タイトル	非負値データの和・2乗和を用いた順位付けと統計学の応用
著者	山本，隆範；YAMAMOTO，Takanori
引用	開発論集(114)：83-95
発行日	2024-09-30

開発論集　第114号　83-95(2024年 9 月)

非負値データの和・2乗和を用いた順位付けと統計学の応用

山　本　隆　範*

1．哲学的背景（cf. T. Ando（安藤　毅）[1]）

大学受験の合否，資格試験の合否，奨学金の合否，入社試験の合否，競争的資金獲得などの場面では，合格点 L^1 を決定することと受験者を不合格者と合格者の 2 群に分類することは同じであることが多い。ボーダーラインの合格点の所に人数が集中した場合，予算の制約条件から，得点が丁度合格点であった人達全員を合格にできないときがある。その時は，再判定することがある。今回は科目数 N が 2 以上の場合を考える。

合格点を決定して受験者を決定する試験では N 科目が課せられるとする。各科目は 100 点満点で，どの科目の得点も平等に評価される。

受験者 X の得点列を $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ と書き，受験者 Y の得点列を $y=(y_1, y_2, ..., y_N)$ と書く。このとき，x と y の算術平均 $E(x)$，$E(y)$ はそれぞれ

$$m_x=\frac{x_1+x_2+...,+x_N}{N},\quad m_y=\frac{y_1+y_2+...,+y_N}{N}$$

となる。

受験者 X と Y が同じ得点列をもつとき $x\equiv y$ と書く。

順列 $(1, 2, ..., N)$ の permutation

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & N\\ \sigma_1 & \sigma_2 & ... & \sigma_N\end{pmatrix}$$

があって，$y\equiv x_\sigma$ のとき $x\sim y$ と書く。もし $x\sim y$ ならば，$m_x=m_y$ となる。しかし，逆に $m_x=m_y$ だからといって $x\sim y$ となるとは限らない。

Lemma 1.1. $x_1+x_2=y_1+y_2$ のとき，次の条件は互いに同値である。

（1）$x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2$.

（2）$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2=(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2$.

（3）$(x_1, x_2)\sim(y_1, y_2)$.

---

*（やまもと　たかのり）北海学園大学開発研究所研究員，北海学園大学工学部教授

Example 1.1. 人事担当の A 氏は 1 名の追加募集をしたところ x と y の 2 名の応募があった。A 氏は 1 人しか採用できないので，応募してきた x と y に「数学」と「英語」の 2 科目試験を行い 1 人だけを選考することにした。試験結果は $x=(x_1,x_2)=(a+2,a+8)$，$y=(y_1,y_2)=(a+4,a+6)$ であった。このとき

$$x_1+x_2=2a+10,\quad y_1+y_2=2a+10$$

だから，x と y の合計点は一致していた。このように第 1 回の判定ではデータの和を用いた。すると上記のように両者は同点で甲乙付け難かった。このとき

$$m_x=\frac{x_1+x_2}{2}=a+5,\quad m_y=\frac{y_1+y_2}{2}=a+5$$

だから，得点の算術平均を用いても $m_x=m_y$ だから両者は同点となる。

しかし，$x\sim y$ とはならない。なぜならば，$a+2<a+4<a+6<a+8$ だから $x_1<y_1<y_2<x_2$ となり，このとき，(x_1,x_2) を並べ替えて (y_1,y_2) とすることは不可能だからである。どの科目も平等に評価されることから，合否の判定では $x\sim y$ のとき x と y の合否判定結果は一致していなければならない。

今の例の場合は，$x\sim y$ は成り立っていないから x と y の合否判定結果は異なっても良いと考える。

そこで A 氏は第 2 回の再判定としてデータとその算術平均の差の 2 乗和：

$$M_2(x,1)=(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2,$$
$$M_2(y,1)=(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2$$

を用いた。これらの量は x,y の分散の定数倍になっている。

試験で採用を決定する場合,「公務員」への採用の場合と「企業」への採用や「大学への編入」の場合とでは，採用の背景にある「哲学」が異なるべきだと思われる。

「公務員」の場合は「過去に取得した知識が偏っていない事」が基本であり,「企業」や「大学」の場合は「将来への発展性」に重きをおく立場であるべきのように思う。

今の例の場合は

$$M_2(x,1)=\{(a+2)-(a+5)\}^2+\{(a+8)-(a+5)\}^2=18,$$
$$M_2(y,1)=\{(a+4)-(a+5)\}^2+\{(a+6)-(a+5)\}^2=2.$$

