[\begin{aligned}&\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)\{(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) - (\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}\\ &+\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)\{(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) + (\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}\end{aligned}\right]}^{\text{級間変動の差[(1-7)式第2項]}}$$

の一部，すなわち

$$\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)\{(\log {}^t\bar{x} - \log {}^t\bar{x}_j) + (\log {}^0\bar{x} - \log {}^0\bar{x}_j)\}$$
$$= \overbrace{\left\{\frac{1}{2}(\log {}^t\bar{x} + \log {}^0\bar{x}) - \frac{1}{2}(\log {}^t\bar{x}_j + \log {}^0\bar{x}_j)\right\}({}^t p_j - {}^0 p_j)}^{\text{(1-10)式第4項}}$$
(2-2)

である。

要するに，年齢階級別人口動態効果（$^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の源泉は，次の 2 式

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)({}^t p_j - {}^0 p_j) &&(2\text{-}1)[\text{再掲}]\\ &\left\{\frac{1}{2}(\log {}^t\bar{x} + \log {}^0\bar{x}) - \frac{1}{2}(\log {}^t\bar{x}_j + \log {}^0\bar{x}_j)\right\}({}^t p_j - {}^0 p_j)\end{aligned}\right.$$
(2-2)[再掲]

である。(2-1)式と(2-2)式のいずれもが，現実の（全年齢階級および年齢階級別の）所得分布と年齢階級別世帯シェアの変化から計算される。この意味で(2-1)式と(2-2)式には，実体的基礎がある。このために，これらを合算して得られる年齢階級別人口動態効果にも実体的基礎が存在し，その総和としての全年齢階級の人口動態効果もまた実体的基礎を有すことになる。以上，人口動態効果の対象反映性について述べた。

その上で検討すべきは，このような実体的基礎を有する人口動態効果が，世帯シェアの

変化によってもたらされる所得分布の変化（格差の拡大・縮小）を計測するにふさわしい実質的意味をもちうるかどうか，ということである。この考察にあたっては，一般に平均対数偏差（全年齢階級）の2時点間変化（ΔMLD）が大きいほど格差が拡大し，逆にΔMLDが小さくなれば，それだけ格差が縮小すると考えられていることを想起する。このことにもとづいて人口動態効果を考察するために，(1-14)式を再掲する。

$$
\begin{aligned}
&\Delta MLD\\
&=\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}C_j\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Intra}C_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Inter}C_j}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}\\
&=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\bar{p}_j(\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j)}^{\text{級間変動(全年齢階級)}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
\end{aligned}
\tag{1-14}[再掲]
$$

(1-14)式は，その構成要素である

$$
\overbrace{\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
=\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(全年齢階級)}}
\tag{2-3}
$$

が大きければ（小さければ），それだけΔMLDによって計測される所得格差を（たとえ，級内変動や級間変動という他の要因が小さくても（大きくても）），拡大（縮小）させる方向で作用すると考えられている。

このことは，年齢階級別人口動態効果についても同様に妥当する。全年齢階級の人口動態効果を構成する

$$
\overbrace{\left\{\overline{MLD}_j+\left(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j}^{\text{人口動態効果(第}\,j\,\text{年齢階級)}}
$$

には，年齢階級別世帯シェアの2時点間変化（$\Delta p_j={}^{t}p_j-{}^{0}p_j$）が大きい正数になるほど，格差を拡大させるはずであるということが含意されている。同じことであるが，Δp_jがより小さい正数であれば，格差の拡大にはそれだけ小さい影響をあたえ，Δp_jがゼロであれば，人口動態効果という概念が存在する余地はなく，Δp_jが負数であれば，格差を縮小させる方向で作用していると考えられている。要するに，一般に年齢階級別の人口動態効果と世帯シェアの関係は次のように理解されている。

① 年齢階級別世帯シェアの2時点間変化（Δp_j）が負の場合（比較時点における世帯シェア（${}^{t}p_j$）が基準時点のそれ（${}^{0}p_j$）よりも小さい場合（$\Delta p_j={}^{t}p_j-{}^{0}p_j<0$）），年齢階級別人口動態効果に負の値をあたえ（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j<0$），平均対数偏差（全年齢階級）の差（$\Delta MLD$）の値を小さくすること（格差を縮小させる方向で作用すること）。

② 2時点における世帯シェアに変化がない場合（$\Delta p_j={}^{t}p_j-{}^{0}p_j=0$），年齢階級別人口動態効果がゼロとなり（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=0$），当該年齢階級は$\Delta MLD$の値にたいして影響をあたえないこと（格差を縮小も拡大もさせないこと）。

③ 世帯シェアの2時点間変化（Δp_j）が正の場合（比較時点における世帯シェア（${}^{t}p_j$）が基準時点のそれ（${}^{0}p_j$）よりも大きい場合（$\Delta p_j={}^{t}p_j-{}^{0}p_j>0$）），年齢階級別人口動態効果に正の値をあたえ（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j>0$），$\Delta MLD$の値を大きくすること（格差を拡大させる方向で作用すること）。

人口動態効果が以上の関係を保証するとき，所得格差の計測指標として実質的意味がある。項を改めてこの点を考察する。

(2)　年齢階級別人口動態効果の数学的性質

年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の源泉である(2-1)式と(2-2)式を加算して，${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ をもとめれば，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j\\
&=\overbrace{\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)({}^tp_j-{}^0p_j)}^{(2\text{-}1)\text{式}}\\
&\quad+\overbrace{\left\{\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}+\log{}^0\bar{x})-\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}_j+\log{}^0\bar{x}_j)\right\}({}^tp_j-{}^0p_j)}^{(2\text{-}2)\text{式}}\\
&=\frac{1}{2}\{({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)+(\log{}^t\bar{x}+\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j+\log{}^0\bar{x}_j)\}\Delta p_j
\end{aligned}
\tag{2-4}
$$

