タイトル	ジニ係数の分解
著者	木村，和範；KIMURA，Kazunori
引用	季刊北海学園大学経済論集，68(3・4)：29-56
発行日	2021-03-31

《論説》

ジニ係数の分解

木　村　和　範*

はじめに

全世帯（世帯数は N）の所得額を昇順に配列した統計系列（所得分布）を，第1階級（平均所得が最小の世帯グループ）から第 m 階級（平均所得が最大の世帯グループ）まで，m 個の階級に分割する。第 j 階級$(1 \leq j \leq m)$に落ちる階級別世帯数を n_j とおく$\left(N=\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$。その世帯数$(n_j)$が全世帯数$(N)$に占める相対度数（階級別世帯割合（世帯シェア（share of households）とも言う。））x_j は $\frac{n_j}{N}$ である（本稿では，簡単のためにこれを正数とする$\left(x_j=\frac{n_j}{N}>0\right)$）。所得分布が m 個の等分位階級に分割されているときには，すべての階級について世帯割合(x_j)が同一となり$(x_j=x)$，$\frac{1}{m}$ に等しい。すなわち，

*　本学名誉教授

$$x_j=x=\frac{1}{m} \tag{1}$$

である。

他方で，第 j 階級に落ちる世帯所得の総額を E_j とおく$\left(E=\sum_{i=1}^{m}E_i\right)$。全世帯の所得総額 (E) に占める第 j 階級の所得割合（階級別所得割合（所得シェア（share of income）とも言う。））y_j は $\dfrac{E_j}{E}$ である[1]。本稿では簡単のためにこれを正数とする。

以上に述べた 2 種類の割合（世帯割合 (x_j) と所得割合 (y_j)）は，以下のようにまとめることができる。

$$\begin{cases} x_j=\dfrac{n_j}{N}>0 \\ \quad \text{ただし，所得分布が等分位階級に分} \\ \quad \text{割されている場合は，} x_j=x=\dfrac{1}{m} \\ y_j=\dfrac{E_j}{E}>0 \end{cases} \tag{2}$$

世帯割合と所得割合のそれぞれかんする第 j 階級までの累積相対度数 $(\mathfrak{p}_j,\ \mathfrak{q}_j)$ は，それぞれの相対度数 $(x_j,\ y_j)$ を昇順に足し上げた値である。すなわち，

$$\begin{cases} \mathfrak{p}_j=\sum_{i=1}^{j}x_i>0 \qquad (\because \quad x_i>0) \\ \quad \therefore \quad \mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}=\sum_{i=1}^{j}x_i-\sum_{i=1}^{j-1}x_i \\ \qquad\qquad\qquad =x_j \qquad\qquad\qquad\qquad (3) \\ \mathfrak{q}_j=\sum_{i=1}^{j}y_i>0 \qquad (\because \quad y_i>0) \\ \quad \therefore \quad \mathfrak{q}_j+\mathfrak{q}_{j-1}=\sum_{i=1}^{j}y_i+\sum_{i=1}^{j-1}y_i \\ \qquad\qquad\qquad =2y_1+\cdots+2y_{j-1}+y_j \qquad (4) \end{cases}$$

である。

以上をまとめたのが，表 1 である。

$(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q})$ の組をグラフ上に打点すれば，ローレンツ曲線を描くことができる（図 1 ）。

本稿では，ジニ係数 (G) を，集中面積 (λ) と直角 2 等辺三角形 OA_mD_m の面積 $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の比の値と定義する（図 1 参照）[2]。すなわち，

$$G=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

(5)式の λ は，2 種類の累積相対度数 $(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{q}_j)$ によって計測される。この 2 種類の累積相対度数は，それぞれ世帯割合 (x_j) と所得割合 (y_j) という 2 つの相対度数の和である。このことに着目すれば，ジニ係数 (G) を 2 種類の相対度数 $(x_j,\ y_j)$ に分解する式を誘導することができる。

そして，世帯割合 (x_j) と所得割合 (y_j) によるジニ係数 (G) の分解式を，基準時点 (0) と比較時点 (t) のジニ係数 $({}^0G,\ {}^tG)$ に応用すれば，ジニ係数の 2 時点間変化 $(\varDelta G={}^tG-{}^0G)$ を得る。これは， 2 種類の階級別相対度数の 2 時点間変化 $(\varDelta x_j,\ \varDelta y_j)$ に分解することができる。

（1） 第 j 階級に落ちる世帯の所得の合計を E_j，全世帯の総所得を E とする。全世帯にかんする平均所得を $\mathcal{M}$ とおき，第 j 階級の平均所得を $\mathcal{M}_j$ とおけば，次のようになる。

$$\begin{cases} \mathcal{M}=\dfrac{E}{N} \\ \mathcal{M}_j=\dfrac{E_j}{n_j} \end{cases} \qquad ①$$

①式より，$E=\mathcal{M}\cdot N$ および $E_j=\mathcal{M}_j\cdot n_j$ であるから，

$$y_j=\frac{E_j}{E}=\frac{\mathcal{M}_j\cdot n_j}{\mathcal{M}\cdot N}=\frac{\mathcal{M}_j}{\mathcal{M}}x_j \qquad ②$$

である。したがって，

$$x_j=\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_j}y_j \qquad ③$$

（2） 木村和範『ジニ係数の形成』北海道大学出版会，2008 年，238 頁以下。

表1　階級別の相対度数と累積相対度数

階級	世帯数 (n_j)	所得(階級内世帯所得合計) (E_j)	階級ごとの平均所得 $(\mathscr{M}_j)$ $\left(=\frac{E_j}{n_j}\right)$	相対度数		累積相対度数	
				世帯 (x_j) $\left(=\frac{n_j}{N}\right)$	所得 (y_j) $\left(=\frac{E_j}{E}\right)$	世帯 $(\mathfrak{p}_j)$	所得 $(\mathfrak{q}_j)$
1	n_1	E_1	$\mathscr{M}_1$	x_1	y_1	$\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_0+x_1$ $=0+x_1$ $(\mathfrak{p}_0=0)$	$\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}_0+y_1$ $=0+y_1$ $(\mathfrak{q}_0=0)$
2	n_2	E_2	$\mathscr{M}_2$	x_2	y_2	$\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_1+x_2$ $=(x_1)+x_2$	$\mathfrak{q}_2=\mathfrak{q}_1+y_2$ $=(y_1)+y_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	n_j	E_j	$\mathscr{M}_j$	x_j	y_j	$\mathfrak{p}_j=\mathfrak{p}_{j-1}+x_j$ $=(x_1+\cdots+x_{j-1})+x_j$	$\mathfrak{q}_j=\mathfrak{q}_{j-1}+y_j$ $=(y_1+\cdots+y_{j-1})+y_j$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	n_m	E_m	$\mathscr{M}_m$	x_m	y_m	$\mathfrak{p}_m=\mathfrak{p}_{m-1}+x_m=1$ $=(x_1+\cdots+x_{m-1})+x_m$	$\mathfrak{q}_{m+1}=\mathfrak{q}_m+y_m=1$ $=(y_1+\cdots+y_{m-1})+y_m$
合計	N	E		1	1		

(注) 所得の総平均$(\mathscr{M})$：$\mathscr{M}=\frac{E}{N}$；$y_j=\frac{E_j}{E}=\frac{\mathscr{M}_j\cdot n_j}{\mathscr{M}\cdot N}=\frac{\mathscr{M}_j}{\mathscr{M}}x_j$，したがって $x_j=\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}_j}y_j$

関彌三郎は，「ジニ係数の差の寄与度分解」[3] において，ジニ係数の2時点間変化(ΔG)を世帯割合と所得割合の2時点間変化$(\Delta x_j,\ \Delta y_j)$に分解し，ジニ係数の数学的性質を考察している。この論点にかんしては，他日を期す。

本稿は，それに先立って，所得の順に m 個に階級区分された所得分布のジニ係数(G)を世帯割合(x_j)と所得割合(y_j)に分解し，G の新たな定義式を誘導し（一般形の導出），その数学的性質を明らかにする。次に，この新たな定義式から，その誘導形として，m 個の等分位階級に分割された統計系列にかんするジニ係数の分解式（y_jによる G の再定義）を導出して（特殊形の導出），その数学的性質を明らかにする。以上を通じて，所得の順に階級分割した所得分布について，分解式による階級特性の検出可能性を考察する。なお，本稿では，仮設した基礎データ[4] に様々な数式を応用した。その結果（図表）を末尾に一括して掲載した。