であるから,

$$M_2(x,1)>M_2(y,1)$$

となっている。「公務員」の場合は $M_2(x,1)$ と $M_2(y,1)$ の小さいほうを採用するから y を採用することになる。これに対して「企業」や「大学生」の場合は $M_2(x,1)$ と $M_2(y,1)$ の大きいほうを採用するから x を採用することになる。また，今の例の場合とは異なり $(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)$. が成り立っているときは，Lemma 1.1 より，$M_2(x,1)=M_2(y,1)$ となるから x と y は同順位になる。この場合は,「国語」の試験を追加するなどして順位付けすることになる。

２．N 科目受験のとき

Definition 2.1.　２つの得点列 $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ と $y=(y_1, y_2, ..., y_N)$ が次の３つの条件を満たすとき，x と y は再判定条件をみたすという。

●$x \sim y$ が成り立たない

●ベクトルとして $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$

●$x_1+x_2+...+x_N = y_1+y_2+...+y_N$

もし $x \sim y$ ならば，x と y は再判定条件をみたさない。

●もし受験者数が入学者定員を下回ったならば，全員を合格にする。よって合格点は最低点にすることで判定上の問題は生じない。

●もし受験者数が入学者定員を上回ったならば，合格点は最低点よりも高くし，如何なる方法で合格者数を入学者定員に近く抑えるかが問題になる。集合 $\mathcal{M}$ の構成要素の個数を ♯$(\mathcal{M})$ で表す。

正の整数 J と２以上の整数 N とベクトル $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ と

$$m_x = \frac{x_1+x_2+...,+x_N}{N}$$

に対して

$$M_2(x, J) = \frac{(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+...+(x_N-m_x)^2}{J}$$

と定める。(cf. E. Lloyd[3], M. Okamoto（岡本　雅典）and G. Suzuki（鈴木義一郎）[6]）このとき，$J=1, N-1, N$ に対して，

$$M_2(x, 1) = (x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+...+(x_N-m_x)^2,$$

$$M_2(x, N-1) = \frac{(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+...+(x_N-m_x)^2}{N-1},$$

$$M_2(x, N) = \frac{(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+...+(x_N-m_x)^2}{N}$$

となる。以下，得点を比較する量として，k-次モーメント：

$$M_k(x) = x_1^k+x_2^k+...+x_N^k, \quad (k=1, 2, ..., N)$$

を使う。

Lemma 2.1. （cf. G. Taguchi（田口　玄一）[8]，pp.5–7）

$$M_2(x,1)=M_2(x)-\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}.$$

即ち

$$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+\ldots+(x_N-m_x)^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2-\frac{(x_1+x_2+\ldots,+x_N)^2}{N}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}M_2(x,1)&=(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+\ldots+(x_N-m_x)^2,\\&=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2+Nm_x^2-2m_x(x_1+x_2+\ldots,+x_N)\\&=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2+\frac{(x_1+x_2+\ldots,+x_N)^2}{N}-\frac{2(x_1+x_2+\ldots,+x_N)^2}{N}\\&=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2-\frac{(x_1+x_2+\ldots,+x_N)^2}{N}\\&=M_2(x)-\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}\end{aligned}$$

となる。よって

$$M_2(x,1)=M_2(x)-\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}\qquad\square$$

Corollary 2.1.

$$M_2(x)=\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}+M_2(x,1),$$

即ち

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2=\frac{(x_1+x_2+\ldots,+x_N)^2}{N}+(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+\ldots+(x_N-m_x)^2$$

これらの量はすべて $\sim$ に関して invariant である。次の事実は基本的である。
（cf. S. Lang[2], I. G. Macdonald[4][5], R. P. Stanley[7]）

Newton の公式（T. Takagi（高木　貞治）[9] pp.144–146）N 次方程式

$$f(x)=x^N+a_1x^{N-1}+\ldots+a_N=0$$

の解を $x_1, x_2, \ldots, x_N$ とすれば，恒等的に

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_N).$$

右辺の項を展開して，係数比較すれば

$$x_1+x_2+\ldots,+x_N=-a_1,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{N-1}x_N=a_2,$$
$$\ldots$$

$$\sum x_1 x_2 .... x_k = (-1)^k a_k,$$
$$...$$
$$x_1 x_2 ... x_N = (-1)^N a_N.$$