(2-4)式を整理すれば，年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）として，

$$
{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\{\overline{MLD}_j+(\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j})\}\Delta p_j \tag{2-5}
$$

を得ることができることは，すでに述べた((1-10)式および(1-13)式参照)。年齢階級別人口動態効果の数学的性質を解明するために，以下では(2-5)式から ${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ (年齢階級別人口動態効果）と同値の関係にある新たな数式を誘導する（この数式は，年齢階級別人口動態効果の簡便式としても機能するが，そのことは，３．数値例で言及する)。

そこで，世帯所得（x_i）の分布の相加平均（全年齢階級）を $\mathfrak{m}_A$ と表し，同じ統計系列の分布の相乗平均（全年齢階級）を $\mathfrak{m}_G$ と表す。また，年齢階級別所得分布の相加平均を $\mathfrak{m}_{A_j}$ と表し，同様に相乗平均を $\mathfrak{m}_{G_j}$ と表す。時点を表すサフィックスはこれまでと変わらない。次式は以上の事柄を数式で表している。

$$
\begin{cases}
{}^t\bar{x}={}^t\mathfrak{m}_A\\
{}^0\bar{x}={}^0\mathfrak{m}_A\\
{}^t\bar{x}_j={}^t\mathfrak{m}_{A_j}\\
{}^0\bar{x}_j={}^0\mathfrak{m}_{A_j}
\end{cases}
\tag{2-6}
$$

すでに明らかにしたように，平均対数偏差は，

$$
MLD=\log\mathfrak{m}_A-\log\mathfrak{m}_G \tag{2-7}
$$

であり，

$$
MLD_j=\log\mathfrak{m}_{A_j}-\log\mathfrak{m}_{G_j} \tag{2-8}
$$

である[6]。

(2-6)式,(2-7)式,(2-8)式を(2-4)式に代入すると，年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の計算式として，新たに次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j\\
&=\frac{1}{2}\{({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)+(\log{}^t\bar{x}+\log{}^0\bar{x})-(\log{}^t\bar{x}_j+\log{}^0\bar{x}_j)\}\Delta p_j \qquad (2\text{-}4)[\text{再掲}]\\
&=\frac{1}{2}\{(\log{}^t\mathfrak{m}_{A_j}-\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j})+(\log{}^0\mathfrak{m}_{A_j}-\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j})\\
&\qquad+(\log{}^t\mathfrak{m}_A+\log{}^0\mathfrak{m}_A)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{A_j}+\log{}^0\mathfrak{m}_{A_j})\}\Delta p_j\\
&=\frac{1}{2}\{(\log{}^t\mathfrak{m}_A+\log{}^0\mathfrak{m}_A)-(\log{}^t\mathfrak{m}_{G_j}+\log{}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}\Delta p_j\\
&=\frac{1}{2}\{\log({}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A)-\log({}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j})\}\Delta p_j\\
&=\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j \qquad (2\text{-}9)
\end{aligned}
$$

以上のように，年齢階級別人口動態効果の計算式((2-9)式)が新たに誘導された。ここで，年齢階級別平均対数偏差の２時点間変化（${}^{\Delta MLD}C_j$）にかんする要因分解の過程を次頁にまとめる（表１)。その上で，(2-9)式の値が，

$\log\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}$ と Δp_j の値によって，

---

(6)　木村和範「平均対数偏差の数学的性質にかんする覚書」同上，第 65 巻第 1･2 合併号，2017 年 9 月。(2-7)式と(2-8)式においては，全年齢階級の所得分布にかんする相加平均と相乗平均（$\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_G$）および年齢階級別の所得分布にかんする相加平均と相乗平均（$\mathfrak{m}_{A_j}, \mathfrak{m}_{G_j}$）が，いずれも正である（脚注３参照)。このために以下の展開が可能となる。

表１　平均対数偏差の差の要因分解

統計量の差［(1-5)式］ $^{\Delta MLD}C_j = {}^{t\,MLD}C_j - {}^{0\,MLD}C_j$

級内変動の差［(1-5)式第１項］ ${}^t p_j \cdot {}^t MLD_j - {}^0 p_j \cdot {}^0 MLD_j$	級間変動の差［(1-5)式第２項］ ${}^t p_j (\log {}^t\overline{x} - \log {}^t\overline{x}_j) - {}^0 p_j (\log {}^0\overline{x} - \log {}^0\overline{x}_j)$

［(1-6)式］

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 \equiv \frac{1}{2}(a_1 + a_2)(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)$$

級内変動の差の一部［(1-8)式第１項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)({}^t MLD_j - {}^0 MLD_j)$	級内変動の差の一部［(1-8)式第２項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)$	級間変動の差の一部［(1-8)式第３項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)\{(\log {}^t\overline{x} - \log {}^t\overline{x}_j) - (\log {}^0\overline{x} - \log {}^0\overline{x}_j)\}$	級間変動の差の一部［(1-8)式第４項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j - {}^0 p_j)\{(\log {}^t\overline{x} - \log {}^t\overline{x}_j) + (\log {}^0\overline{x} - \log {}^0\overline{x}_j)\}$

級内変動の差の一部［(1-10)式第１項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)({}^t MLD_j - {}^0 MLD_j)$	級間変動の差の一部［(1-10)式第２項］ $\frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j)\{(\log {}^t\overline{x} - \log {}^0\overline{x}) - (\log {}^t\overline{x}_j - \log {}^0\overline{x}_j)\}$	級内変動の差の一部［(1-10)式第３項］ $\frac{1}{2}({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j)({}^t p_j - {}^0 p_j)$	級間変動の差の一部［(1-10)式第４項］ $\left\{\frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x} + \log {}^0\overline{x}) - \frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}_j + \log {}^0\overline{x}_j)\right\}({}^t p_j - {}^0 p_j)$