1．ジニ係数

(1)　階級別寄与度

すでに述べたように，ジニ係数(G)は，

$$G=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \qquad (5)[再掲]$$

と定義される。

図1が示すように，集中面積(λ)は階級ご

(3)　関彌三郎『寄与度・寄与率―増加率の寄与度分解法―』(産業統計研究社，1992年，第8章)。

(4)　基準時点の基礎データを付表A(1)，付表A(2)で示し，比較時点については付表B(1)，付表B(2)で示す。

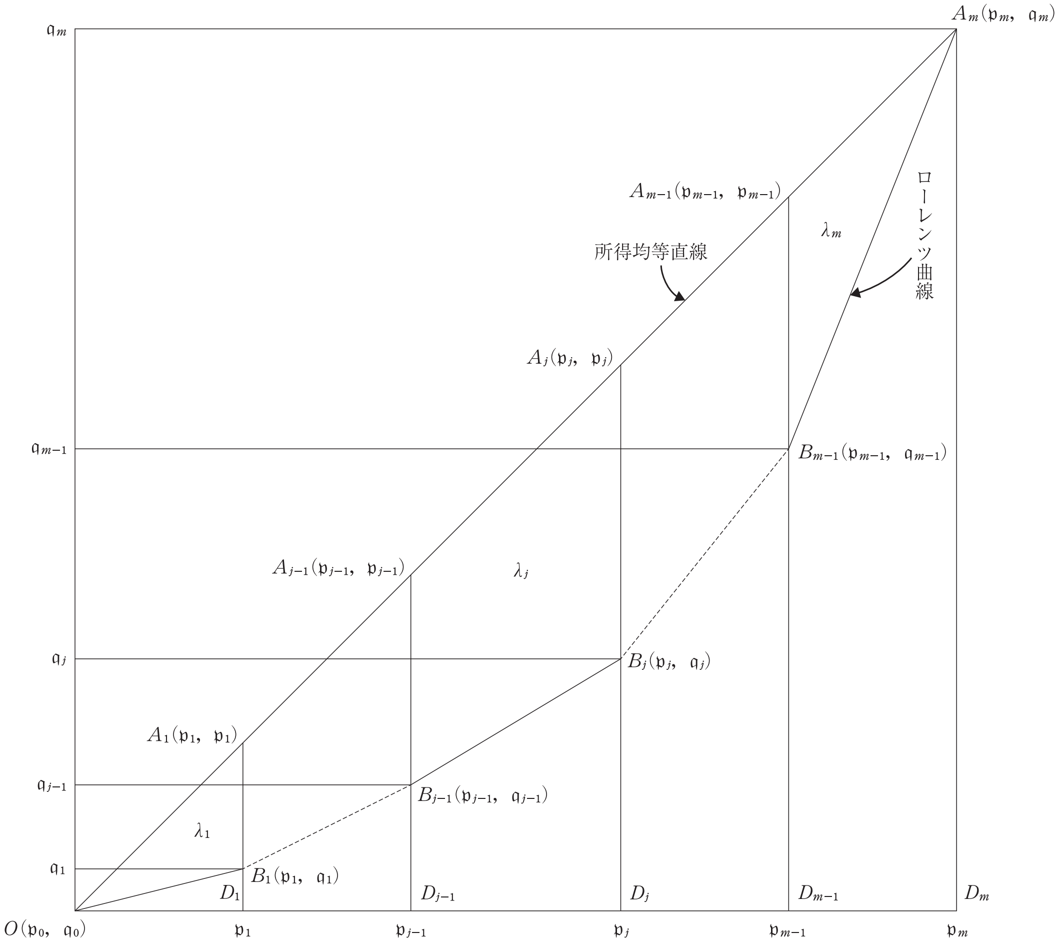


図 1　集中面積(λ)の分解：$\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$

(注)
1．$\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ はそれぞれ世帯と所得の累積相対度数である。よって$\mathfrak{p}_m=\mathfrak{q}_m=1$。
2．点 $A_1, \cdots, A_j, \cdots A_m$ は所得均等直線（45 度線）上にあるので，横座標と縦座標の値は同じである。
3．原点 O の座標（$\mathfrak{p}_0$，$\mathfrak{q}_0$）は（0，0）である。

とに分割される図形の面積(λ_i)の総和であるから，

$$\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_j+\cdots+\lambda_m \tag{6}$$

である。(5)式に(6)式を代入すれば，

$$G=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&=2\lambda\\&=2\lambda_1+\cdots+2\lambda_j+\cdots+2\lambda_m\\&=\sum_{i-1}^{m}2\lambda_i\end{aligned} \tag{7$'$}$$

と分解できる。(7)′ 式は，階級別の $2\lambda_j$ の総和が，全世帯のジニ係数(G)に等しいことを示す。この意味で，$2\lambda_j$ は G たいする第 j 階

級の寄与度$({}_GC_j)$である。これを次のように表す。

$$ {}_GC_j=2\lambda_j \tag{8}$$

これを(7)′式に代入すると，

$$ G=\sum_{i=1}^{m}{}_GC_i \tag{9}$$

である。

他方で，ジニ係数(G)の階級別寄与率$({}_GR_j)$は，Gにたいする階級別寄与度$({}_GC_j)$の割合である。すなわち，

$$ {}_GR_j=\frac{{}_GC_j}{G} \tag{10}$$

階級別寄与率の数学的性質により，その総和は1である。すなわち，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}{}_GR_i&=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}_GC_i}{G}\\&=\frac{1}{G}\sum_{i=1}^{m}{}_GC_i\\&=\frac{1}{G}\times G=1\end{aligned}$$

図1より，

$$\lambda_j=\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}$$

であるから，寄与度（第j階級）の一般式は，以下のようになる。

$$ {}_GC_j=2\lambda_j=(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\} \tag{11}$$

ただし，所得分布がm個の等分位階級に分割された場合は，すべての所得割合(x_j)が同一である$(x_j=x)$。

すでに述べたように，

$$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}=x_j \qquad (3)[再掲]$$

であるから，

$$x_j=x=\frac{1}{m} \qquad (1)[再掲]$$

である。よって(11)式は次のようになる。

$$\begin{aligned}{}_GC_j&=x\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}\\&=\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}\end{aligned} \tag{11$'$}$$

所得分布にかんする図形（図1）と整合的な階級別寄与度の数式は，(11)式および(11)′式である。しかし，(11)式を，次のように変形しても，階級別寄与度の値は変わらない。

$$ {}_GC_j=2\lambda_j=(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{p}_{j-1})-(\mathfrak{q}_j+\mathfrak{q}_{j-1})\} \tag{12}$$

ただし，所得分布がm個の等分位階級に分割された場合は，

$$ {}_GC_j=\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{p}_{j-1})-(\mathfrak{q}_j+\mathfrak{q}_{j-1})\} \tag{12$'$}$$

(2)　様々な計算式

上述したように，ジニ係数の定義式（(5)式）から(13)式が誘導され，それから(14)式が誘導される。さらに(14)式から(19)式が誘導され，その式からは(20)式が誘導される。この誘導過程については後述することにして，ここでは計算式の関係を図示する（図2）。

どの計算式を用いても，同一の所得分布のジニ係数の値は同じであるが，(13)式には図1に整合するという特徴がある。(20)式は計算手順が簡単であることから，手計算のための簡便式として使用されることもあるが，後に触れるように，この式ではジニ係数にたいする

$$G=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

$$\downarrow$$

$$G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\} \quad (13) \quad \rightarrow \quad G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})-(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1})\} \quad (14)$$

$$\downarrow$$

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)$$

$$\downarrow$$

$$G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (20)$$

図 2　様々なジニ係数の計算式

(1)　図中の式番号は本文に対応している。

(2)　(5)式と(13)式は図 1 との対応が明瞭である。

階級別寄与度を計算することができない（脚注 6 参照)。ジニ係数を 2 種類の相対度数（世帯割合(x_j)と所得割合(y_j)）に分解する式は，(19)式から誘導される。図中の式はいずれも旧聞に属すことではあるが，後の考察の準備として，以下で各式を誘導する。

① 計算式（その 1)

(11)式によると，ジニ係数(G)は次のようになる。

$$G=\sum_{i=1}^{m}{}_{G}C_i$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (13)$$

ただし，所得分布が m 個の等分位階級に分割されている場合は，(11)′ 式により

$$G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (13)'$$

である。

ジニ係数の計算表は，計算式ごとに作成できる。ここでは，図 1 に対応する(13)式と(13)′式にかんする計算表を掲げる（表 2(a)(b))[5]。

② 計算式（その 2）

(13)式を変形すれば，G は次のようになる。

$$G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})-(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (14)$$

ただし，所得分布がm個の等分位階級に分割されている場合は，(12)′ 式により

$$G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})-(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (14)'$$

である。

③ 計算式（その 3）

(14)式から(15)式が得られる。

$$G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})-(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (14)[再掲]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (15)$$

さらに(15)式を変形する。そのために，(15)式右辺の第 1 項を S とおき，各項を図 1 と対

(5)　基準時点への応用結果は付表 1(a)と付表 2(a)，比較時点については付表 1(b)と付表 2(b)である。

表 2 (a)　ジニ係数の計算表（その 1 ：一般形）

階級		累積相対度数				寄与度				寄与率
		世帯		所得					$_GC_i$	$_GR_i$
i	$i-1$	$\mathfrak{p}_i$	$\mathfrak{p}_{i-1}$	$\mathfrak{q}_i$	$\mathfrak{q}_{i-1}$	$\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1}$	$\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i$	$\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1}$	$(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}$	$\frac{_GC_i}{G}$
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
						(1)−(2)	(1)−(3)	(2)−(4)	(5) × ((6) + (7))	(8)/G
1	0	$\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{p}_0$	$\mathfrak{q}_1$	$\mathfrak{q}_0$	$\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_0$	$\mathfrak{p}_1-\mathfrak{q}_1$	$\mathfrak{p}_0-\mathfrak{q}_0$	$(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_0)\{(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{q}_1)+(\mathfrak{p}_0-\mathfrak{q}_0)\}$	$\frac{_GC_1}{G}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$j-1$	$\mathfrak{p}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}$	$\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{q}_{j-1}$	$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}$	$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$	$(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}$	$\frac{_GC_j}{G}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$m-1$	$\mathfrak{p}_m$	$\mathfrak{p}_{m-1}$	$\mathfrak{q}_m$	$\mathfrak{q}_{m-1}$	$\mathfrak{p}_m-\mathfrak{p}_{m-1}$	$\mathfrak{p}_m-\mathfrak{q}_m$	$\mathfrak{p}_{m-1}-\mathfrak{q}_{m-1}$	$(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{p}_{m-1})\{(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{q}_m)+(\mathfrak{p}_{m-1}-\mathfrak{q}_{m-1})\}$	$\frac{_GC_m}{G}$
									$G=\Sigma(8)$	$\sum(9)=1$

