

タイトル	ジニ係数の2時点間変化の寄与度分解にかんする試論
著者	木村, 和範; KIMURA, Kazunori
引用	北海学園大学学園論集(185): 13-22
発行日	2021-07-26

ジニ係数の2時点間変化の寄与度分解にかんする試論

木 村 和 範*

はじめに

1. 単一時点におけるジニ係数 (G) の分解式

(1) 一般形

(2) 特殊形

2. 2時点間変化 (ΔG) の分解式

(1) 一般形

(2) 特殊形

むすび

付表

付図

はじめに

昇順に配列した世帯所得の系列を m 個の階級に分割する (世帯総数は N , 階級別世帯数は n_j , 全世帯の所得総額は E , 階級別所得額は E_j)。第 j 階級の世帯割合を $x_j \left(= \frac{n_j}{N} \right)$, 所得割合を $y_j \left(= \frac{E_j}{E} \right)$ とする (簡単のために, $x_j > 0, y_j > 0$ とする)。そして, 第 j 階級までの世帯割合の累積相対度数を $p_j \left(= \sum_{i=1}^j x_i \right)$, 所

得割合の累積相対度数を $q_j \left(= \sum_{i=1}^j y_i \right)$ とする。

このとき, 単一時点におけるジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^m (p_i - p_{i-1})(q_i - q_{i-1}) \quad (1)$$

基準時点 (0) から比較時点 (t) までの2時点間におけるジニ係数の変化 (ΔG) は, 別稿⁽¹⁾で誘導したように, 世帯割合変動効果と所得割合変動効果の2つの効果 (要因) に分解さ

*本学名誉教授

(1) 木村和範「ジニ係数の2時点間変化にかんする要因分解」『経済論集』(北海学園大学)第69巻第1号(合併号), 2021年6月。

れ、次式であたえられる。

$$\Delta G = {}^tG - {}^0G$$

$$= \left[1 - \sum_{i=1}^m (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1})(\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}) \right] - \left[1 - \sum_{i=1}^m (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1})(\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}) \right]$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^m v_i \Delta x_i}_{\text{世帯割合変動効果}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m w_i \Delta y_i}_{\text{世帯割合変動効果}} \quad (2)$$

$$\text{ただし, } v_i = \bar{y}_i - 2\bar{q}_i, \quad w_i = 2\bar{p}_i - \bar{x}_i - 2,$$

$$\text{ここに, } \bar{x}_i = \frac{1}{2}({}^t x_i + {}^0 x_i), \quad \bar{y}_i = \frac{1}{2}({}^t y_i + {}^0 y_i),$$

$$\bar{p}_i = \frac{1}{2}({}^t p_i + {}^0 p_i), \quad \bar{q}_i = \frac{1}{2}({}^t q_i + {}^0 q_i)$$

本稿では、ジニ係数の2時点間変化にたいしては、(2)式とは異なる分解式があることを述べる。

1. 単一時点におけるジニ係数(G)の分解式⁽²⁾

(1) 一般形

単一時点におけるジニ係数((1)式)は以下のように2通りに分解することができる。

① 世帯割合(x_i)に着目した分解式

ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^m \zeta_i \cdot x_i \quad (3)$$

$$\text{ただし, } \zeta_i = y_i + \sum_{k=i-1}^m 2y_k \quad (4)$$

なお、所得割合は一般に正($y_i > 0$)としたので、 $\zeta_i > 0$ である。

② 所得割合(y_j)に着目した分解式

ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^m \eta_i \cdot y_i \quad (5)$$

$$\text{ただし, } \eta_i = x_i + \sum_{k=i+1}^m 2x_k \quad (6)$$

なお、世帯割合は一般に正($x_i > 0$)としたので、 $\eta_i > 0$ である。

(2) 特殊形

所得分布が m 個の等分位階級に区分されている場合、ジニ係数は次式であたえられる。

$$G = 1 - \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot y_i \quad (7)$$

$$\text{ただし, } \nu_i = \frac{2m - 2i + 1}{m} \quad (8)$$

なお、 $m \geq i$ であるから、 $\nu_i > 0$ である。

2. 2時点間変化(ΔG)の分解式

(1) 一般形

① 世帯割合(x_j)に着目した分解式

ジニ係数の2時点間変化は、(3)式により以下ようになる。

$$\Delta G = {}^tG - {}^0G$$

$$= \left[1 - \sum_{i=1}^m \zeta_i \cdot x_i \right] - \left[1 - \sum_{i=1}^m \zeta_i \cdot x_i \right] \quad (9)$$