［(1-11)式］

$$\overline{p}_j = \frac{1}{2}({}^t p_j + {}^0 p_j),\ \Delta p_j = {}^t p_j - {}^0 p_j,\ \overline{MLD}_j = \frac{1}{2}({}^t MLD_j + {}^0 MLD_j),\ \Delta MLD_j = {}^t MLD_j - {}^0 MLD_j,$$

$$\Delta \log \overline{x} = \log {}^t\overline{x} - \log {}^0\overline{x},\ \Delta \log \overline{x}_j = \log {}^t\overline{x}_j - \log {}^0\overline{x}_j,\ \overline{\log \overline{x}} = \frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x} + \log {}^0\overline{x}),\ \overline{\log \overline{x}_j} = \frac{1}{2}(\log {}^t\overline{x}_j + \log {}^0\overline{x}_j)$$

級内変動 ［(1-13)式第１項］ $\overline{p}_j \cdot \Delta MLD_j$	級間変動 ［(1-13)式第２項］ $\overline{p}_j (\Delta \log \overline{x} - \Delta \log \overline{x}_j)$	人口動態効果 ［(1-13)式第３項］ $\left\{\overline{MLD}_j + \left(\overline{\log \overline{x}} - \overline{\log \overline{x}_j}\right)\right\}\Delta p_j$ 【別解】［(2-9)式］* $\frac{1}{2}\left(\log \frac{{}^t\mathfrak{m}_A \cdot {}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j$

* ${}^t\mathfrak{m}_A$ と ${}^0\mathfrak{m}_A$ は，それぞれ比較時点と基準時点における全年齢階級にかんする所得分布の相加平均を表し，${}^t\mathfrak{m}_{G_j}$ と ${}^0\mathfrak{m}_{G_j}$ は，時点別の第 j 年齢階級にかんする所得分布の相乗平均を表す。

$${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j \lesseqgtr 0$$

となることに着目して,以下では,(2-9)式の含意を明らかにする目的で，$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$ と Δp_j を別々に取り上げる。

① $\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$

真数条件を満たして正数となる分数

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$$

には,その分子(${}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A$)と分母(${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$)の値の大小関係によって，その取り得る範囲が 3 とおりある。それに応じて，その対数の値についても 3 とおりがある。すなわち,

$$\begin{cases} 0<\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}<1\text{のとき，}\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}<0 \\ \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}=1\text{のとき，}\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}=0 \\ \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}>1\text{のとき，}\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}>0 \end{cases} \tag{2-10}$$

② $\Delta p_j\,(={}^{t}p_j-{}^{0}p_j)$

Δp_j についても，次の 3 とおりがある。

$$\begin{cases} \Delta p_j<0 \\ \Delta p_j=0 \\ \Delta p_j>0 \end{cases} \tag{2-11}$$

以上から，年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の値は

$$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} \text{ と } \Delta p_j$$

の組み合わせによって，表 2 のようになる。

表 2 は，ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式があたえる年齢階級別人口動態効果においては，次のような事態が起こりうることを示している（アステリスクを付した箇所参照)。

① 年齢階級別世帯シェアの 2 時点間変化が負であるにもかかわらず（$\Delta p_j<0$),
$0<\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}<1$，すなわち
$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}<0$ のときには,
当該年齢階級の人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）は正である（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j>0$；ケース A)。

② 年齢階級別世帯シェアの 2 時点間変化が正であるにもかかわらず（$\Delta p_j>0$),

表 2　年齢階級別の人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の符号と世帯シェア変化（$\Delta p_j$）の符号との関係

$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$	$\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$	Δp_j $(={}^{t}p_j-{}^{0}p_j)$	${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ $\left(=\frac{1}{2}\left(\log \frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j\right)$	Δp_j と ${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ が背反する 4 つのケース
$0<\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}<1$	負	**負***	**正***	ケース A
		ゼロ	ゼロ	
		正*	**負***	ケース B
$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}=1$	ゼロ	**負***	**ゼロ***	ケース C
		ゼロ	ゼロ	
		正*	**ゼロ***	ケース D
$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}>1$	正	負	負	
		ゼロ	ゼロ	
		正	正	

$0 < \dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} < 1$，すなわち

$\log \dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} < 0$ のときには，

当該年齢階級の人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）は負である（${}^{AMLD}_{Classis}C_j < 0$；ケース B）。

③　年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が負であるにもかかわらず（$\Delta p_j < 0$），

$\dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 1$，すなわち

$\log \dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 0$ のときには，

当該年齢階級の人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）はゼロである（${}^{AMLD}_{Classis}C_j = 0$；ケース C）。

なお，

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 1$$

が成立するときには

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}} \text{ と } \frac{{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$$

が相互に逆数の関係にある。

④　年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が正であるにもかかわらず（$\Delta p_j > 0$），

$\dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 1$，すなわち

$\log \dfrac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 0$ のときには，

当該年齢階級の人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）はゼロである（${}^{AMLD}_{Classis}C_j = 0$；ケース D）。

なお，上で述べた③（ケース C）のときと同様に，

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}} = 1$$

が成立するときには

$$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}} \text{ と } \frac{{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$$