$\sum$ は $x_1, x_2, ..., x_N$ の中 k 個ずつを取って掛け合わせた (nk) 個の積の上に渡る。但し (nk) は二項係数を表す。

これらはいずれも基本対称式と呼ばれる。すべての対称式は，基本対称式の整式として表すことができる。

変数 $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ の同時冪の和

$$M_k = M_k(x) = x_1^k + x_2^k + ..., x_N^k \quad (M_0(x) = N)$$

は対称式であり，これらの $M_1, M_2, M_3, ...$ と基本対称式 $a_1, a_2, a_3, ...$ との間には，次の関係がある。

$$M_1 + a_1 = 0$$
$$M_2 + a_1 M_1 + 2a_2 = 0$$
$$M_3 + a_1 M2 + a_2 M_1 + 3a_3 = 0,$$
$$...$$
$$M_{N-1} + a_1 M_{N-2} + ... + a_{N-2} M_1 + (N-1) a_{N-1} = 0$$
$$M_N + a_1 M_{N-1} + ... + a_{N-1} M_1 + N a_{N-1} = 0$$
$$M_{N+1} + a_1 M_N + ... + a_{N-1} M_2 + a_N M_1 = 0,$$
$$...$$

Example 2.1. Newton の公式から次々に $M_1, M_2, M_3, ...$ を $a_1, a_2, a_3, ...$ によって表すことができる。k の二，三の値に対する M_k を a で表せば次のようになる。

$$M_1 = -a_1,$$
$$M_2 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$M_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3,$$
$$M_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4,$$
$$...$$

また逆に $a_1, a_2, ..., a_n$ を $M_1, M_2, ..., M_n$ によって表すこともできるが，その場合には次のように係数の中に分数が現れる。

$$a_1 = -M_1$$
$$a_2 = \frac{a_1^2 - M_2}{2} = \frac{M_1^2 - M_2}{2}$$
$$a_3 = \frac{-a_1^3 + 3a_1 a_2 - M_3}{3} = \frac{M_1^3 - 3M_1 a_2 - M_3}{3}$$
$$...$$

次の事は基本的である。

Lemma 2.2.（cf. T. Ando（安藤　毅）[1]）N 個の等式：

$$x_1^k+x_2^k+\dots+x_N^k=y_1^k+y_2^k+\dots+y_N^k,\quad (k=1,2,\dots,N)$$

が成り立つならば,

$$(x_1,x_2,\dots,x_N)\sim(y_1,y_2,\dots,y_N)$$

となる。

この Lemma の証明は，S. Takanobu（高信　敏）[10] に掲載されている。安藤毅教授は［1］を一瀬孝教授に送信され，一瀬孝教授は［1］のことを高信敏教授に送信された。一瀬孝教授は［10］を安藤毅教授へ送信された。安藤毅教授はそれを筆者へ送信された。

Definition 2.2　得点列 $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$ と $y=(y_1,y_2,\dots,y_N)$ について

$$x_1+x_2+\dots,+x_N=y_1+y_2+\dots,+y_N$$

かつ

$$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+\dots+(x_N-m_x)^2\neq(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^{+}\dots+(y_N-m_y)^2$$

であるとき，x と y は順位付け可能であるという。ただし,

$$m_x=\frac{x_1+x_2+\dots,+x_N}{N},\quad m_y=\frac{y_1+y_2+\dots,+y_N}{N}$$

である。

Corollary 2.2.　2 つの得点列 $x=(x_1,x_2,\dots,x_N)$ と $y=(y_1,y_2,\dots,y_N)$ が再判定条件をみたすとき，$N-2$ 個の等式：

$$x_1^k+x_2^k+\dots+x_N^k=y_1^k+y_2^k+\dots+y_N^k,\quad (k=3,\dots,N)$$

が成り立つならば,

$$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+\dots+(x_N-m_x)^2\neq(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2+\dots+(y_N-m_y)^2$$