$$= \sum_{i=1}^m (-{}^t \zeta_i \cdot {}^t x_i + {}^0 \zeta_i \cdot {}^0 x_i)$$

(2) 木村和範「ジニ係数の分解」『経済論集』(北海学園大学)第68巻第3・4号、2021年3月。

したがって、 ΔG にたいする第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(x_j)C_j$) は、

$$\Delta G(x_j)C_j = -{}^t\xi_j \cdot {}^t x_j + {}^0\xi_j \cdot {}^0 x_j \geq 0 \quad (10)$$

ただし、等号の成立条件は

$$\frac{{}^t x_j}{{}^0 x_j} = \frac{{}^t \xi_j}{{}^0 \xi_j} \quad (\because \xi_j > 0, x_j > 0)$$

である⁽³⁾。 $\Delta G(x_j)C_j > 0$ のとき (${}^t\xi_j \cdot {}^t x_j < {}^0\xi_j \cdot {}^0 x_j$)、第 j 階級は ΔG を押し上げ、 $\Delta G(x_j)C_j < 0$ のとき (${}^t\xi_j \cdot {}^t x_j > {}^0\xi_j \cdot {}^0 x_j$)、第 j 階級は ΔG を押し下げる。(10) 式において等号が成立して、 $\Delta G(x_j)C_j = 0$ のとき (${}^t\xi_j \cdot {}^t x_j = {}^0\xi_j \cdot {}^0 x_j$)、第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない（このとき世帯割合の増加率 (${}^t x_j / {}^0 x_j$) は、ウェイトの増加率 (${}^t \xi_j / {}^0 \xi_j$) の逆数に等しい)。

② 所得割合 (y_j) に着目した分解式

ジニ係数の2時点間変化は、(5)式により以下ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta G &= {}^t G - {}^0 G \\ &= \left[1 - \sum_{i=1}^m \eta_i \cdot {}^t y_i \right] - \left[1 - \sum_{i=1}^m \eta_i \cdot {}^0 y_i \right] \\ &= -\sum_{i=1}^m \eta_i \cdot {}^t y_i + \sum_{i=1}^m \eta_i \cdot {}^0 y_i \end{aligned} \quad (11)$$

したがって、 ΔG にたいする第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) は、

$$\Delta G(y_j)C_j = -{}^t \eta_j \cdot {}^t y_j + {}^0 \eta_j \cdot {}^0 y_j \geq 0 \quad (12)$$

ただし、等号の成立条件は

$$\frac{{}^t y_j}{{}^0 y_j} = \frac{{}^t \eta_j}{{}^0 \eta_j} \quad (\because \eta_j > 0, y_j > 0)$$

である⁽⁴⁾。 $\Delta G(y_j)C_j > 0$ のとき (${}^t \eta_j \cdot {}^t y_j < {}^0 \eta_j \cdot {}^0 y_j$)、第 j 階級は ΔG を押し上げ、 $\Delta G(y_j)C_j < 0$ のとき (${}^t \eta_j \cdot {}^t y_j > {}^0 \eta_j \cdot {}^0 y_j$)、第 j 階級は ΔG を押し下げる。(12) 式において等号が成立して、 $\Delta G(y_j)C_j = 0$ のとき (${}^t \eta_j \cdot {}^t y_j = {}^0 \eta_j \cdot {}^0 y_j$)、第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない（このとき所得割合の増加率 (${}^t y_j / {}^0 y_j$) は、ウェイトの増加率 (${}^t \eta_j / {}^0 \eta_j$) の逆数の符号を反転させた値に等しい)。

(2) 特殊形

所得分布が m 個の等分位階級に区分されているとき、ジニ係数の2時点間変化は、

$$G = 1 - \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot y_i \quad (7) \text{ [再掲]}$$

$$\text{ただし、} \nu_i = \frac{2m-2i+1}{m} \quad (8) \text{ [再掲]}$$

により、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta G &= \left[1 - \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot {}^t y_i \right] - \left[1 - \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot {}^0 y_i \right] \\ &= \left[1 - \sum_{i=1}^m \left(\frac{2m-2i+1}{m} \right) y_i \right] - \left[1 - \sum_{i=1}^m \left(\frac{2m-2i+1}{m} \right) y_i \right] \end{aligned}$$