（注）⒀式による。

表 2 (b)　ジニ係数の計算表（その 2 ：等分位区分）

階級（第 i・m 分位）		累積相対度数				寄与度				寄与率
		世帯		所得					$_GC_i$	$_GR_i$
i	$i-1$	$\mathfrak{p}_i$	$\mathfrak{p}_{i-1}$	$\mathfrak{q}_i$	$\mathfrak{q}_{i-1}$	$\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i$	$\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1}$	$(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})$	$\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}$	$\frac{_GC_i}{G}$
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
						(1)−(3)	(2)−(4)	(5) + (6)	$\frac{1}{m}\times(7)$	(8)/G
1	0	$\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{p}_0$	$\mathfrak{q}_1$	$\mathfrak{q}_0$	$\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_1$	$\mathfrak{p}_0-\mathfrak{q}_0$	$(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{q}_1)+(\mathfrak{p}_0-\mathfrak{q}_0)$	$\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{q}_1)+(\mathfrak{p}_0-\mathfrak{q}_0)\}$	$\frac{_GC_1}{G}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
j	$j-1$	$\mathfrak{p}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}$	$\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{q}_{j-1}$	$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$	$(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})$	$\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}$	$\frac{_GC_j}{G}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$m-1$	$\mathfrak{p}_m$	$\mathfrak{p}_{m-1}$	$\mathfrak{q}_m$	$\mathfrak{q}_{m-1}$	$\mathfrak{p}_m-\mathfrak{p}_m$	$\mathfrak{p}_{m-1}-\mathfrak{q}_{m-1}$	$(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{q}_m)+(\mathfrak{p}_{m-1}-\mathfrak{q}_{m-1})$	$\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{q}_m)+(\mathfrak{p}_{m-1}-\mathfrak{q}_{m-1})\}$	$\frac{_GC_m}{G}$
									$G=\sum(8)$	$\sum(9)=1$

（注）⒀′ 式による。

応させれば，次のようになる。

$$S=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1}) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&= \overbrace{(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_0)(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_0)}^{\text{直角三角形 } OA_1D_1 \text{ の面積の 2 倍}} +\cdots \\
&\quad + \overbrace{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{p}_{j-1})}^{\text{台形 } A_{j-1}D_{j-1}D_jA_j \text{ の面積の 2 倍}} +\cdots \\
&\quad + \overbrace{(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{p}_{m-1})(\mathfrak{p}_m+\mathfrak{p}_{m-1})}^{\text{台形 } A_{m-1}D_{m-1}D_mA_m \text{ の面積の 2 倍}}
\end{aligned} \tag{16$'$}$$

(16)′ 式の辺々を 2 で割れば，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S &= \overbrace{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_0)(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_0)}^{\text{直角三角形 } OA_1D_1 \text{ の面積}}+\cdots \\
&\quad + \overbrace{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{p}_{j-1})}^{\text{台形 } A_{j-1}D_{j-1}D_jA_j \text{ の面積}}+\cdots \\
&\quad + \overbrace{\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_m-\mathfrak{p}_{m-1})(\mathfrak{p}_m+\mathfrak{p}_{m-1})}^{\text{台形 } A_{m-1}D_{m-1}D_mA_m \text{ の面積}}
\end{aligned} \tag{17}$$

(17)式の右辺（1 個の直角三角形の面積と $(m-1)$ 個の台形の面積の総計）は，直角三角形 OA_mD_m の面積に等しい（図 1）。この直角三角形では，直角を挟む 2 辺の長さがいずれも 1 であるから，その面積は $\frac{1}{2}$ である。したがって，(16)式は

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}$$

となり，

$$S=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{p}_i+\mathfrak{p}_{i-1})=1 \tag{18}$$

を得る。この(18)式を(15)式に代入すれば，ジニ係数にかんするなじみの次式が誘導される。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \tag{19}$$

ただし，所得分布が m 個の等分位階級に分割されている場合は，

$$G=1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \tag{19$'$}$$

④　計算式（その 4）

(19)式を変形すれば，G にかんするより簡便な計算式を誘導することができる。

$$\begin{aligned}
G&=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad \text{(19)[再掲]} \\
&=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i+\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1}-\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_{i-1}) \\
&=1+\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1}) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i+\sum_{i=1}^{m}\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_{i-1} \\
&=1+\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1}) \\
&\quad -\{(\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{m-1}\mathfrak{q}_{m-1})+\mathfrak{p}_m\mathfrak{q}_m\} \\
&\quad +\{\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0+(\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1+\cdots+\mathfrak{p}_{m-1}\mathfrak{q}_{m-1})\} \\
&=1+\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1})-1 \\
&\qquad \because \\
&\qquad\qquad \mathfrak{p}_0=\mathfrak{q}_0=0,\ \mathfrak{p}_m=\mathfrak{q}_m=1 \\
&=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_{i-1})
\end{aligned} \tag{20}$$

[(6)]

（6）　第 j 階級の寄与度は

$${}_GC_j=(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\} \qquad \text{(11)[再掲]}$$

である。この総和はジニ係数である。(18)式の誘導過程が示すようにその和記号の中にある

$$\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_j-\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_{j-1} \qquad ④$$

の総和もまたジニ係数をあたえる。

以下では，④式が階級別寄与度をあたえるかどうかを検討する。そのためには，(11)式と④式との大小を比較すればよい。

$$\overbrace{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\}}^{\text{(11)式}}$$

2．分解式

(1) 一般形

前項で誘導した

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)[再掲]$$

から，ジニ係数を２種類の相対度数（世帯割合(x_j)と所得割合(y_j)）で表す分解式を誘導する。このために，次式を用いる。

$$\begin{cases}\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}=x_j & (3)[再掲]\\ \mathfrak{q}_j+\mathfrak{q}_{j-1}=2y_1+\cdots+2y_{j-1}+y_j & (4)[再掲]\end{cases}$$

(3)式と(4)式を(19)式に代入すると，x_jとy_jのいずれに着目するかによって，２とおりの分解式が誘導される。

① x_jに着目する分解式[(7)]

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}x_i(2y_1+\cdots+2y_{i-1}+y_i) \qquad (21)$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\{y_i+(2y_1+\cdots+2y_{i-1})\}x_i$$

$$\begin{aligned}=1-\{&y_1\cdot x_1+(y_2+2y_1)x_2+(y_3+2y_1+2y_2)x_3\\&+\cdots+(y_j+2y_1+\cdots+2y_{j-1})x_j+\cdots\\&+(y_m+2y_1+\cdots+2y_{m-1})x_m\}\end{aligned}$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i \qquad (22)$$

第j階級の世帯割合(x_j)のウェイトをζ（ゼータ）で表し，

$$\zeta_j=y_j+2\sum_{k=1}^{j-1}y_k \qquad (23)$$

とおけば，(22)式は

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i \qquad (24)$$

となる。

② y_jに着目する分解式[(8)]

(19)式は以下のようにも変形できる。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}x_i(2y_1+\cdots+2y_{i-1}+y_i) \qquad (21)[再掲]$$

$$\begin{aligned}=1-\{&x_1\cdot y_1+x_2(2y_1+y_2)+x_3(2y_1+2y_2+y_3)+\cdots\\&+x_j(2y_1+\cdots+2y_{j-1}+y_j)+\cdots\\&+x_{m-1}(2y_1+\cdots+2y_{m-2}+y_{m-1})\\&+x_m(2y_1+\cdots+2y_{m-1}+y_m)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=1-\{&x_1\cdot y_1+(x_2\cdot 2y_1+x_2\cdot y_2)\\&+(x_3\cdot 2y_1+x_3\cdot 2y_2+x_3\cdot y_3)+\cdots\\&+(x_j\cdot 2y_1+\cdots+x_j\cdot 2y_{j-1}+x_j\cdot y_j)\}+\cdots\\&+(x_{m-1}\cdot 2y_1+\cdots+x_{m-1}\cdot 2y_{m-2}+x_{m-1}\cdot y_{m-1})\\&+(x_m\cdot 2y_1+\cdots+x_m\cdot 2y_{m-1}+x_m\cdot y_m)\end{aligned}$$

$$-\overbrace{(\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_j-\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_{j-1})}^{④式}$$

$$\begin{aligned}&=(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{p}_j+\mathfrak{p}_{j-1})-(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})(\mathfrak{q}_j+\mathfrak{q}_{j-1})\\&\quad-(\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_j-\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_{j-1})\\&=\mathfrak{p}_j^2-\mathfrak{p}_{j-1}^2-\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_j-\cancel{\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_{j-1}}+\cancel{\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_j}+\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_{j-1}\\&\quad-\cancel{\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_j}+\cancel{\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_{j-1}}\\&=\mathfrak{p}_j^2-\mathfrak{p}_j\mathfrak{q}_j-\mathfrak{p}_{j-1}^2+\mathfrak{p}_{j-1}\mathfrak{q}_{j-1}\\&=\mathfrak{p}_j(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)-\mathfrak{p}_{j-1}(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\end{aligned}$$

ここに，$\mathfrak{p}_j\geq\mathfrak{p}_{j-1}$であり，$\mathfrak{p}_j>\mathfrak{q}_j$かつ$\mathfrak{p}_{j-1}>\mathfrak{q}_{j-1}$である（図１参照）。よって，

$$\begin{cases}(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)<(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\text{ のとき，}\\ \qquad \mathfrak{p}_j(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)-\mathfrak{p}_{j-1}(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\gtreqless 0\\ (\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)\geq(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\text{ のとき，}\\ \qquad \mathfrak{p}_j(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)-\mathfrak{p}_{j-1}(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\geq 0\end{cases}$$

となる。このことは，④式が，第j階級の寄与度をあたえる(11)式と同じ値をあたえるとは限らないことを意味する。④式は一般的に第j階級の寄与度の計算式としての機能を果たすことはない。

（７） 基準時点については付表３(a_1)，比較時点については付表３(b_1)。

（８） 基準時点については付表３(a_2)，比較時点については付表３(b_2)。

$$\begin{aligned}&=1-\{(x_1+2x_2+\cdots+2x_m)y_1\\&\quad+(x_2+2x_3+\cdots+2x_m)y_2\\&\quad+(x_3+2x_4+\cdots+2x_m)y_3+\cdots\\&\quad+(x_j+2x_{j+1}+\cdots+2x_m)y_j+\cdots\\&\quad+(x_{m-1}+2x_m)y_{m-1}+x_m\cdot y_m\}\\&=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i \qquad (25)\end{aligned}$$

第 j 階級の所得割合 (y_j) のウェイトを η（エータ）で表し，

$$\eta_j=x_j+2\sum_{k=j+1}^{m}x_k \qquad (26)$$

とおけば，(25)式は

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i \qquad (27)$$

となる。

③　2つの分解式の関係

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i \qquad (24)[\text{再掲}]$$

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i \qquad (27)[\text{再掲}]$$

を比較すれば，

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i=\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i \qquad (28)$$