となる。即ち，x と y は順位付け可能である。

Definition 2.3.　非負整数 n に対し，数列 a_n を

$$a_n=\sharp\{(x_1,x_2,\dots,x_N):x_1+x_2+\dots+x_N\geq n\}$$

と定める。このとき

$$a_0\geq a_1\geq a_2\geq\dots\geq a_n\geq a_{n+1}\geq\dots\geq 0$$

となるから，a_n は非負単調減少数列である。

Example 2.2.　2 科目受験の入学試験の場合を考える。第 1 科目の得点を x_1，第 2 科目の得点を x_2 とすると和 x_1+x_2 は総合得点になる。このとき，総合得点が n 点以上の受験者数が

a_n 人になる。全受験者数は a_0 人になる。n が最高得点より大きいとき $a_n=0$ となる。

Lemma 2.3. (cf. G. Taguchi（田口　玄一）[8]，p.7.) $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ に対して次の２つの等式が成り立つ。

$$M_2(x)=\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}+NV(x).$$

$M_1(x)=mN$ のときは

$$M_2(x)=\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}+\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+...+(x_N-m)^2\}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}&\frac{\{M_1(x)\}^2}{N}+\left\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+...+(x_N-m)^2\right\}\\&=Nm^2+(x_1^2+x_2^2+...+x_N^2)-2m(x_1+x_2+...+x_N)+Nm^2\\&=2Nm^2+M_2(x)-2m(x_1+x_2+...+x_N)\\&=2Nm^2+M_2(x)-2Nm^2\\&=M_2(x)\qquad\square\end{aligned}$$

Example 2.3. Let

$$m_x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Then

$$x_1^2+x_2^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{2}+\left\{(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2\right\}.$$

Corollary 2.3. ２つの得点列 $x=(x_1, x_2, ..., x_N)$ と $y=(y_1, y_2, ..., y_N)$ が再判定条件をみたすとき，もし $N-2$ 個の等式：

$$x_1^k+x_2^k+...+x_N^k=y_1^k+y_2^k+...+y_N^k,\quad (k=3, 4, ..., N)$$

が成り立っているならば，

$$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+...+(x_N-m_x)^2\neq(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2+...+(y_N-m_y)^2$$

となる。

Definition 2.4. ２つの得点列 $(x_1, ..., x_N)$ が与えられたとき，$x_1+...+x_N$ を和と言い，$x_1^2+...+x_N^2$ を２乗和と言う。データ $(x_1, ..., x_N)$ の平均は

$$m(x_1, ..., x_N)=\frac{x_1+...+x_N}{N}$$

であり，分散は

$$s^2(x_1, ..., x_N) = \frac{1}{N}(x_1^2+...+x_N^2) - \left(\frac{x_1+...+x_N}{N}\right)^2$$

である。

Definition 2.5.　得点列 $(x_1, x_2, ..., x_N)$ が与えられたとき，これに対するデータ $(a_1, a_2, ..., a_N)$ を x の恒等式

$$x^N + a_1 x^{N-1} + ... + a_n = (x - x_1)(x - x_2)..., (x - x_N)$$

により定義する。

Definition 2.6.　非負整数 n に対し，数列 b_n を

$$b_n = \sharp\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq n\}$$

と定める。このとき，

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq b_{n+1} \geq ... \geq 0$$

となるから，b_n は非負単調減少数列である。

Example 2.4.　（cf. T. Ando（安藤　毅）[1]）N 科目受験の入学試験の場合を考える。第 1 科目の得点を $x_1, ...,$ 第 N 科目の得点を x_N とすると和 $x_1+...+x_N$ は総合得点になる。このとき，総合得点が n 点以上の受験者数は b_n 人になる。全受験者数は b_0 人になる。n が最高得点より大きいとき $b_n = 0$ となる。この試験の合格者数を T 人とする。合否判定の第一段階は「総得点」$x_1+x_2+...+x_N$ の比較で始めるのが自然である。整数 p_1 を

$$\sharp\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1+1\} < T$$

かつ

$$\sharp\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1\} \geq T$$

となるように定める。集合 $\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1+1\} \geq T\}$ は合格者全体の中の部分集合である。

　もし

$$\sharp\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1\} = T$$

ならば

$$\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1\}$$

を「合格者の，全体からなる集合」と決めて合格判定作業は終了する。このとき合格者総数は正確に T 人になる。

　次に，もし

$$\sharp\{(x_1, ..., x_N) : x_1+...+x_N \geq p_1\} > T$$

ならば部分集合

$$\{(x_1, ..., x_N) : x_1 + ... + x_N = p_1\}$$

の中で，誰をどんなやり方で除外していき，これらの合格候補者の集合：

$$\{(x_1, ..., x_N) : x_1 + ... + x_N \geq p_1\} > T\}$$

の元の個数を減らして T に近づけるかが問題である。以下，

$$x = (x_1, ..., x_N), \quad y = (y_1, ..., y_N),$$

$$M_1(x) = x_1 + x_2 + ... + x_N, \quad M_1(y) = y_1 + y_2 + ..., y_N,$$

$$M_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2, \quad M_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + ..., y_N^2$$