(3) 仮設した基礎データ（付表 A(1), B(1)）への(10)式の応用結果は付表 1 であり、付図 1 はそれを図示した。第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(x_j)C_j$) と Δx との間には、負の相関がある ($r = -0.7184$)。

(4) 仮設した基礎データ（付表 A(1), B(1)）への(12)式の応用結果は付表 2 であり、付図 2 はそれを図示した。第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) と Δy との間には、負の相関がある ($r = -0.8229$)。

$$\begin{aligned}
 &= -\sum_{i=1}^m \left(\frac{2m-2i+1}{m} \right) {}^t y_i + \sum_{i=1}^m \left(\frac{2m-2i+1}{m} \right) {}^0 y_i \quad (13) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{2i-2m-1}{m} \right) {}^t y_i - \sum_{i=1}^m \left(\frac{2i-2m-1}{m} \right) {}^0 y_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{2i-2m-1}{m} \right) \Delta y_i
 \end{aligned}$$

したがって、 ΔG にたいする第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) は、以下ようになる⁽⁵⁾。

$$\Delta G(y_j)C_j = \left(\frac{2j-2m-1}{m} \right) \Delta y_j \quad (14)$$

ここに、

$$1 \leq j \leq m$$

であるから、

$$\frac{2j-2m-1}{m} < 0$$

である。 $\Delta G(y_j)C_j > 0$ のとき ($\Delta y_j < 0$)、第 j 階級は ΔG を押し上げ、 $\Delta G(y_j)C_j < 0$ のとき ($\Delta y_j > 0$)、第 j 階級は ΔG を押し下げる。(12)式において等号が成立して、 $\Delta G(y_j)C_j = 0$ のとき ($\Delta y_j = 0$)、第 j 階級は ΔG にたいして影響をあたえない。

む す び

本稿における考察は以下のように要約される。ジニ係数の2時点間変化 (ΔG) にたいする第 j 階級の寄与度は、所得分布が m 個の等分位階級に区分されている場合は、次式であたえられる (特殊形)。

$$\Delta G(y_j)C_j = \left(\frac{2j-2m-1}{m} \right) \Delta y_j \quad (14)$$

他方で、所得分布が等分位階級に区分されていない場合、 Δx_j に着目するとき、 ΔG にたいする第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(x_j)C_j$) は、

$$\Delta G(x_j)C_j = -{}^t \zeta_j {}^t x_j + {}^0 \zeta_j {}^0 x_j \geq 0 \quad (10) \text{ [再掲]}$$

$$\text{ただし、} \zeta_j = y_j + \sum_{k=j+1}^m 2y_k$$

であり、 Δy_j に着目するときの寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) は

$$\Delta G(y_j)C_j = -{}^t \eta_j {}^t y_j + {}^0 \eta_j {}^0 y_j \geq 0 \quad (12) \text{ [再掲]}$$

$$\text{ただし、} \eta_j = x_j + \sum_{k=j+1}^m 2x_k$$

である (一般形)。

一般形と特殊形のいずれにおいても、階級

(5) 等区分数 (m) を $m=5$ とした基礎データ (付表 A(2), B(2)) への(14)式の応用結果が付表3であり、付図3はそれを図示した。第 j 階級の寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) と Δy_j とは、負の相関関係にある ($r = -0.9504$)。なお、 Δy_j はウェイト $\left(\frac{2j-2m-1}{m} \right)$ とも、負の相関関係にあるが ($r = -0.8560$)、この値が -1 でないということから、第1五分位の寄与度が最大で、以後、階級の順に小さくなるとは言えないことが分る (付図3)。

別寄与度の総和は、ジニ係数の2時点間変化 (ΔG) に等しい。階級別寄与度が正のとき、その階級は ΔG を押し上げ、負のときは、押し下げる。

(2021 年 3 月 22 日提出)

付表

付表 A(1) 基礎データ (基準時点) (その1)