が成立する。

他方で，第 j 階級にかんする $\zeta_j\cdot x_j$ と $\eta_j\cdot y_j$ については，

$$\zeta_j\cdot x_j\gtreqless\eta_j\cdot y_j \qquad (29)$$

である[9]。ここで，(29)式を

$$\frac{y_j}{x_j}\gtreqless\frac{1}{\dfrac{\eta_j}{\zeta_j}} \qquad (30)$$

と変形する。(29)式と(30)式は同値であるから，

$$\zeta_j\cdot x_j\gtreqless\eta_j\cdot y_j\Longleftrightarrow\frac{y_j}{x_j}\gtreqless\frac{1}{\dfrac{\eta_j}{\zeta_j}} \qquad (31)$$

となる（複号同順）。

(31)式は，①$\zeta_j\cdot x_j$ と $\eta_j\cdot y_j$ が相等しいことと②「所得割合 (y_j) にたいする世帯割合 (x_j) の比の値 (y_j/x_j)」が「所得割合のウェイト (η_j) にたいする世帯割合のウェイト (ζ_j) の比の値 (η_j/ζ_j) の逆数」に等しいこととは同値であることを合意する。換言すれば，(29)式における等号の成立条件は，

$$\frac{y_j}{x_j}=\frac{1}{\dfrac{\eta_j}{\zeta_j}} \qquad (32)$$

である。

(2)　特殊形

所得分布が m 個の等分位階級に分割されているという特殊な場合では，m 個の階級の世帯割合 (x_j) は，すべて同一であり，

$$x_j=x=\frac{1}{m} \qquad (1)[\text{再掲}]$$

である。(1)式を(25)式に代入すれば，分解式の特殊形を導出することができる[10]。

---

(9)　基準時点については付表 4(a)，比較時点については付表 4(b)。

(10)　(22)式に(1)式を代入しても，同様の結果が得られる。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i \qquad (25)[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x+2\sum_{k=i+1}^{m}x\right)y_i$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\{x+2\times x(m-i)\}y_i$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{1}{m}+2\times\frac{1}{m}(m-i)\right\}y_i$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i \qquad (33)$$ [11]

所得割合 (y_j) のウェイトを ν（ニュー）で表せば，第 j 階級のウェイトは

$$\nu_j=\frac{2m-2j+1}{m} \qquad (34)$$

となり，ジニ係数の分解式は次のように表される。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\cdot y_i \qquad (35)$$

なお，(33)式にもとづけば，たとえば，所得分布が五分位階級に分割される場合（$m=5$ のとき）は，次のようになる。

$$G=1-\left(\frac{9}{5}y_1+\frac{7}{5}y_2+\frac{5}{5}y_3+\frac{3}{5}y_4+\frac{1}{5}y_5\right) \qquad (33)'$$

また，十分位階級の場合（$m=10$ のとき）は，次のようになる。

$$G=1-\left(\frac{19}{10}y_1+\frac{17}{10}y_2+\frac{15}{10}y_3+\frac{13}{10}y_4+\frac{11}{10}y_5+\frac{9}{10}y_6+\frac{7}{10}y_7+\frac{5}{10}y_8+\frac{3}{10}y_9+\frac{1}{10}y_{10}\right) \qquad (33)''$$

(11)　(34)式を用いてあらかじめ計算した y_j のウェイト（付表５）によって，基準時点については付表６(a)，比較時点については付表６(b)を得る。

３．ウェイトと干与度

(1)　ウェイト

単一時点におけるジニ係数の分解式には，次の３種類がある。

$$\begin{cases} G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i & (22)[再掲] \\ \quad =1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i & (24)[再掲] \end{cases}$$

$$\begin{cases} G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i & (25)[再掲] \\ \quad =1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i & (27)[再掲] \end{cases}$$

$$\begin{cases} G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i & (33)[再掲] \\ \quad =1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\cdot y_i & (35)[再掲] \end{cases}$$

以下では，分解式における世帯割合 (x_j) のウェイト (ζ_j) が階級の順に小さくなり（(22)式），それとは逆に，所得割合 (y_j) のウェイト $(\eta_j,\ \nu_j)$ は階級の順に大きくなること（(25)式と(33)式）を述べる。

①　$G=1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i$　(24)[再掲]

所得割合 (y_j) は正であるから，

$$\zeta_j=y_j+2\sum_{k=1}^{j-1}y_k>0 \qquad (36)$$

であり，すべての階級について x_j のウェイト (ζ_j) は正数である。各階級のウェイトは以下のとおり，階級の順に大きくなり，第１階級のウェイト (ζ_1) が最小値であり，第 m 階級のウェイト (ζ_m) が最大値である。

第１階級 (x_1) のウェイト：$\zeta_1=y_1$
第２階級 (x_2) のウェイト：$\zeta_2=y_2+2y_1$
　　⋮
第 j 階級 (x_j) のウェイト：$\zeta_j=y_j+2y_1+\cdots+2y_{j-1}$

$\vdots$

第 m 階級(x_m)のウェイト：$\zeta_m = y_m + 2y_1 + \cdots + 2y_{m-1}$

最小となる第 1 階級のウェイト(ζ_1)は

$$\zeta_1 = y_j$$

であるが，

$$0 < y_1 < 1$$

であるから，ζ_1 の範囲は次のようになる。

$$0 < \zeta_1 < 1$$

次に最大値となる第 m 階級のウェイト(ζ_m)をもとめる。

$$\begin{aligned}\zeta_m &= y_m + 2y_1 + \cdots + 2y_{m-1} \\ &= y_m + 2y_1 + \cdots + 2y_{m-1} + \overbrace{(y_m - y_m)}^{\text{ゼロを加算}} \\ &= (2y_1 + \cdots + 2y_m) - y_m \\ &= 2(y_1 + \cdots + y_m) - y_m \\ &= 2 - y_m\end{aligned}$$

ただし，

$$0 < y_m < 1$$

であるから，第 m 階級のウェイトの範囲は次のようになる。

$$1 < \zeta_m < 2$$

以上から，すべてが 2 未満の正数であるウェイト(ζ_j)には，次式が成立する。

$$0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_j < \cdots < \zeta_m < 2 \qquad (37)$$
$$\text{ただし，} 0 < \zeta_1 < 1 < \zeta_m < 2$$

② $G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot y_i$ 　(27)[再掲]

世帯割合(x_j)は正数であるから，

$$\eta_j = x_j + 2\sum_{k=j+1}^{m} x_k > 0 \qquad (38)$$

であり，すべての階級について y_j のウェイト(η_j)は正数である。各階級のウェイトは以下のとおり階級の順に小さくなり，第 1 階級のウェイト(η_1)が最大値であり，第 m 階級のウェイト(η_m)が最小値である。

第 1 階級(y_1)のウェイト：$\eta_1 = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_m$

$\vdots$

第 j 階級(y_j)のウェイト：$\eta_j = x_j + 2x_{j+1} + \cdots + 2x_m$

$\vdots$

第($m-1$)階級(y_{m-1})のウェイト：$\eta_{m-1} = x_{m-1} + 2x_m$

第 m 階級(y_m)のウェイト：$\eta_m = x_m$

最大となる第 1 階級のウェイト(η_1)は次のようになる。

$$\begin{aligned}\eta_1 &= x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_m \\ &= x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_m + \overbrace{(x_1 - x_1)}^{\text{ゼロを加算}} \\ &= (2x_1 + \cdots + 2x_m) - x_1 \\ &= 2(x_1 + \cdots + x_m) - x_1 \\ &= 2 - x_1\end{aligned}$$

ただし，

$$0 < x_1 < 1$$

であるから，第 1 階級のウェイトの範囲は次のようになる。

$$2 > \eta_1 > 1$$

次に最小値となる第 m 階級のウェイト

(η_m)をもとめる。

$$\eta_m = x_m$$

については,

$$0 < x_m < 1$$

であるから,第 m 階級のウェイトの範囲は次のようになる。

$$1 > \eta_m > 0$$

以上から,すべてが 2 未満の正数であるウェイト(η_j)には,次式が成立する。

$$2 > \eta_1 > \cdots > \eta_j > \cdots > \eta_m > 0 \quad (39)$$
ただし,$2 > \eta_1 > 1 > \eta_m > 0$

③　$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \nu_i \cdot y_i$　(35)[再掲]

(35)式にあっては,y_j のウェイト

$$\nu_j = \frac{2m - 2j + 1}{m} \quad (34)[再掲]$$

は $1 \leq j \leq m$ において,j が 1 に近づくにつれて(小さくなるにつれて),ν_j は大きくなり,j が m に近づくにつれて(大きくなるにつれて),ν_j は小さくなる。j は m を超えないので,ウェイトはつねに正である。すなわち,

$$\nu_j > 0 \quad (40)$$

そして,$j=1$ のとき ν_j は最大値$\left(2 - \frac{1}{m}\right)$となり,$j=m$ のとき ν_j は最小値$\left(\frac{1}{m}\right)$となる。

よって,ウェイト(ν_j)には次式が成立する。

$$2 > \nu_1 > \cdots > \nu_j > \cdots > \nu_m > 0 \quad (41)$$
ただし,$\nu_1 = 2 - \frac{1}{m}$,$\nu_m = \frac{1}{m}$

(2)　干与度

ジニ係数の分解式は以下のとおりである。

$$\begin{cases} G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot x_i & (24)[再掲] \\ G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \eta_i \cdot y_i & (27)[再掲] \\ G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \nu_i \cdot y_i & (35)[再掲] \end{cases}$$

叙述の煩を避ける目的で,これらの分解式のウェイト(ζ_j, η_j, ν_j)をω_j(オメガ)で表し,その乗数(比率)(x_j, y_j)をρ_j(ロー)で表す。このとき,分解式は