と短縮して書く。整数 p_2 を

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2 + 1\} < T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

かつ

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2\} \geq T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

を満たす整数として定める。

最後の不等式で，もし等号成立し

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2\} = T - \{x : M_1(y) > p_1\}$$

ならば，この段階で stop し

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2\} \cup \{x : M_1(y) > p_1\}$$

を合格者全体からなる集合として決定する。このとき合格者総数は正確に T 人になる。

最後の不等式で，もし等号が不成立で

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2\} > T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

ならば，整数 p_3 を

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) = p_2, M_3(x) \geq p_3 + 1\} < T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

かつ

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) = p_2, M_3(x) \geq p_3\} \geq T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

であるように定める。

最後の不等式で，もし等号成立し

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) \geq p_2\} = T - \sharp\{x : M_1(y) > p_1\}$$

ならば，この段階で stop し

$$\sharp\{x : M_1(x) = p_1, M_2(x) = p_2, M_3(x) \geq p_3\} \cup \{y : M_1(y) > p_1\}$$

を合格者全体からなる集合として決定する。このとき合格者総数は正確に T 人になる。

もしこの操作が $n-1$ 段階で stop したならば，合格者総数は正確に T 人になる。

n-step 進んだときは，整数 $p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n$ が存在して

$$\sharp\{x : M_j(x) = p_j (j = 1, 2, ..., n-1), M_n(x) = p_n + 1\} < T - \sharp\{y : M_1(y) > p_1\}$$

かつ

$$\sharp\{x : M_j(x) = p_j (j = 1, 2, ..., n-1), M_n(x) = p_n\} \geq T - \sharp\{y : M_1(y) > p_1\}$$

となる。Lemma 2.2 により，これ以上進めないので

$$\{x : M_j(x) = p_j (j = 1, 2, ..., n-1), M_n(x) \geq p_n\} \cup \{y : M_1(y) > p_1\}$$

を合格者全体からなる集合として決定する。このとき合格者総数は正確に T 人になるとは限らないが，T 人以上になる。

3．２科目受験のとき

Theorem 3.1.　2 つの得点列 $x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ が再判定条件をみたすならば，

$$(x_1 - m_x)^2 + (x_2 - m_x)^2 \neq (y_1 - m_y)^2 + (y_2 - m_y)^2$$

となる。

Proof.　背理法による。$V(x) = V(y)$ と仮定する。このとき Lemma 1.1 より

$$x_1^2 + x_2^2 = M_2(x) = \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + 2V(x) = \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + 2V(y) = M_2(y) = y_1^2 + y_2^2$$

となる。等式

$$a_1 a_2 = \frac{(a_1 + a_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{2}$$

を用い，

$$x_1 x_2 = y_1 y_2$$

となる。このとき，2 次関数 $f(t)$ と $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t) = t^2 - (x_1 + x_2)t + x_1 x_2,$$
$$g(t) = t^2 - (y_1 + y_2)t + y_1 y_2,$$

これらの 2 次関数 $f(t)$ と $g(t)$ は一致する。因数分解すると，2 次関数 $(t - x_1)(t - x_2)$ と $(t - y_1)(t - y_2)$ が一致することがわかる。これはデータ (x_1, x_2) と (y_1, y_2) について，一方の成分を並べ替えても他方にならないという前提条件に矛盾する。　□

Theorem 3.2.　2 つの得点列 $x = (x_1, x_2)$ と $y = (y_1, y_2)$ が再判定条件をみたすならば，

$$x_1^3 + x_2^3 \neq y_1^3 + y_2^3$$

となる。

Proof.　背理法による。$x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$ と仮定する。x_1, x_2, y_1, y_2 は非負値であり，かつ x と y は零得点列でないから $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ かつ $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ となる。このとき，等式

$$a_1 a_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3 - (a_1^3 + a_2^3)}{3(a_1 + a_2)}$$

を用い，

$$x_1 x_2 = y_1 y_2$$

となる。このとき，2次関数 $f(t)$ と $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=t^2-(x_1+x_2)t+x_1x_2,$$
$$g(t)=t^2-(y_1+y_2)t+y_1y_2,$$

これらの2次関数 $f(t)$ と $g(t)$ は一致する。因数分解すると，2次関数 $(t-x_1)(t-x_2)$ と $(t-y_1)(t-y_2)$ が一致することがわかる。これはデータ (x_1, x_2) と (y_1, y_2) の一方の成分を並べ替えても他方にならないという前提条件に矛盾する。　□