階級番号	世帯所得	世帯数(0n_j)	所得計(0E_j)	相対度数	
				世帯割合(${}^0x_j = \frac{{}^0n_j}{{}^0N}$)	所得割合(${}^0y_j = \frac{{}^0E_j}{{}^0E}$)
第1階級	1	2	2	0.0800	0.0146
第2階級	2	3	6	0.1200	0.0438
第3階級	3	3	9	0.1200	0.0657
第4階級	4	2	8	0.0800	0.0584
第5階級	5	2	10	0.0800	0.0730
第6階級	6	3	18	0.1200	0.1314
第7階級	7	3	21	0.1200	0.1533
第8階級	8	2	16	0.0800	0.1168
第9階級	9	3	27	0.1200	0.1971
第10階級	10	2	20	0.0800	0.1460
合 計 (全階級)		${}^0N=25$	${}^0E=137$	1.0000	1.0000

(注) 世帯所得の単位は100万円, 世帯数の単位は1戸。

付表 B(1) 基礎データ (比較時点) (その1)

階級番号	世帯所得	世帯数(${}^t n_j$)	所得計(${}^t E_j$)	相対度数	
				世帯割合(${}^t x_j = \frac{{}^t n_j}{{}^t N}$)	所得割合(${}^t y_j = \frac{{}^t E_j}{{}^t E}$)
第1階級	1	6	6	0.2000	0.0395
第2階級	2	4	8	0.1333	0.0526
第3階級	3	2	6	0.0667	0.0395
第4階級	4	3	12	0.1000	0.0789
第5階級	5	2	10	0.0667	0.0658
第6階級	6	1	6	0.0333	0.0395
第7階級	7	2	14	0.0667	0.0921
第8階級	8	4	32	0.1333	0.2105
第9階級	9	2	18	0.0667	0.1184
第10階級	10	4	40	0.1333	0.2632
合 計 (全階級)		${}^t N=30$	${}^t E=152$	1.0000	1.0000

(注) 世帯所得の単位は100万円, 世帯数の単位は1戸。

付表 A(2) 基礎データ（基準時点）（その2）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数(0n_j)	所得計(0E_j)	相対度数	
				世帯割合(${}^0x_j = \frac{{}^0n_j}{{}^0N}$)	所得割合(${}^0y_j = \frac{{}^0E_j}{{}^0E}$)
第1五分位	～2	5	8	0.2000	0.0584
第2五分位	3～4	5	17	0.2000	0.1241
第3五分位	5～6	5	28	0.2000	0.2044
第4五分位	7～8	5	37	0.2000	0.2701
第5五分位	9～	5	47	0.2000	0.3431
合 計（全分位）		25	137	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は100万円，世帯数の単位は1戸。

付表 B(2) 基礎データ（比較時点）（その2）（五分位区分）

階級番号	世帯所得	世帯数(${}^t n_j$)	所得計(${}^t E_j$)	相対度数	
				世帯割合(${}^t x_j = \frac{{}^t n_j}{{}^t N}$)	所得割合(${}^t y_j = \frac{{}^t E_j}{{}^t E}$)
第1五分位	～1	6	6	0.2000	0.0395
第2五分位	2～3	6	14	0.2000	0.0921
第3五分位	4～6	6	28	0.2000	0.1842
第4五分位	7～8	6	46	0.2000	0.3026
第5五分位	9～	6	58	0.2000	0.3816
合 計（全分位）		30	152	1.0000	1.0000

（注）世帯所得の単位は100万円，世帯数の単位は1戸。

付表1 ジニ係数の2時点間変化にかんする寄与度分解(その1)

			全階級	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級
${}^t\zeta_j$	(1)			0.0395	0.1316	0.2237
tx_j	(2)			0.2000	0.1333	0.0667
${}^t\zeta_j\cdot{}^tx_j$	(3)	(1) × (2)		0.0079	0.0175	0.0149
${}^0\zeta_j$	(4)			0.0146	0.0730	0.1825
0x_j	(5)			0.0800	0.1200	0.1200
${}^0\zeta_j\cdot{}^0x_j$	(6)	(4) × (5)		0.0012	0.0088	0.0219
Δx	(7)	(2) − (4)		0.1200	0.0133	− 0.0533
$\Delta G(x_j)C_j$	(8)	− (3) + (6)		− 0.0067	− 0.0088	0.0070
ΔG	(9)	$\Sigma(8)$	0.0713			

(注) $\Delta G(x_j)C_j = -{}^t\zeta_j \cdot {}^t x_j + {}^0\zeta_j \cdot {}^0 x_j$ (ただし, $\zeta_j = y_j + \sum_{k=j-1}^m 2y_k$)。 $G = 1 - \sum_{i=1}^m \zeta_i \cdot x_i$ により, ${}^tG = 0.3662$, ${}^0G = 0.2949$ 。 Δx と寄与度の相関係数: -0.7184。