が相互に逆数の関係にある。

すでに述べたように，年齢階級別人口動態効果は，級内変動の差の一部と級間変動の差の一部をその実体的基礎とする。しかし，上で見たように，年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が負（または正）にもかかわらず（$\Delta p_j \lesseqgtr 0$），年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）が ${}^{AMLD}_{Classis}C_j \gtreqless 0$（複合同順）となる２つのケース（A と B），および年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が負（または正）にもかかわらず（$\Delta p_j \lesseqgtr 0$），年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）が ${}^{AMLD}_{Classis}C_j = 0$ となる２つのケース（C と D）がある。これらの４つのケースにおいて，ムッカジーとショロックスの方式による年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）は，年齢階級別世帯シェアの２時点間変化（Δp_j）に見合う値をあたえない。このことは，実体的基礎をもつ年齢階級別人口動態効果が，世帯シェアの変化の影響を計測するために果たすべき期待に応えられず，その計算結果が実質的意味をもちえないということと同義である。年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）には実体的基礎があるということは，${}^{AMLD}_{Classis}C_j$ が実質的意義をもつということとはただちには結びつくものではない。

以下では，項を改めて，上述した４つのケースについて，その数値例を掲げ，ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式が算出する年齢階級別人口動態効果に内在する問題点を例示する。

⑶　数値例

①　年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が負（$\Delta p_j < 0$）のときに，当該年齢階級の人口動態効果が正になる（${}^{AMLD}_{Classis}C_j > 0$）数値例

本稿末尾に掲載した付表１(a)(b)(c)から関連数値を抜き出して，ケース A（表２参照）の数値例を表３に掲げる。この表によれば，第２年齢階級については以下のとおりである（強調箇所参照）。

$$\begin{cases} \Delta p_2 = & -0.0833<0 \\ {}^{\Delta MLD}_{Classis}C_2 = & 0.0024>0 \end{cases}$$

② 年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が正（$\Delta p_j>0$）のときに，当該年齢階級の人口動態効果が負になる（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j<0$）数値例

ケースＢ（表２参照）の数値例を表４（次頁）として掲げる。これは，前掲した表３における基準時点のデータを比較時点のデータとみなし，逆に比較時点のデータを基準時点のデータとみなして入れ替えたものである(付表２(a)(b)(c))。この数値例によれば，第２年齢階級については以下のようになる(強調箇所参照)。

$$\begin{cases} \Delta p_2 = & 0.0833>0 \\ {}^{\Delta MLD}_{Classis}C_2 = & -0.0024<0 \end{cases}$$

③ 年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が負（$\Delta p_j<0$）のときに，当該年齢階級の人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）がゼロになる（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=0$）数値例

ケース C（表 2 参照）の数値例を表 5 (30 頁）に掲げる。

$${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j \quad (2\text{–}9)\text{［再掲］}$$

は年齢階級別人口動態効果の新たな計算式である。したがって，表３（前掲）および表４（前掲）が依拠する付表１(a)(b)(c)および付表２(a)(b)(c)のような，平均対数偏差にかんする基準時点と比較時点ごとの要因分解表，ならびに２時点間の平均対数偏差の差にかんする計算表を作成しなくても年齢階級別人口動態効果を計算することができる。以下では，(2–9)式による年齢階級別人口動態効

表３　年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）と関連統計量（ケース A）

		全年齢階級	第１年齢階級	第２年齢階級	第３年齢階級
相加平均（百万円）	基準時点（${}^{0}\mathfrak{m}_A$）	4.6667			
	比較時点（${}^{t}\mathfrak{m}_A$）	4.7000			
相乗平均（百万円）	基準時点（${}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$）		1.7321	4.6692	3.9149
	比較時点（${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}$）		1.8171	5.3566	4.8990
世帯シェアの２時点間変化（Δp_j）		[0.0000]	0.1333	**−0.0833**	−0.0500
$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$			6.9688	0.8769	1.1436
$\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$			0.8432	−0.0570	0.0583
年齢階級別人口動態効果* $\left({}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j\right)$			0.0562	**0.0024**	−0.0015
人口動態効果（全年齢階級）$\left(\sum_{j=1}^{3}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j\right)$		0.0571			

(注記)

* この欄の数値（したがって，全年齢階級にかんする人口動態効果の値）は，付表１(c) における第１式（ムッカジーとショロックスの方式による要因分解式）の計算結果と同一である。このことからも，(2–5)式は，あたえる年齢階級別人口動態効果を計算するための簡便式であることが分かる。このことは，表３についても妥当する。

(出所) ${}^{0}\mathfrak{m}_A$：付表１ (a)；${}^{t}\mathfrak{m}_A$：付表１(b)；${}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$：付表１(a)；${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}$：付表１(b)；Δp_j：付表１(c)

表４　年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）と関連統計量（ケースＢ）

		全年齢階級	第１年齢階級	第２年齢階級	第３年齢階級
相加平均（百万円）	基準時点（${}^0\mathfrak{m}_A$）	4.7000			
	比較時点（${}^t\mathfrak{m}_A$）	4.6667			
相乗平均（百万円）	基準時点（${}^0\mathfrak{m}_{G_j}$）		1.8171	5.3566	4.8990
	比較時点（${}^t\mathfrak{m}_{G_j}$）		1.7321	4.6692	3.9149
世帯シェアの２時点間変化（Δp_j）		[0.0000]	−0.1333	**0.0833**	0.0500
$\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}$			6.9688	0.8769	1.1436
$\log\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}$			0.8432	−0.0570	0.0583
年齢階級別人口動態効果 $\left({}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j\right)$			−0.0562	**−0.0024**	0.0015
人口動態効果（全年齢階級）$\left(\sum_{j=1}^{3}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j\right)$		−0.0571			

（出所）${}^0\mathfrak{m}_A$：付表２(a)；${}^t\mathfrak{m}_A$：付表２(b)；${}^0\mathfrak{m}_{G_j}$：付表２(a)；${}^t\mathfrak{m}_{G_j}$：付表２(b)；Δp_j：付表２(c)