4．3科目受験のとき

Theorem 4.1.　2つの得点列 $x=(x_1, x_2, x_3)$ と $y=(y_1, y_2, y_3)$ が再判定条件をみたすとき，もし等式：

$$(x_1-m_x)^2+(x_2-m_x)^2+(x_3-m_x)^2=(y_1-m_y)^2+(y_2-m_y)^2+(y_3-m_y)^2.$$

が成り立っているならば

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3\neq y_1^3+y_2^3+y_3^3$$

となる。

Proof.　背理法による。$x_1^3+x_2^3+x_3^3=y_1^3+y_2^3+y_3^3$ と仮定する。等式

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3$$

かつ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

より，等式

$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=\frac{(a_1+a_2+a_3)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{2}$$

を用い，

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$$

となる。更に，

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3$$

かつ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

かつ

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=y_1^3+y_2^3+y_3^3$$

より，等式

$$a_1a_2a_3=\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3-(a_1+a_2+a_3)\{a_1^2+a_2^2+a_3^2-(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\}}{3}$$

を用い，

$$x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3$$

となる。このとき，３次関数 $f(t)$ と $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t) = t^3 - (x_1 + x_2 + x_3)t^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)t - x_1x_2x_3,$$

$$g(t) = t^3 - (y_1 + y_2 + y_3)t^2 + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)t - y_1y_2y_3,$$

この２つの３次関数 $f(t)$ と $g(t)$ は一致する。因数分解すると，t の３次関数 $(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)$ と $(t-y_1)(t-y_2)(t-y_3)$ が一致することがわかる。これはデータ $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ について，一方の成分を並べ替えても他方にならないという前提条件に矛盾する。 □

Theorem 4.2.　２つの３次元得点列 $x = (x_1, x_2, x_3)$ と $y = (y_1, y_2, y_3)$ が再判定条件をみたすとき，もし等式：

$$(x_1 - m_x)^2 + (x_2 - m_x)^2 + (x_3 - m_x)^2 = (y_1 - m_y)^2 + (y_2 - m_y)^2 + (y_3 - m_y)^2$$

が成り立っているならば

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \neq y_1^4 + y_2^4 + y_3^4$$

となる。

Proof.　背理法による。$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4$ と仮定する。$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ は非負であり，かつデータ (x_1, x_2, x_3) と (y_1, y_2, y_3) は本質的に異なるから，$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \neq 0$ となる。このとき，

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

かつ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

より，等式

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2}$$

を用い，

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$

となる。更に，

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$$

かつ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

かつ

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4$$

より，等式

$$a_1a_2a_3 = \frac{2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) - 2(a_1 + a_2 + a_3)^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (a_1 + a_2 + a_3)^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{8(a_1 + a_2 + a_3)}$$

を用い，

$$x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3$$

となる。このとき，３次関数 $f(t)$ と $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t) = t^3-(x_1+x_2+x_3)t^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)t-x_1x_2x_3,$$

$$g(t) = t^3-(y_1+y_2+y_3)t^2+(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)t-y_1y_2y_3,$$

この２つの３次関数 $f(t)$ と $g(t)$ は一致する。因数分解すると，３次関数 $(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)$ と $(t-y_1)(t-y_2)(t-y_3)$ が一致することがわかる。

これはデータ (x_1, x_2, x_3) と (y_1, y_2, y_3) について，一方の成分を並べ替えても他方にならないという前提条件に矛盾する。　□

Bibliography

［1］T. Ando（安藤　毅）preprint，2018.

［2］S. Lang Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211 (Revised third ed.), New York: Springer-Verlag, 2002.

［3］E. Lloyd Probability (Handbook of applicable mathematics / chief editor, Walter Ledermann, v. 2), Wiley, 1980.

［4］I.G. Macdonald Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1979.

［5］I.G. Macdonald Symmetric Functions and Hall Polynomials. second ed. Oxford: Clarendon Press (paperback, 1998), 1995.

［6］M. Okamoto（岡本　雅典）and G. Suzuki（鈴木　義一郎）基本統計学，実教出版，1977.

［7］R.P. Stanley Enumerative Combinatorics, Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

［8］G. Taguchi（田口　玄一）統計解析 改訂新版，丸善，1972.

［9］T. Takagi（高木　貞治）代数学講義 改訂新版，共立出版，1975.

［10］S. Takanobu（高信　敏）preprint，2018.