(出所) 付表A(1), B(1)

付表2 ジニ係数の2時点間変化にかんする寄与度分解(その2)

			全階級	第 1 階級	第 2 階級	第 3 階級
${}^t\eta_j$	(1)			1. 8000	1. 4667	1. 2667
ty_j	(2)			0. 0395	0. 0526	0. 0395
${}^t\eta_j\cdot{}^ty_j$	(3)			(1) × (2)	0. 0711	0. 0772
${}^0\eta_j$	(4)			1. 9200	1. 7200	1. 4800
0y_j	(5)			0. 0146	0. 0438	0. 0657
${}^0\eta_j\cdot{}^0y_j$	(6)			(4) × (5)	0. 0280	0. 0753
Δy	(7)	(2) − (4)		0. 0249	0. 0088	− 0. 0262
$\Delta G(y_j)C_j$	(8)	− (3) + (6)		− 0. 0430	− 0. 0019	0. 0472
ΔG	(9)	$\Sigma(8)$	0. 0713			

(注) $\Delta G(y_j)C_j = -{}^t\eta_j \cdot {}^t y_j + {}^0\eta_j \cdot {}^0 y_j$ (ただし, $\eta_j = x_j + \sum_{k=j+1}^m 2x_k$)。 $G = 1 - \sum_{i=1}^m \eta_i \cdot y_i$ により, ${}^tG = 0.3662$, ${}^0G = 0.2949$ 。 Δy と寄与度の相関係数: -0.8229。

(出所) 付表A(1), B(1)

付表3 ジニ係数の2時点間変化にかんする寄与度分解(その3)

			全分位	第1五分位	第2五分位	第3五分位
$\frac{2j-2m-1}{m}$	(1)			-1.8000	-1.4000	-1.0000
${}^t y_j$	(2)			0.0395	0.0921	0.1842
${}^0 y_j$	(3)			0.0584	0.1241	0.2044
Δy_j	(4)	(2) - (3)		-0.0189	-0.0320	-0.0202
$\Delta G(y_j)C_j$	(5)	(1) × (4)		0.0341	0.0448	0.0202
ΔG	(6)	$\Sigma(5)$	0.0718			

(注) $\Delta G(y_j)C_j = \left(\frac{2j-2m-1}{m}\right) \Delta y_j$ 。 $G = 1 - \sum_{i=1}^m \nu_i \cdot y_i$ (ただし, $\nu_i = \frac{2m-2i+1}{m}$) により, ${}^tG = 0.3579$, ${}^0G = 0.2861$ 。 Δy と寄与度の相関係数: -0.9504。

(出所) 付表A(2), B(2)

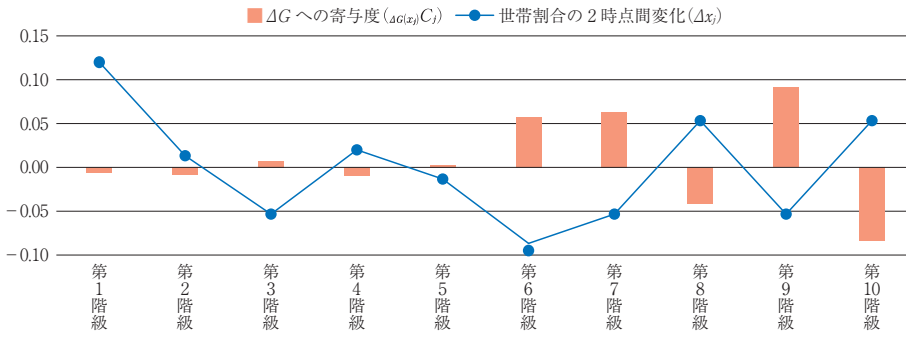
ジニ係数の2時点間変化の寄与度分解にかんする試論（木村和範）

第4階級	第5階級	第6階級	第7階級	第8階級	第9階級	第10階級
0.3421	0.4868	0.5921	0.7237	1.0263	1.3553	1.7368
0.1000	0.0667	0.0333	0.0667	0.1333	0.0667	0.1333
0.0342	0.0325	0.0197	0.0482	0.1368	0.0904	0.2316
0.3066	0.4380	0.6423	0.9270	1.1971	1.5109	1.8540
0.0800	0.0800	0.1200	0.1200	0.0800	0.1200	0.0800
0.0245	0.0350	0.0771	0.1112	0.0958	0.1813	0.1483
0.0200	-0.0133	-0.0867	-0.0533	0.0533	-0.0533	0.0533
-0.0097	0.0026	0.0573	0.0630	-0.0411	0.0910	-0.0833