果の算出に必要な最小限の数値を表章した表５（次頁）を掲げるに留める[7]。数値例では，第２年齢階級については，以下のようになる（強調箇所参照）。

$$\begin{cases}\Delta p_2=-0.0833<0\\ {}^{\Delta MLD}_{Classis}C_2=\quad 0.0000\end{cases}$$

④　年齢階級別世帯シェアの２時点間変化が正（$\Delta p_j>0$）のとき，当該年齢階級の人口動態効果がゼロになる（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=0$）数値例

ケースＤ（表２参照）の数値例を表６（31頁）に掲げる。叙述の目的は，題意に叶う数値例を示すことにある。そのためには，表５における基準時点と比較時点の世帯所得を入れ替えればよい。このとき，第２年齢階級については以下のようになる（強調箇所参照）。

$$\begin{cases}\Delta p_2=0.0833>0\\ {}^{\Delta MLD}_{Classis}C_2=0.0000\end{cases}$$

む　す　び

本稿は，ムッカジーとショロックスの方式による平均対数偏差の差の要因分解式の有効性を，とくに人口動態効果に着目して検討することを目的とした。この検討過程において年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）の新たな計算式として

$${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^t\mathfrak{m}_A\cdot{}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j \quad (2\text{-}9)[再掲]$$

を誘導した。(2-9)式の誘導過程もまた，${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$には，２つの源泉があることを示している。その第１の源泉は，年齢階級別級内変動の差の一部をなす

(7)　このことは，ケースＡとケースＢについても妥当する。そうであるにもかかわらず，ケースＡとケースＢについては付表を掲げた。その理由は，(2-9)式の結果が付表１(c)，付表２(c)に表章された年齢階級別人口動態効果の値と一致し，このゆえに(2-9)式が年齢階級別人口動態効果を計算するための簡便式としての機能を果たしていることを示そうとしたからである。

表5　年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）と関連統計量（ケース C）

		全年齢階級	第1年齢階級	第2年齢階級	第3年齢階級
世帯数	基準時点	12	3	7	2
	比較時点	10	2	5	3
世帯所得 （百万円）	基準時点		4.0000 5.0000 8.0000	3.9068 3.9395 4.0112 4.1573 5.5500 6.7800 8.0889	8.7450 9.8210
	比較時点		3.0000 4.0000	4.4700 4.6800 5.9000 7.0000 9.0000	2.8000 4.5000 4.6500
相加平均 （百万円）	基準時点（${}^{0}\mathfrak{m}_A$）	6.0000			
	比較時点（${}^{t}\mathfrak{m}_A$）	5.0000			
相乗平均 （百万円）	基準時点（${}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$）		5.4288	5.0000	9.2674
	比較時点（${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.4641	6.0000	3.8840
世帯シェア	基準時点	[1.0000]	0.2500	0.5833	0.1667
	比較時点	[1.0000]	0.2000	0.5000	0.3000
世帯シェアの2時点間変化（Δp_j）		[0.0000]	−0.0500	**−0.0833**	0.1333
$\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$			1.5952	1.0000	0.8335
$\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}$			0.2028	0.0000	−0.0791
年齢階級別人口動態効果 $\left({}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j=\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j\right)$			−0.0051	**0.0000**	−0.0053
人口動態効果（全年齢階級） $\left(\sum_{j=1}^{3}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j\right)$		−0.0103			

（注）第3年齢階級はケースB（表4）の第2年齢階級と同様である。

$$\frac{1}{2}({}^{t}MLD_j+{}^{0}MLD_j)({}^{t}p_j-{}^{0}p_j) \qquad (2\text{-}1)[再掲]$$

である。第2の源泉は，年齢階級別級間変動の差の一部をなす

$$\left\{\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}+\log{}^{0}\bar{x})-\frac{1}{2}(\log{}^{t}\bar{x}_j+\log{}^{0}\bar{x}_j)\right\}({}^{t}p_j-{}^{0}p_j) \qquad (2\text{-}2)[再掲]$$

である。この2つの源泉の和が年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）である。このことは，${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ には実体的基礎があることを意味する。それは，${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$ の総和としての全年齢階級にかんする人口動態効果にも，実体的基礎が存在することを含意する。

このように考えると，(2-9)式があたえる年齢階級別人口動態効果（${}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）（およびその総和（$\sum_{j=1}^{m}{}^{\Delta MLD}_{Classis}C_j$）としての全年齢階級の人口動態効果（$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\log\frac{{}^{t}\mathfrak{m}_A\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_A}{{}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}\cdot{}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j$））は，「見かけ上」の格差の計測指標ではなく

表６　年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）と関連統計量（ケースＤ）

		全年齢階級	第１年齢階級	第２年齢階級	第３年齢階級
世帯数	基準時点	10	2	5	3
	比較時点	12	3	7	2
世帯所得 （百万円）	基準時点		3.0000 4.0000	4.4700 4.6800 5.9000 7.0000 9.0000	2.8000 4.5000 4.6500
	比較時点		4.0000 5.0000 8.0000	3.9068 3.9395 4.0112 4.1573 5.5500 6.7800 8.0889	8.7450 9.8210
相加平均 （百万円）	基準時点（${}^0\mathfrak{m}_A$）	5.0000	3.5000	6.2100	3.9833
	比較時点（${}^t\mathfrak{m}_A$）	6.0000	5.6667	5.2048	9.2830
相乗平均 （百万円）	基準時点（${}^0\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.4641	6.0000	3.8840
	比較時点（${}^t\mathfrak{m}_{G_j}$）		5.4288	5.0000	9.2674
世帯シェア	基準時点	[1.0000]	0.2000	0.5000	0.3000
	比較時点	[1.0000]	0.2500	0.5833	0.1667
世帯シェアの２時点間変化（Δp_j）		[0.0000]	0.0500	**0.0833**	−0.1333
$\dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A \cdot {}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^0\mathfrak{m}_{G_j}}$			1.5952	1.0000	0.8335
$\log \dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A \cdot {}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^0\mathfrak{m}_{G_j}}$			0.2028	0.0000	−0.0791
年齢階級別人口動態効果 $\left({}^{AMLD}_{Classis}C_j = \dfrac{1}{2}\left(\log \dfrac{{}^t\mathfrak{m}_A \cdot {}^0\mathfrak{m}_A}{{}^t\mathfrak{m}_{G_j} \cdot {}^0\mathfrak{m}_{G_j}}\right)\Delta p_j\right)$			0.0051	**0.0000**	0.0053
人口動態効果（全年齢階級） $\left(\sum_{j=1}^{3} {}^{AMLD}_{Classis}C_j\right)$		0.0103			