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot \rho_i \quad (42)$$

と表すことができる。元の分解式において,ウェイトは正であり,その乗数たる世帯割合と所得割合も正であるから,$\omega_j > 0$ かつ $\rho_j > 0$,よって,(42)式については第 j 階級の $\omega_j \cdot \rho_j$ もまた正である。(42)式を見れば,$\omega_j \cdot \rho_j$ は,それが大きいほど,ジニ係数を小さくし,逆にそれが小さいほど,ジニ係数を大きくすることが分かる。(42)式は,寄与度分解式の形式をもたないが[12],階級別の $\omega_j \cdot \rho_j$ はジニ係数の大きさの規定に与している。このことから,本稿では,$\omega_j \cdot \rho_j$ を階級別干与度(より厳密には第 j 階級の干与度)(degree of participation)と言うことにする。

---

(12)　寄与度(degree of contribution)は,統計量(C)が $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$,あるいは $C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot c_i$($\alpha_i$ はウェイト)に分解されるときの c_i あるいは $\alpha_i \cdot c_i$ を指す。このように,寄与度分解式は項の和(もしくは積和)の形式をもつ。このことと(42)式を比較すれば,(42)式が寄与度分解式の形式をもっていないことが分かる。

4．２つの階級別干与度とその差

(1)　予備的考察

ここに，隣り合う２つの階級（第 j 階級と第 $(j+1)$ 階級）がある。階級別干与度はウェイトと比率の積であるから，次のようになる。

第 j 階級：$\omega_j \cdot \rho_j$
第 $(j+1)$ 階級：$\omega_{j+1} \cdot \rho_{j+1}$

次項以降ではこの２つの干与度の大小関係を考察する。ここでは，干与度を構成する①ウェイトと②比率を順に取り上げ，その準備とする。

始めに，①ウェイトについて。本稿で誘導したジニ係数の分解式においては，m 個のウェイトはいずれもが正であるが $(\omega_j>0,\ \omega_{j+1}>0)$，前項で述べたように，階級の順にウェイトを並べたとき，その系列の大小関係は分解式ごとに定まっている。階級番号の順に大きくなるか $(\omega_j<\omega_{j+1})$[13]，小さくなるか $(\omega_j>\omega_{j+1})$[14] の２とおりがある。すなわち，

$$\omega_j \lesseqgtr \omega_{j+1}$$

であるから，

$$\Delta\omega_j=\omega_{j+1}-\omega_j \gtrless 0 \tag{43}$$

である。(43)式から

$$\omega_{j+1}=\omega_j+\Delta\omega_j \tag{44}$$

が誘導される。

次に②比率について。比率は，ウェイトの乗数となって，ウエイトとともに干与度の値を規定する。すべての比率は正であるが，階級の順に並べた比率の系列には定まった大小関係はない。すなわち，系列から隣り合う２項を抽出したときの大小関係は多様である $(\rho_j \lesseqgtr \rho_{j+1})$。よって，

$$\Delta\rho_j=\rho_{j+1}-\rho_j \gtreqless 0 \tag{45}$$

である。(45)式から

$$\rho_{j+1}=\rho_j+\Delta\rho_j \tag{46}$$

が誘導される。

上記の要約をかねて，以下では $\Delta\omega_j$ の符号を基準にして，それに $\Delta\rho_j$ を関連づけた図を掲げる（図３）。

(2)　干与度の差

２つの階級の干与度の差 $(\Delta\mathfrak{D}_j)$ は，

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}-\omega_j\cdot\rho_j \tag{47}$$

である。差の形式をもつ(47)式は取り扱いにくいので，これを和の形式に書き換える。そのために，(47)式に

$$\begin{cases}\omega_{j+1}=\omega_j+\Delta\omega_j & \text{(44)[再掲]}\\ \rho_{j+1}=\rho_j+\Delta\rho_j & \text{(46)[再掲]}\end{cases}$$

を代入する。

$$\begin{cases}\Delta\omega_j>0\begin{cases}\Delta\rho_j>0\\ \Delta\rho_j=0\\ \Delta\rho_j<0\end{cases}\\ \Delta\omega_j<0\begin{cases}\Delta\rho_j>0\\ \Delta\rho_j=0\\ \Delta\rho_j<0\end{cases}\end{cases}$$

図３　$\Delta\omega_j$ と $\Delta\rho_j$ の組み合わせ

---

(13)　(24)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i\right)$ が該当する。

(14)　(27)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i\right)$ と(35)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\cdot y_i\right)$ が該当する。

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{D}_j&=\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}-\omega_j\cdot\rho_j\\&=(\omega_j+\Delta\omega_j)(\rho_j+\Delta\rho_j)-\omega_j\cdot\rho_j\\&=\omega_j\cdot\rho_j+\omega_j\cdot\Delta\rho_j+\Delta\omega_j\cdot\rho_j+\Delta\omega_j\cdot\Delta\rho_j-\omega_j\cdot\rho_j\\&=\omega_j\cdot\Delta\rho_j+\Delta\omega_j\cdot\rho_j+\Delta\omega_j\cdot\Delta\rho_j\\&=(\omega_j+\Delta\omega_j)\Delta\rho_j+\Delta\omega_j\cdot\rho_j\\&=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j\end{aligned}\tag{48}$$

以下では，(48)式右辺の各項を順に取り上げる。

始めに，(48)式右辺第１項$(\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j)$について。ウェイトはつねに正であるから，$\omega_{j+1}>0$であり，他方，$\Delta\rho_j\lesseqgtr 0$である（(45)式参照）。よって，

$$\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j\lesseqgtr 0$$

である（複号同順）。

次に，(48)式右辺第２項$(\rho_j\cdot\Delta\omega_j)$について。比率はつねに正であるから，$\rho_j>0$であり，他方，$\Delta\omega_j\gtreqless 0$である（(43)式参照）。よって，

$$\rho_j\cdot\Delta\omega_j\gtreqless 0$$

である（複号同順）。

これまでは，$\Delta\mathfrak{D}_j$を構成する各項の符号を考察した。次に項を改めて，$\Delta\mathfrak{D}_j$の符号を取り上げ，２つの干与度の大小関係を考察する。

(3)　２つの干与度の大小関係（その１）

隣り合う２つの階級にかんする干与度の差$(\Delta\mathfrak{D}_j)$は

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j\qquad(48)[再掲]$$

である。このことは前項で述べた。以下では，この$\Delta\mathfrak{D}_j$の符号（干与度の大小関係）を，$\Delta\omega_j$に着目して考察する。$\Delta\omega_j\gtreqless 0$の符号のそれぞれについて，$\Delta\rho_j$の値は３とおりあって，$\Delta\rho_j\lesseqgtr 0$である（図３）。

始めに，$\Delta\omega_j>0$のときを取り上げる。$\rho_j>0$であるから，(48)式右辺第２項はつねに正である$(\rho_j\cdot\Delta\omega_j>0)$。$\Delta\omega_j>0$で，$\Delta\rho_j\geq 0$のとき，(48)式右辺第１項は正かゼロである$(\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j\geq 0)$。よって，

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j>0\tag{49}$$

である。下位階級の階級別干与度は，つねに上位階級より小さい。

次に，$\Delta\omega_j<0$のときを取り上げる。$\rho_j>0$であるから，$\Delta\mathfrak{D}_j$にかんする(48)式右辺第２項はつねに負である$(\rho_j\cdot\Delta\omega_j<0)$。$\Delta\omega_j<0$で，$\Delta\rho_j\leq 0$のとき，(48)式右辺第１項は負かゼロである$(\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j\leq 0)$。よって，

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j<0\tag{50}$$

である。下位階級の階級別干与度は，つねに上位階級より大きい。

上で見たように，$\Delta\omega_j>0$のとき，$\Delta\rho_j\geq 0$のもとで$\Delta\mathfrak{D}_j>0$となり，$\Delta\omega_j<0$のとき，$\Delta\rho_j\leq 0$のもとで$\Delta\mathfrak{D}_j<0$となる。干与度の大小関係は，ウェイトの大小関係と同じである。このような大小関係の同一性は，ジニ係数の分解式がもつ普遍的な特質であろうか。

以下では，①$\Delta\omega_j>0$かつ$\Delta\rho_j<0$のときと②$\Delta\omega_j<0$かつ$\Delta\rho_j>0$のときを取り上げて，干与度が階級の順序と同様の大小関係にあるのは限られることを述べる。

始めに，①$\Delta\omega_j>0$かつ$\Delta\rho_j<0$のときを取り上げる。

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j\qquad(48)[再掲]$$

において，$\Delta\rho_j<0$のとき，(48)式右辺第１項は$\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j<0$である。第２項は$\rho_j\cdot\Delta\omega_j>0$である。(48)式右辺の２つの項において符号が

互いに逆になっている（第 1 項は負，第 2 項は 正)。$|\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j|<|\rho_j\cdot\Delta\omega_j|$ の と き に は，$\Delta\mathfrak{D}_j>0$ であるが，$|\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j|\geq|\rho_j\cdot\Delta\omega_j|$ のときには，$\Delta\mathfrak{D}_j\leq 0$ である。以上から，$\Delta\omega_j>0$ のもとでは，$\Delta\rho_j<0$ のときに

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j \lesseqgtr 0 \tag{51}$$

である。$\Delta\omega_j>0$ のもとでも，$\Delta\mathfrak{D}_j>0$ が成立しない場合があり，干与度の大小関係はウェイトの大小関係と異なることがある。

次に，②$\Delta\omega_j<0$ かつ $\Delta\rho_j>0$ のときを取り上げる。このとき，(48)式右辺の 2 つの項において符号が互いに逆になっている（第 1 項は正，第 2 項は負)。$|\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j|<|\rho_j\cdot\Delta\omega_j|$ のときには，$\Delta\mathfrak{D}_j<0$ であるが，$|\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j|\geq|\rho_j\cdot\Delta\omega_j|$ のときには，$\Delta\mathfrak{D}_j\geq 0$ である。以上から，$\Delta\omega_j<0$ のもとでは，$\Delta\rho_j>0$ のときに