第4階級	第5階級	第6階級	第7階級	第8階級	第9階級	第10階級
1.1000	0.9333	0.8333	0.7333	0.5333	0.3333	0.1333
0.0789	0.0658	0.0395	0.0921	0.2105	0.1184	0.2632
0.0868	0.0614	0.0329	0.0675	0.1123	0.0395	0.0351
1.2800	1.1200	0.9200	0.6800	0.4800	0.2800	0.0800
0.0584	0.0730	0.1314	0.1533	0.1168	0.1971	0.1460
0.0747	0.0818	0.1209	0.1042	0.0561	0.0552	0.0117
0.0206	-0.0072	-0.0919	-0.0612	0.0937	-0.0787	0.1172
-0.0121	0.0203	0.0880	0.0367	-0.0562	0.0157	-0.0234

第4五分位	第5五分位
-0.6000	-0.2000
0.3026	0.3816
0.2701	0.3431
0.0326	0.0385
-0.0195	-0.0077

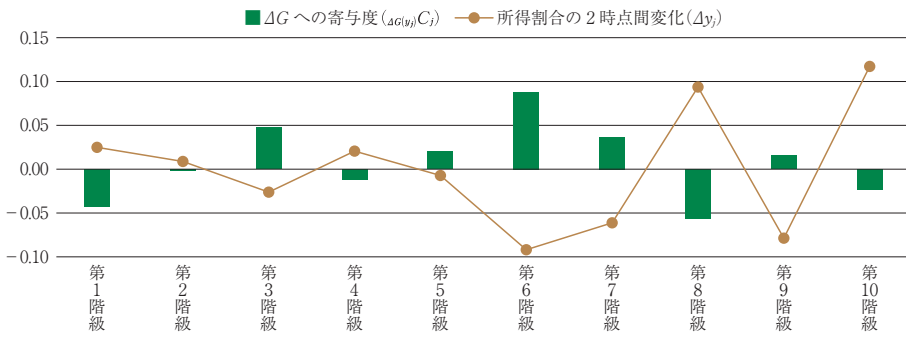
付図



付図1 ΔG への寄与度 ($\Delta G(x_j)C_j$) と世帯割合の2時点間変化 (Δx_i)

$r = -0.7184$

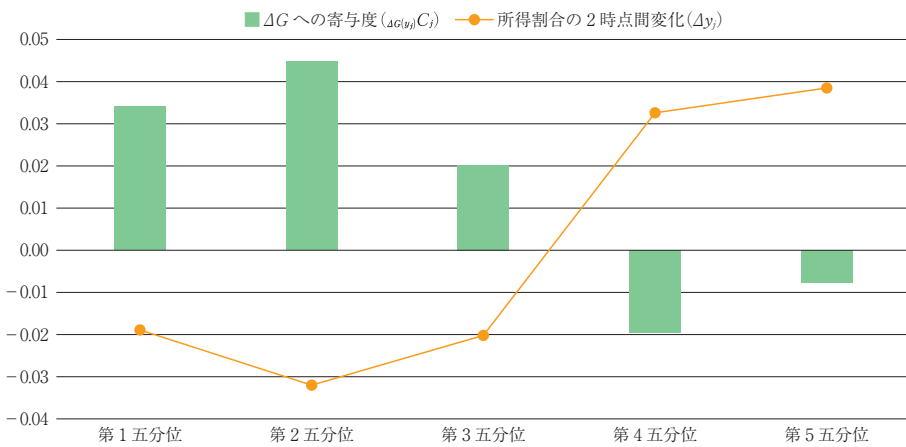
(出所) 付表1



付図2 ΔG への寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) と所得割合の2時点間変化 (Δy_i)

$r = -0.8229$

(出所) 付表2



付図3 ΔG への寄与度 ($\Delta G(y_j)C_j$) と所得割合の2時点間変化 (Δy_i) (等区分の場合)

$r = -0.9504$

(出所) 付表3