（注）第３年齢階級はケースＡ（表３）の第２年齢階級と同様である。

て，実質的な格差の拡大・縮小を計測するための指標としての機能を果たすかに見える。

しかしながら，他方では，(2-9)式ならびに本稿で仮設した数値例（表３～表６）が示すように，年齢階級別人口動態効果（${}^{AMLD}_{Classis}C_j$）は，年齢階級別世帯シェアの変化（増減）（Δp_j）を適正に反映しない場合がある。このとき，${}^{AMLD}_{Classis}C_j$ の数値は，実質的意味を喪失する。要因分解式があたえる人口動態効果がその背後に実体的基礎をもつということと，その計算結果が実質的意味をもつということは，これを峻別して考える必要がある。このことは，ムッカジーとショロックスの方式による平均対数偏差の要因分解式が有効であるかどうかという問題を提起する。

それだけではない。${}^{AMLD}_{Classis}C_j$ の有効性にたいする疑義は，その総和，すなわち

$$\sum_{j=1}^{m} {}^{AMLD}_{Classis}C_j$$

表 7　世帯シェアの 2 時点間変化と人口動態効果（全年齢階級）

数値例	第 1 （ケース A）	第 2 （ケース B）	第 3 （ケース C）	第 4 （ケース D）
世帯シェアの変化	0.0000			
人口動態効果	0.0571	−0.0571	−0.0103	0.0103

（出所）表 3，表 4，表 5，表 6

としてあたえられる全年齢階級にかんする人口動態効果についても，その有効性を検討することの必要性を示唆する。全年齢階級にかんする人口動態効果は，級内変動，級間変動とともに，世帯シェアの 2 時点間変化がもたらす平均対数偏差の変動（$\varDelta MLD$）にたいする影響を計測している。全年齢階級の世帯シェアは，年齢階級別世帯シェアの総和であるから，基準時点と比較時点を問わず，その値は 1 である。したがって，全年齢階級にかんする世帯シェアの 2 時点間変化はゼロ（＝[比較時点の世帯シェア（全年齢階級)]－[基準時点の世帯シェア（全年齢階級)]＝1-1）である。このように，世帯シェアに変化がないときには，人口動態効果はゼロになるはずである[(8)]。

そうであるにもかかわらず，表 3（第 1 数値例）から表 6（第 4 数値例）までの 4 つのケースについては，表 7 に示すように，全年齢階級にかんする世帯シェアの変化と人口動態効果とは齟齬を来している。このこともまた，ムッカジーとショロックスの方式による平均対数偏差の差の要因分解式の有効性にかんする主張が安全ではないことを物語っている。

(2019 年 3 月 12 日提出)

(8)　要因分解式（一般式）において，全年齢階級にかんする人口動態効果がゼロになることの証明については，木村(2018b：13 頁)。付表 1 (c)および付表 2 (c)に表章した第 2 式（ムッカジーとショロックスの方式によらない，別解として誘導された要因分解式）では，全年齢階級にかんする人口動態効果の数値は，いずれもゼロである。

付表 1 (a)　基準時点における所得分布（ケース A）

		世帯所得（原系列の単位：百万円）			
		全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級
		2	1	3	2
		3	3	7	6
		1		8	5
		7		1	
		6		6	
		8		8	
		1		6	
		3			
		6			
		8			
		6			
		5			
世帯シェア（${}^{0}p_j$）	①	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
相加平均（${}^{0}\mathfrak{m}_A$, ${}^{0}\mathfrak{m}_{A_j}$）		4.6667	2.0000	5.5714	4.3333
相加平均の対数（$\log {}^{0}\bar{x}$, $\log {}^{0}\bar{x}_j$）		0.6690	0.3010	0.7460	0.6368
相乗平均（${}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$, ${}^{0}\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.7873	1.7321	4.6692	3.9149
平均対数偏差（${}^{0}MLD$, ${}^{0}MLD_j$）	②*	0.0907	0.0625	0.0767	0.0441
$\log {}^{0}\bar{x} - \log {}^{0}\bar{x}_j$	③		0.3680	−0.0770	0.0322
${}^{0}MLD - {}^{0}MLD_j$			0.0282	0.0140	0.0466
級内変動	①×②**	0.0662	0.0104	0.0448	0.0110
級間変動	①×③**	0.0245	0.0613	−0.0449	0.0080
合計		0.0907	0.0717	−0.0001	0.0191

＊(平均対数偏差)＝(相加平均の対数変換値)－(相乗平均の対数変換値)
＊＊年齢階級別の計算式（全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計)