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j \lesseqgtr 0 \tag{52}$$

である（(51)式と同じ)。$\Delta\mathfrak{D}_j<0$ が成立しない場合があり，干与度の大小関係はウェイトの大小関係と異なることがある。

以上，要するに，隣り合う 2 つの階級別干与度$(\omega_j\cdot\rho_j, \omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1})$の大小関係$(\Delta\mathfrak{D}_j\gtreqless 0)$をウェイトの差$(\Delta\omega_j=\omega_{j+1}-\omega_j)$および比率の差$(\Delta\rho_j=\rho_{j+1}-\rho_j)$と関係づければ，次のようになる。

$$(\Delta\omega_j>0\wedge\Delta\rho_j\geq 0)\Longleftrightarrow\Delta\mathfrak{D}_j>0 \tag{53}$$
$$(\Delta\omega_j<0\wedge\Delta\rho_j\leq 0)\Longleftrightarrow\Delta\mathfrak{D}_j<0 \tag{54}$$

ただし，$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}-\omega_j\cdot\rho_j$

(47)[再掲]

(53)式が成立するとき，第 j 階級の干与度が第$(j+1)$階級より小さいので，第 j 階級によるジニ係数の押し上げ効果は，第$(j+1)$階級より大きい。他方で，(54)式が成立するとき，第$(j+1)$階級の干与度が第 j 階級より小さいので，第$(j+1)$階級によるジニ係数の押し上げ効果は，第 j 階級より大きい。

ところが，2 つの階級の間には

$$(\Delta\omega_j>0\wedge\Delta\rho_j<0)\vee(\Delta\omega_j<0\wedge\Delta\rho_j>0)\Leftrightarrow\Delta\mathfrak{D}_j\gtreqless 0 \tag{55}$$

が成立することもあり，階級順位の高低と干与度の大小が異なる場合がある[15]。階級別干与度の大小関係は事前に定めることはできない。このことは，ジニ係数の分解式がもつ数学的性質の一つである。これにたいして，ジニ係数の分解式におけるウェイトは，階級の順に大小関係が定まっている。これは分解式におけるウェイトの数学的性質の一つである。

(4)　2 つの干与度の大小関係（その 2）

前項では，

$$\Delta\mathfrak{D}_j\lesseqgtr 0 \tag{56}$$

を明らかにした。ここでは(56)式において等号が成立する条件を考察する。

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}-\omega_j\cdot\rho_j \qquad \text{(47)[再掲]}$$

であるから，(56)式において等号が成立するとき，

$$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}-\omega_j\cdot\rho_j=0 \tag{57}$$

である。これを変形する。

$$\omega_{j+1}\cdot\rho_{j+1}=\omega_j\cdot\rho_j$$

(15)　基準時点における階級別干与度のグラフは，付図 1(a)，付図 2(a)，付図 3(a)，他方，比較時点における階級別干与度については，付図 1(b)，付図 2(b)，付図 3(b)。

$$\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}\cdot\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}=1 \tag{58}$$

(58)式は $\left(\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}\right)$ と $\left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}\right)$ が，互いに逆数の関係にあることを示している。したがって，

$0<\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}<1$ のとき，$\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}>1$ である。
$(\omega_j<\omega_{j+1} \rightarrow \rho_j>\rho_{j+1})$

$\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}>1$ のとき，$0<\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}<1$ である。
$(\omega_j>\omega_{j+1} \rightarrow \rho_j<\rho_{j+1})$

このことは，ウェイトの大小関係が $\omega_j<\omega_{j+1}$ となる分解式では，$\Delta\mathfrak{D}_j=0$ が成立するならば，比率の大小関係は $\rho_j>\rho_{j+1}$ であることを意味し，他方，$\omega_j>\omega_{j+1}$ となる分解式では，$\Delta\mathfrak{D}_j=0$ が成立するならば，比率の大小関係は $\rho_j<\rho_{j+1}$ であることを意味する。いずれの場合においても，「逆は真ならず(contrarium non)」であり，比率の大小関係 $(\rho_j\gtrless\rho_{j+1})$ は $\Delta\mathfrak{D}_j=0$ の必要条件であって，十分条件ではない。

ここで，$\Delta\mathfrak{D}_j=0$ が成立する条件を見出すために，(58)式を変形すると，次式を得る。

$$\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}=\frac{1}{\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}} \tag{59}$$

(59)式は

$$\Delta\mathfrak{D}_j=0$$

と同値である。したがって，次式が成立する。

$$\Delta\mathfrak{D}_j=0 \Leftrightarrow \frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}=\frac{1}{\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}} \tag{60}$$

よって，２つの階級のウェイトの比の値 $\left(\frac{\omega_j}{\omega_{j+1}}\right)$ と比率の比の値 $\left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}}\right)$ の逆数が等しいとき，２つに階級の干与度は相等しい(16)。なお，(58)式により，$\Delta\mathfrak{D}_j=0$ のとき，$\omega_j<\omega_{j+1}$ となる分解式では，$\rho_j>\rho_{j+1}$ であり，$\omega_j>\omega_{j+1}$ となる分解式では，$\rho_j<\rho_{j+1}$ である。

む　す　び

本稿における考察は，以下のように要約される。

1．単一時点におけるジニ係数(G)は以下のとおりである。

$$G=\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \qquad (5)[再掲]$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (13)[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)[再掲]$$

ただし，所得分布が m 個の等分位階級に分割されている場合は，

$$G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\} \qquad (13)'[再掲]$$

$$=1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_{i-1}) \qquad (19)'[再掲]$$

である。

2．ジニ係数にたいする第 j 階級の寄与度は

(16)　$\Delta\mathfrak{D}_j$ を(47)式ではなく，前項に倣って，
$\Delta\mathfrak{D}_j=\omega_{j+1}\cdot\Delta\rho_j+\rho_j\cdot\Delta\omega_j$
とするとき，$\Delta\mathfrak{D}_j=0$ が成立する条件は，次のようになる。
$$\frac{\Delta\omega_j}{\omega_{j+1}}=-\frac{\Delta\rho_j}{\rho_j}$$

以下のとおりである（⒀式による）。

$${}_GC_j=(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1})\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\} \quad ⑾[再掲]$$

ただし，所得分布が m 個の等分位階級に分割されている場合は，

$${}_GC_j=\frac{1}{m}\{(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})\} \quad ⑾'[再掲]$$

である（⒀′ 式による）。

３．ジニ係数は，次式のように世帯割合(x_i)と所得割合(y_i)に分解される（⒆式による一般形の導出）。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i \quad ㉒[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i \quad ㉔[再掲]$$

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i \quad ㉕[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i \quad ㉗[再掲]$$

ただし，所得分布が m 個の等分位階級に分割されている場合の分解式は単一であり，

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i \quad ㉝[再掲]$$

$$=1-\sum_{i=1}^{m}\nu_i\cdot y_i \quad ㉟[再掲]$$

である（特殊形の導出）。

４．分解式において世帯割合(x_i)あるいは所得割合(y_i)を乗数とするウェイト(ζ_j，η_j，ν_j)の値は，階級の順に大きくなるか小さくなるかのいずれかであり，ウェイトごとの大小関係は以下のとおりである。

$$0<\zeta_1<\cdots<\zeta_j<\cdots<\zeta_m<2 \quad ㊲[再掲]$$

$$2>\eta_1>\cdots>\eta_j>\cdots>\eta_m>0 \quad ㊴[再掲]$$

$$2>\nu_1>\cdots>\nu_j>\cdots>\nu_m>0 \quad ㊶[再掲]$$

これは，分解式におけるウェイトの数学的性質である。

５．同一の所得分布にたいする２つの分解式（㉔式と㉗式）があたえる２つの階級別干与度の総和は相等しい。すなわち

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\cdot x_i=\sum_{i=1}^{m}\eta_i\cdot y_i \quad ㉘[再掲]$$

６．同一の所得分布にたいする２つの分解式（㉔式と㉗式）があたえる２つの階級別干与度($\zeta_j\cdot x_j, \eta_j\cdot y_j$)には，次式が成立する（複号同順)。

$$\zeta_j\cdot x_j \lesseqgtr \eta_j\cdot y_j \Longleftrightarrow \frac{y_j}{x_j} \gtreqless \frac{1}{\dfrac{\eta_j}{\zeta_j}} \quad ㉚[再掲]$$

所得割合(y_j)にたいする世帯割合(x_j)の比が，所得割合にかんするウェイト(η_j)にたいする世帯割合にかんするウェイト(ζ_j)の比の逆数に等しい階級に限って，２つの分解式による階級別干与度は相等しい。

７．分解式は次のように一般化される。

$$G=1-\sum_{i=1}^{m}\omega_i\cdot\rho_i \quad ㊷[再掲]$$

小さな値の $\omega_j\cdot\rho_j$ は大きい値に較べて，ジニ係数の値を大きくする。$\omega_j\cdot\rho_j$（階級別干与度）の計測によって階級特性が析出される。

８．階級別干与度($\omega_j\cdot\rho_j$)のウェイト(ω_j)に

は，階級の順にその大小関係が定まっている。これとは対照的に，ウェイト（ω_j）と比率（ρ_j）の積としてあたえられる階級別干与度（$\omega_j \cdot \rho_j$）には，階級の順に従って必ず大きくなる（小さくなる），という性質はない。干与度のこの性質は，ジニ係数の分解式の数学的性質でもある。

（2021 年 1 月 9 日提出）

付表

付表 A(1)　基礎データ（基準時点）（その 1）

階級	世帯所得 (1)	世帯数 (2)	所得計 (1)×(2)	相対度数		累積相対度数	
				世帯割合(x_j)	所得割合(y_j)	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)
第 1 階級	1	2	2	0.0800	0.0146	0.0800	0.0146
第 2 階級	2	3	6	0.1200	0.0438	0.2000	0.0584
第 3 階級	3	3	9	0.1200	0.0657	0.3200	0.1241
第 4 階級	4	2	8	0.0800	0.0584	0.4000	0.1825
第 5 階級	5	2	10	0.0800	0.0730	0.4800	0.2555
第 6 階級	6	3	18	0.1200	0.1314	0.6000	0.3869
第 7 階級	7	3	21	0.1200	0.1533	0.7200	0.5401
第 8 階級	8	2	16	0.0800	0.1168	0.8000	0.6569
第 9 階級	9	3	27	0.1200	0.1971	0.9200	0.8540
第 10 階級	10	2	20	0.0800	0.1460	1.0000	1.0000
合　計		25	137	1.0000	1.0000		

(注) 世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表 A(2)　基礎データ（基準時点）（その 2）（五分位区分）

階級	世帯所得	世帯数	所得計	相対度数		累積相対度数	
				世帯割合(x_j)	所得割合(y_j)	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)
第 1 五分位	～2	5	8	0.2000	0.0584	0.2000	0.0584
第 2 五分位	3～4	5	17	0.2000	0.1241	0.4000	0.1825
第 3 五分位	5～6	5	28	0.2000	0.2044	0.6000	0.3869
第 4 五分位	7～8	5	37	0.2000	0.2701	0.8000	0.6569
第 5 五分位	9～	5	47	0.2000	0.3431	1.0000	1.0000
合　計		25	137	1.0000	1.0000		

(出所) 付表 A(1)

(注) 世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表 B⑴　基礎データ（比較時点）（その１）

階級	世帯所得 ⑴	世帯数 ⑵	所得計 ⑴×⑵	相対度数		累積相対度数	
				世帯割合(x_j)	所得割合(y_j)	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)
第 1 階級	1	6	6	0.2000	0.0395	0.2000	0.0395
第 2 階級	2	4	8	0.1333	0.0526	0.3333	0.0921
第 3 階級	3	2	6	0.0667	0.0395	0.4000	0.1316
第 4 階級	4	3	12	0.1000	0.0789	0.5000	0.2105
第 5 階級	5	2	10	0.0667	0.0658	0.5667	0.2763
第 6 階級	6	1	6	0.0333	0.0395	0.6000	0.3158
第 7 階級	7	2	14	0.0667	0.0921	0.6667	0.4079
第 8 階級	8	4	32	0.1333	0.2105	0.8000	0.6184
第 9 階級	9	2	18	0.0667	0.1184	0.8667	0.7368
第 10 階級	10	4	40	0.1333	0.2632	1.0000	1.0000
合　　計		30	152	1.0000	1.0000		

（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表 B⑵　基礎データ（比較時点）（その２）（五分位区分）

階級	世帯所得	世帯数	所得計	相対度数		累積相対度数	
				世帯割合(x_j)	所得割合(y_j)	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)
第 1 五分位	～1	6	6	0.2000	0.0395	0.2000	0.0395
第 2 五分位	2～3	6	14	0.2000	0.0921	0.4000	0.1316
第 3 五分位	4～6	6	28	0.2000	0.1842	0.6000	0.3158
第 4 五分位	7～8	6	46	0.2000	0.3026	0.8000	0.6184
第 5 五分位	9～	6	58	0.2000	0.3816	1.0000	1.0000
合　　計		30	152	1.0000	1.0000		

（出所）付表 B⑴
（注）世帯所得の単位は 100 万円，世帯数の単位は 1 戸。

付表 1 (a)　基準時点におけるジニ係数

階級	世帯所得	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)	寄与度				寄与率
				$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}$	$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$		
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
							(1)×{(2)+(3)}	(4)/G
第 1 階級	1	0.0800	0.0146	0.0800	0.0654	0.0000	0.0052	0.0177
第 2 階級	2	0.2000	0.0584	0.1200	0.1416	0.0654	0.0248	0.0842
第 3 階級	3	0.3200	0.1241	0.1200	0.1959	0.1416	0.0405	0.1373
第 4 階級	4	0.4000	0.1825	0.0800	0.2175	0.1959	0.0331	0.1122
第 5 階級	5	0.4800	0.2555	0.0800	0.2245	0.2175	0.0354	0.1199
第 6 階級	6	0.6000	0.3869	0.1200	0.2131	0.2245	0.0525	0.1781
第 7 階級	7	0.7200	0.5401	0.1200	0.1799	0.2131	0.0472	0.1599
第 8 階級	8	0.8000	0.6569	0.0800	0.1431	0.1799	0.0258	0.0876
第 9 階級	9	0.9200	0.8540	0.1200	0.0660	0.1431	0.0251	0.0851
第 10 階級	10	1.0000	1.0000	0.0800	0.0000	0.0660	0.0053	0.0179
合計							G=0.2949	1.0000

(注) ⒀式($G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}$)による。

付表 1 (b)　比較時点におけるジニ係数

階級	世帯所得	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)	寄与度				寄与率
				$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_{j-1}$	$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$		
				(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
							(1)×{(2)+(3)}	(4)/G
第 1 階級	1	0.2000	0.0395	0.2000	0.1605	0.0000	0.0321	0.0877
第 2 階級	2	0.3333	0.0921	0.1333	0.2412	0.1605	0.0536	0.1463
第 3 階級	3	0.4000	0.1316	0.0667	0.2684	0.2412	0.0340	0.0928
第 4 階級	4	0.5000	0.2105	0.1000	0.2895	0.2684	0.0558	0.1523
第 5 階級	5	0.5667	0.2763	0.0667	0.2904	0.2895	0.0387	0.1055
第 6 階級	6	0.6000	0.3158	0.0333	0.2842	0.2904	0.0192	0.0523
第 7 階級	7	0.6667	0.4079	0.0667	0.2588	0.2842	0.0362	0.0988
第 8 階級	8	0.8000	0.6184	0.1333	0.1816	0.2588	0.0587	0.1603
第 9 階級	9	0.8667	0.7368	0.0667	0.1298	0.1816	0.0208	0.0567
第 10 階級	10	1.0000	1.0000	0.1333	0.0000	0.1298	0.0173	0.0473
合計							G=0.3662	1.0000

(注) ⒀式($G=\sum_{i=1}^{m}(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{p}_{i-1})\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}$)による。

付表 2 (a)　基準時点におけるジニ係数（五分位階級区分）

階級	世帯所得	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)	寄与度				寄与率
				$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$	$(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})$		
				(1)	(2)	(3)	(4)*	(5)
							$(1/m)\times(3)$	$(4)/G$
第 1 五分位	～2	0.2000	0.0584	0.1416	0.0000	0.1416	0.0283	0.0990
第 2 五分位	3～4	0.4000	0.1825	0.2175	0.1416	0.3591	0.0718	0.2510
第 3 五分位	5～6	0.6000	0.3869	0.2131	0.2175	0.4307	0.0861	0.3010
第 4 五分位	7～8	0.8000	0.6569	0.1431	0.2131	0.3562	0.0712	0.2490
第 5 五分位	9～	1.0000	1.0000	0.0000	0.1431	0.1431	0.0286	0.1000
合計							$G=0.2861$	1.0000

(注) ⒀′式$\left(G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}\right)$による。

＊m は階級の数

付表 2 (b)　基準時点におけるジニ係数（五分位階級区分）

階級	世帯所得	世帯($\mathfrak{p}_j$)	所得($\mathfrak{q}_j$)	寄与度				寄与率
				$\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j$	$\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1}$	$(\mathfrak{p}_j-\mathfrak{q}_j)+(\mathfrak{p}_{j-1}-\mathfrak{q}_{j-1})$		
				(1)	(2)	(3)	(4)*	(5)
							$(1/m)\times(3)$	$(4)/G$
第 1 五分位	～1	0.2000	0.0395	0.1605	0.0000	0.1605	0.0321	0.0897
第 2 五分位	2～3	0.4000	0.1316	0.2684	0.1605	0.4289	0.0858	0.2397
第 3 五分位	4～6	0.6000	0.3158	0.2842	0.2684	0.5526	0.1105	0.3088
第 4 五分位	7～8	0.8000	0.6184	0.1816	0.2842	0.4658	0.0932	0.2603
第 5 五分位	9～	1.0000	1.0000	0.0000	0.1816	0.1816	0.0363	0.1015
合計							$G=0.3579$	1.0000

(注) ⒀′式$\left(G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{(\mathfrak{p}_i-\mathfrak{q}_i)+(\mathfrak{p}_{i-1}-\mathfrak{q}_{i-1})\}\right)$による。

＊m は階級の数

付表 3 (a_1)　基準時点におけるジニ係数の分解（その 1 ）

階級	世帯所得	(上段)所得割合(y_j) (下段)ウェイト(ζ_j)(強調体)										世帯割合(x_j)	階級別寄与度($\zeta_j \cdot x_j$)	ジニ係数(G)
		第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級			
		0.0146	0.0438	0.0657	0.0584	0.0730	0.1314	0.1533	0.1168	0.1971	0.1460			
第 1 階級	1	**0.0146**										0.0800	0.0012	
第 2 階級	2		**0.0730**									0.1200	0.0088	
第 3 階級	3			**0.1825**								0.1200	0.0219	
第 4 階級	4				**0.3066**							0.0800	0.0245	
第 5 階級	5					**0.4380**						0.0800	0.0350	
第 6 階級	6						**0.6423**					0.1200	0.0771	
第 7 階級	7							**0.9270**				0.1200	0.1112	
第 8 階級	8								**1.1971**			0.0800	0.0958	
第 9 階級	9									**1.5109**		0.1200	0.1813	
第 10 階級	10										**1.8540**	0.0800	0.1483	
合計												1.0000	0.7051	0.2949

（注）㉒式($G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i$)による。

付表 3 (a_2)　基準時点におけるジニ係数の分解（その 2 ）

階級	世帯所得	(上段)世帯割合(x_j) (下段)ウェイト(η_j)(強調体)										所得割合(y_j)	階級別寄与度($\eta_j \cdot y_j$)	ジニ係数(G)
		第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級			
		0.0800	0.1200	0.1200	0.0800	0.0800	0.1200	0.1200	0.0800	0.1200	0.0800			
第 1 階級	1	**1.9200**										0.0146	0.0280	
第 2 階級	2		**1.7200**									0.0438	0.0753	
第 3 階級	3			**1.4800**								0.0657	0.0972	
第 4 階級	4				**1.2800**							0.0584	0.0747	
第 5 階級	5					**1.1200**						0.0730	0.0818	
第 6 階級	6						**0.9200**					0.1314	0.1209	
第 7 階級	7							**0.6800**				0.1533	0.1042	
第 8 階級	8								**0.4800**			0.1168	0.0561	
第 9 階級	9									**0.2800**		0.1971	0.0552	
第 10 階級	10										**0.0800**	0.1460	0.0117	
合計												1.0000	0.7051	0.2949