付表 1 (b)　比較時点における所得分布（ケース A）

		世帯所得（原系列の単位：百万円）			
		全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級
		2	1	2	8
		8	3	7	3
		7	2	7	
		1		9	
		7		5	
		3			
		9			
		3			
		5			
		2			
世帯シェア（${}^{t}p_j$）	①	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
相加平均（${}^{t}\mathfrak{m}_A$, ${}^{t}\mathfrak{m}_{A_j}$）		4.7000	2.0000	6.0000	5.5000
相乗平均（${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}$, ${}^{t}\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.8043	1.8171	5.3566	4.8990
平均対数偏差（${}^{t}MLD$, ${}^{t}MLD_j$）	②*	0.0918	0.0416	0.0493	0.0503
$\log {}^{t}\bar{x} - \log {}^{t}\bar{x}_j$	③		0.3711	−0.1061	−0.0683
${}^{t}MLD - {}^{t}MLD_j$			0.0502	0.0426	0.0416
級内変動	①×②**	0.0472	0.0125	0.0246	0.0101
級間変動	①×③**	0.0446	0.1113	−0.0530	−0.0137
合計		0.0918	0.1238	−0.0284	−0.0036

＊(平均対数偏差)＝(相加平均の対数変換値)－(相乗平均の対数変換値)
＊＊年齢階級別の計算式（全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計)

付表 1 (c)　2 時点の差の要因分解にかんする計算表（ケース A）

			全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級	備考（付表 1 (a)(b)の表側との対応）
$\bar{p}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\right)$		①	[1.0000]	0.2333	0.5417	0.2250	
$\Delta MLD_j\,(={}^tMLD_j-{}^0MLD_j)$		②		−0.0208	−0.0275	0.0062	
$\Delta\log\bar{x}\,(=\log{}^t\bar{x}-\log{}^0\bar{x})$			0.0031				${}^0\bar{x}={}^0\mathfrak{m}_A,\ {}^t\bar{x}={}^t\mathfrak{m}_A$
$\Delta\log\bar{x}_j\,(=\log{}^t\bar{x}_j-\log{}^0\bar{x}_j)$				0.0000	0.0322	0.1035	${}^0\bar{x}_j={}^0\mathfrak{m}_{Aj},\ {}^t\bar{x}_j={}^t\mathfrak{m}_{Aj}$
$\Delta\log\bar{x}-\Delta\log\bar{x}_j$		③		0.0031	−0.0291	−0.1004	
$\overline{MLD}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\right)$		④		0.0521	0.0630	0.0472	
$\overline{\log\bar{x}}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}+\log{}^0\bar{x})\right)$			0.6706				
$\overline{\log\bar{x}_j}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\bar{x}_j+\log{}^0\bar{x}_j)\right)$				0.3010	0.7621	0.6886	
$\overline{\log\bar{x}}-\overline{\log\bar{x}_j}$		⑤		0.3695	−0.0915	−0.0180	
$\Delta MLD\,(={}^tMLD-{}^0MLD)$		⑥	0.0011				
$\overline{MLD}$		⑦	0.0912				
$\Delta p_j\,(={}^tp_j-{}^0p_j)$		⑧		0.1333	−0.0833	−0.0500	
第 1 式*	級内変動	①×②	−0.0183	−0.0049	−0.0149	0.0014	
	級間変動	①×③	−0.0376	0.0007	−0.0158	−0.0226	
	人口動態効果	(④+⑤)×⑧	0.0571	0.0562	0.0024	−0.0015	
	合計		0.0011	0.0521	−0.0283	−0.0227	
[参考] 第 2 式**	級内変動	①×②	−0.0183	−0.0049	−0.0149	0.0014	
	級間変動	①×(⑥−②)	0.0195	0.0051	0.0155	−0.0011	
	人口動態効果	⑦×⑧	0.0000	0.0122	−0.0076	−0.0046	
	合計		0.0011	0.0124	−0.0070	−0.0043	

＊ムカッジーとショロックスの方式による ${}^{\Delta MLD}C_j$ の要因分解式［(1-13)式］。全年齢階級の数値は，年齢階級別変動の数値の合計。

＊＊別解（木村(2018b：9 頁)）による ${}^{\Delta MLD}C_j$ の要因分解式は以下のとおり。

$$ {}^{\Delta MLD}C_j=\overbrace{\bar{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\bar{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動}}+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果}} $$

全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計。

付表 2 (a)　基準時点における所得分布（ケース B）

		世帯所得（原系列の単位：百万円）			
		全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級
		2	1	2	8
		8	3	7	3
		7	2	7	
		1		9	
		7		5	
		3			
		9			
		3			
		5			
		2			
世帯シェア（${}^0p_j$）	①	[1.0000]	0.3000	0.5000	0.2000
相加平均（${}^0\mathfrak{m}_A$，${}^0\mathfrak{m}_{A_j}$）		4.7000	2.0000	6.0000	5.5000
相加平均の対数（$\log {}^0\overline{x}$，$\log {}^0\overline{x}_j$）		0.6721	0.3010	0.7782	0.7404
相乗平均（${}^0\mathfrak{m}_{G}$，${}^0\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.8043	1.8171	5.3566	4.8990
平均対数偏差（${}^0MLD$，${}^0MLD_j$）	②*	0.0918	0.0416	0.0493	0.0503
$\log {}^0\overline{x} - \log {}^0\overline{x}_j$	③		0.3711	−0.1061	−0.0683
${}^0MLD - {}^0MLD_j$			0.0502	0.0426	0.0416
級内変動	①×②**	0.0472	0.0125	0.0246	0.0101
級間変動	①×③**	0.0446	0.1113	−0.0530	−0.0137
合計		0.0918	0.1238	−0.0284	−0.0036

＊(平均対数偏差) = (相加平均の対数変換値) − (相乗平均の対数変換値)
＊＊年齢階級別の計算式（全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計）

付表 2 (b)　比較時点における所得分布（ケース B）

		世帯所得（原系列の単位：百万円）			
		全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級
		2	1	3	2
		3	3	7	6
		1		8	5
		7		1	
		6		6	
		8		8	
		1		6	
		3			
		6			
		8			
		6			
		5			
世帯シェア（${}^tp_j$）	①	[1.0000]	0.1667	0.5833	0.2500
相加平均（${}^t\mathfrak{m}_A$，${}^t\mathfrak{m}_{A_j}$）		4.6667	2.0000	5.5714	4.3333
相乗平均（${}^t\mathfrak{m}_{G}$，${}^t\mathfrak{m}_{G_j}$）		3.7873	1.7321	4.6692	3.9149
平均対数偏差（${}^tMLD$，${}^tMLD_j$）	②*	0.0907	0.0625	0.0767	0.0441
$\log {}^t\overline{x} - \log {}^t\overline{x}_j$	③		0.3680	−0.0770	0.0322
${}^tMLD - {}^tMLD_j$			0.0282	0.0140	0.0466
級内変動	①×②**	0.0662	0.0104	0.0448	0.0110
級間変動	①×③**	0.0245	0.0613	−0.0449	0.0080
合計		0.0907	0.0717	−0.0001	0.0191

＊(平均対数偏差) = (相加平均の対数変換値) − (相乗平均の対数変換値)
＊＊年齢階級別の計算式（全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計）

付表 2 (c)　2 時点の差の要因分解にかんする計算表（ケース B）

			全年齢階級	第 1 年齢階級	第 2 年齢階級	第 3 年齢階級	備考（付表 2 (a)(b)の表側との対応）
$\overline{p}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tp_j+{}^0p_j)\right)$		①	[1.0000]	0.2333	0.5417	0.2250	
$\Delta MLD_j\,(={}^tMLD_j-{}^0MLD_j)$		②		0.0208	0.0275	−0.0062	
$\Delta\log\overline{x}\,(=\log{}^t\overline{x}-\log{}^0\overline{x})$			−0.0031				${}^0\overline{x}={}^0\mathfrak{m}_A,\ {}^t\overline{x}={}^t\mathfrak{m}_A$
$\Delta\log\overline{x}_j\,(=\log{}^t\overline{x}_j-\log{}^0\overline{x}_j)$				0.0000	−0.0322	−0.1035	${}^0\overline{x}_j={}^0\mathfrak{m}_{Aj},\ {}^t\overline{x}_j={}^t\mathfrak{m}_{Aj}$
$\Delta\log\overline{x}-\Delta\log\overline{x}_j$		③		−0.0031	0.0291	0.1004	
$\overline{MLD}_j\left(=\frac{1}{2}({}^tMLD_j+{}^0MLD_j)\right)$		④		0.0521	0.0630	0.0472	
$\overline{\log\overline{x}}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}+\log{}^0\overline{x})\right)$			0.6706				
$\overline{\log\overline{x}_j}\left(=\frac{1}{2}(\log{}^t\overline{x}_j+\log{}^0\overline{x}_j)\right)$				0.3010	0.7621	0.6886	
$\overline{\log\overline{x}}-\overline{\log\overline{x}_j}$		⑤		0.3695	−0.0915	−0.0180	
$\Delta MLD\,(={}^tMLD-{}^0MLD)$		⑥	−0.0011				
$\overline{MLD}$		⑦	0.0912				
$\Delta p_j\,(={}^tp_j-{}^0p_j)$		⑧		−0.1333	0.0833	0.0500	
第 1 式*	級内変動	①×②	0.0183	0.0049	0.0149	−0.0014	
	級間変動	①×③	0.0376	−0.0007	0.0158	0.0226	
	人口動態効果	(④+⑤)×⑧	−0.0571	−0.0562	−0.0024	0.0015	
	合計		−0.0011	−0.0521	0.0283	0.0227	
〔参考〕第 2 式**	級内変動	①×②	0.0183	0.0049	0.0149	−0.0014	
	級間変動	①×(⑥−②)	−0.0195	−0.0051	−0.0155	0.0011	
	人口動態効果	⑦×⑧	0.0000	−0.0122	0.0076	0.0046	
	合計		−0.0011	−0.0124	0.0070	0.0043	

＊ムカッジーとショロックスの方式による ${}^{\Delta MLD}C_j$ の要因分解式［(1-13)式］。全年齢階級の数値は，年齢階級別変動の数値の合計。
＊＊別解（木村（2018b： 9 頁））による ${}^{\Delta MLD}C_j$ の要因分解式は以下のとおり。

$$ {}^{\Delta MLD}C_j=\overbrace{\overline{p}_j\cdot\Delta MLD_j}^{\text{級内変動}}+\overbrace{\overline{p}_j\,(\Delta MLD-\Delta MLD_j)}^{\text{級間変動}}+\overbrace{\overline{MLD}\cdot\Delta p_j}^{\text{人口動態効果}} $$

全年齢階級の数値は，年齢階級別の数値の合計。

[付表 1 (a)(b)(c)と付表 2 (a)(b)(c)にかんする注記]

付表 2 (a)(b)(c)は，木村和範「平均対数偏差の要因分解」『経済論集』(北海学園大学経済学部)，第 66 巻第 4 号（小坂直人教授・野嵜久和教授退職記念号)，2019 年 3 月で使用した数値例と同じである。旧稿では，年齢階級別世帯シェアの 2 時点間変化が正を示す年齢階級にかんする考察を目的として数値例を仮設した。しかし，本稿における表 1 では，年齢階級別世帯シェアの 2 時点間変化（Δp_j）が負，ゼロ，正の順に配列されている。このために，本稿の表 1 と旧稿との整合性を図るために，Δp_j が正となる旧稿の数値例を付表 2 (a)(b)とし，それにもとづく要因分解表を付表 2 (c)とした。また，Δp_j が負となる数値例としては，旧稿の数値例にたいして時点を入れ換え，本稿では付表 1 (a)(b)とし，それにもとづく要因分解表を付表 1 (c)とした。