（注）㉕式($G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i$)による。

付表 3 (b_1)　比較時点におけるジニ係数の分解（その 1）

階級	世帯	(上段)所得割合(y_j) (下段)ウェイト(ζ_j)(強調体)										世帯割合(x_j)	階級別干与度($\zeta_j \cdot x_j$)	ジニ係数(G)
		第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級			
		0.0395	0.0526	0.0395	0.0789	0.0658	0.0395	0.0921	0.2105	0.1184	0.2632			
第 1 階級	1	**0.0395**										0.2000	0.0079	
第 2 階級	2		**0.1316**									0.1333	0.0175	
第 3 階級	3			**0.2237**								0.0667	0.0149	
第 4 階級	4				**0.3421**							0.1000	0.0342	
第 5 階級	5					**0.4868**						0.0667	0.0325	
第 6 階級	6						**0.5921**					0.0333	0.0197	
第 7 階級	7							**0.7237**				0.0667	0.0482	
第 8 階級	8								**1.0263**			0.1333	0.1368	
第 9 階級	9									**1.3553**		0.0667	0.0904	
第 10 階級	10										**1.7368**	0.1333	0.2316	
合計												1.0000	0.6338	0.3662

（注）㉒式$\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i\right)$による。

付表 3 (b_2)　比較時点におけるジニ係数の分解（その 2）

階級	世帯所得	(上段)所得割合(x_j) (下段)ウェイト(η_j)(強調体)										所得割合(y_j)	階級別干与度($\eta_j \cdot y_j$)	ジニ係数(G)
		第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級			
		0.2000	0.1333	0.0667	0.1000	0.0667	0.0333	0.0667	0.1333	0.0667	0.1333			
第 1 階級	1	**1.8000**										0.0395	0.0711	
第 2 階級	2		**1.4667**									0.0526	0.0772	
第 3 階級	3			**1.2667**								0.0395	0.0500	
第 4 階級	4				**1.1000**							0.0789	0.0868	
第 5 階級	5					**0.9333**						0.0658	0.0614	
第 6 階級	6						**0.8333**					0.0395	0.0329	
第 7 階級	7							**0.7333**				0.0921	0.0675	
第 8 階級	8								**0.5333**			0.2105	0.1123	
第 9 階級	9									**0.3333**		0.1184	0.0395	
第 10 階級	10										**0.1333**	0.2632	0.0351	
合計												1.0000	0.6338	0.3662

（注）㉕式$\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i\right)$による。

付表 4 (a)　基準時点における 2 種類の階級別干与度

	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級	合計
$\zeta_j \cdot x_j^{(1)}$	0.0012	0.0088	0.0219	0.0245	0.0350	0.0771	0.1112	0.0958	0.1813	0.1483	0.7051
$\eta_j \cdot y_j^{(2)}$	0.0280	0.0753	0.0972	0.0747	0.0818	0.1209	0.1042	0.0561	0.0552	0.0117	0.7051

(出所)
⑴ 付表 3 (a_1)
⑵ 付表 3 (a_2)

付表 4 (b)　比較時点における 2 種類の階級別干与度

	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級	第 4 階級	第 5 階級	第 6 階級	第 7 階級	第 8 階級	第 9 階級	第 10 階級	合計
$\zeta_j \cdot x_j^{(1)}$	0.0079	0.0175	0.0149	0.0342	0.0325	0.0197	0.0482	0.1368	0.0904	0.2316	0.6338
$\eta_j \cdot y_j^{(2)}$	0.0711	0.0772	0.0500	0.0868	0.0614	0.0329	0.0675	0.1123	0.0395	0.0351	0.6338

(出所)
⑴ 付表 3 (b_1)
⑵ 付表 3 (b_2)

付表 5　階級別ウェイト（五分位階級区分）

第 1 五分位	第 2 五分位	第 3 五分位	第 4 五分位	第 5 五分位
1.8000	1.4000	1.0000	0.6000	0.2000

（注）㉞式($\nu_j=\dfrac{2m-2j+1}{m}$)による。

付表6 (a)　基準時点におけるジニ係数の分解（五分位階級区分）

階級	世帯所得	ウェイト (ν_j)*	所得割合 (y_j)	階級別干与度 ($\nu_j \cdot y_j$)	ジニ係数 (G)
第1五分位	～2	1.8000	0.0584	0.1051	
第2五分位	3～4	1.4000	0.1241	0.1737	
第3五分位	5～6	1.0000	0.2044	0.2044	
第4五分位	7～8	0.6000	0.2701	0.1620	
第5五分位	9～	0.2000	0.3431	0.0686	
合計			1.0000	0.7139	0.2861

（注）(33)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right)$ による。

*付表5による。

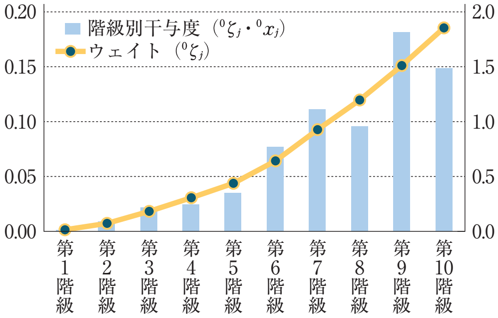
付表6 (b)　比較時点におけるジニ係数の分解（五分位階級区分）

階級	世帯所得	ウェイト (ν_j)*	所得割合 (y_j)	階級別干与度 ($\nu_j \cdot y_j$)	ジニ係数 (G)
第1五分位	～1	1.8000	0.0395	0.0711	
第2五分位	2～3	1.4000	0.0921	0.1289	
第3五分位	4～6	1.0000	0.1842	0.1842	
第4五分位	7～8	0.6000	0.3026	0.1816	
第5五分位	9～	0.2000	0.3816	0.0763	
合計			1.0000	0.6421	0.3579

（注）(33)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right)$ による。

*付表5による。

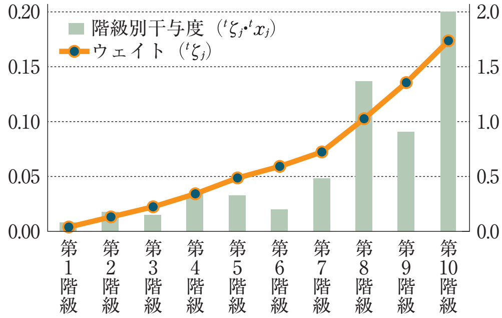
付図（左目盛：階級別干与度；右目盛：ウェイト）



付図 1 (a)　基準時点におけるウェイトと階級別干与度（その 1）

（出所）付表 3 (a_1)

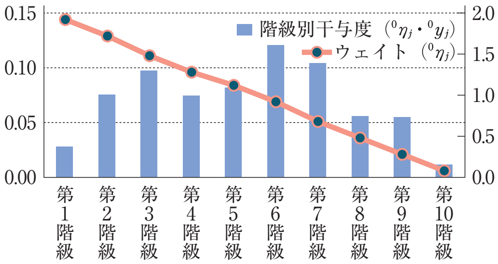
（注）(22)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i\right)$ による。



付図 1 (b)　比較時点におけるウェイトと階級別干与度（その 2）

（出所）付表 3 (b_1)

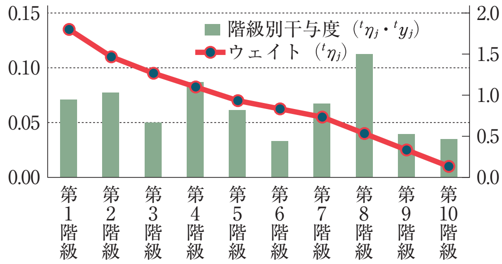
（注）(22)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i+2\sum_{k=1}^{i-1}y_k\right)x_i\right)$ による。



付図 2 (a)　基準時点におけるウェイトと階級別干与度（その 1）

（出所）付表 3 (a_2)

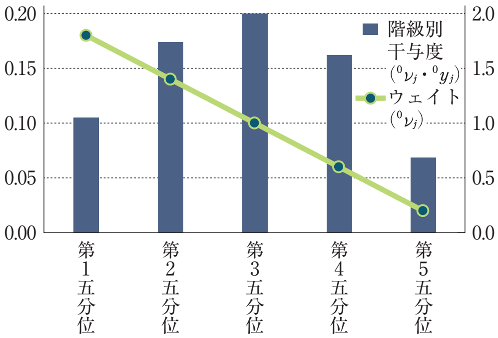
（注）(25)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i\right)$ による。



付図 2 (b)　比較時点におけるウェイトと階級別干与度（その 2）

（出所）付表 3 (b_2)

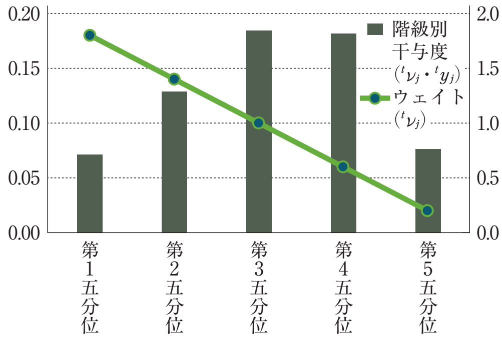
（注）(25)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i+2\sum_{k=i+1}^{m}x_k\right)y_i\right)$ による。



付図 3 (a)　基準時点におけるウェイトと階級別干与度（五分位階級区分）

（出所）付表 6 (a)

（注）(33)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right)$ による。



付図 3 (b)　比較時点におけるウェイトと階級別干与度（五分位階級区分）

（出所）付表 6 (b)

（注）(33)式 $\left(G=1-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{2m-2i+1}{m}\right)y_i\right)$ による。