HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ

学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	ジーニの集中指数
著者	木村，和範
引用	開発論集，74：97-121
発行日	2004-10-30

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

開発論集　第74号　97-121(2004年10月)

ジーニの集中指数

木　村　和　範*

はじめに

ヴィルフレド・パレートは所得分布を

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

ただし，$N(x)$は所得がx以上の世帯（個人）の数。αがパレート指数。

なお，(1)式はその両辺の対数をとって

$$\log N(x)=\log H-\alpha \log x \tag{1'}$$

としても同じである。

という関数関係（以下，パレート・モデル）[1]で表すことができると考えた。そして，(1)式右辺の分母におけるxの「べき」α（いわゆるパレート指数）を，所得分布の時間的空間的な比較のための指標と見なした[2]。ロドルフォ・ベニーニは，パレートにならってαの計算にコーシーの補間法を応用し，パラメータが特定された所得分布関数は現実説明力の点で瑕疵がないとして，基本的にパレートの見解を支持した。パレートの見解はベニーニを通じてイタリアの統計学界に受容されることになった[3]。

1）ブレシアーニ=チュッローニはこれを「パレートの第1法則」と名づけた（Bresciani-Turroni, Costantino, “On Pareto's Law,” *JRSS* [New Series], Vol. 100, Pt. 3, 1937, p. 422）。

2）① Pareto, Vilfredo, “La legge della domanda,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume X, 1895 [以下 Pareto (1895)]; ② ditto, “La curva delle entrate e le osservazione del prof. Edgeworth,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIII, 1896 [以下 Pareto (1896)]; ③ ditto, *Cours d'Économie Politique*, Tome Second, Lausanne 1897 [以下 Pareto (1897a)]（イタリア語版：*Corso di Economia Politica*, Secondo Volume, Torino 1942 [以下 Pareto (1942)]); ④ ditto, “Aggiunta allo studio sulla curva delle entrate,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897 [以下 Pareto (1897b)].

3）Benini, Rodolfo, “Principii di Statistica Metodologia,” *Biblioteca dell'Economista*, Serie 5, Volume 18, Dispensa 1ª, 1905 [以下 Benini (1905)], p. 186.

*（きむら　かずのり）開発研究所併任研究員，本学経済学部教授

しかし，ベニーニを経て受容されたパレート理論はその後，コッラド・ジーニによる批判を受けた。ジーニ理論はイタリアで支持を得て，その理論と応用がさまざまに検討され，普及した。

本稿では，このジーニ理論をパレート理論と対比させながら，所得分布の統計的計測のための理論としてのパレート理論を，ジーニがどのように継承・批判したか，また，どのようにその難点を克服しようと試みたかを明らかにしたい。

本稿における叙述の順序とその概要は次のとおりである。

1．パレート・モデルとジーニ・モデル　では，ジーニによるパレート・モデルにたいする評価の点から，2つのモデルの違いを明らかにする。

2．パレート指数と集中指数（ジーニ指数）では，パレート指数 α とは $\delta=\frac{\alpha}{\beta}$（$\beta$ はジーニ・モデルのパラメータ）という数学的関係にあるとされる集中指数 δ の数学的導出過程に言及する。ここに，集中指数は，分布の集中度を測定するための指標としてジーニが考案した測度の1つであるが，今日では（ジーニ係数を G で表すのにたいして）g で表され，その考案者の名にちなんでジーニ指数とも呼ばれている。

3．集中指数 δ と所得分布の統計的計測　では，δ が所得分布の集中度の統計的計測手段として，その機能を果たすとされるときの理論的な根拠を述べる。

なお，δ は $\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ とも規定されている。そこで，4．α，β，δ の数学的関係　では，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ が成立するための条件を明らかにする。

5．所得の過少申告と δ　では，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ と定義される δ が過少申告の有無やその程度を判定するための指標としての機能をも果たすとされるときの，その論拠について述べる。

最後に，6．集中指数 δ の一般化　では，所得分布の統計的計測の指標としてはパレート指数 α よりも高感度とされる δ が，所得分布を含む，それ以外の分布の集中度を計測するための指標として拡張されたことを述べる。

1．パレート・モデルとジーニ・モデル

(1)　パレート指数をめぐる諸見解

パレート理論の基本構想はベニーニによってイタリアに導入された。しかし，パレート指数 α の解釈についてだけは，ベニーニはパレートと見解を異にする。パレートは，α の増大が所得の不平等度の強化を意味する（α が小さくなるほど，所得分布はより平等になる）と考えた[4)]。これにたいして，ベニーニは，その逆に α の増大こそが平等性に向かうことを示すと考えた[5)]。このように両者の見解は相対立しているが，その出発点にあるのは，いずれも(1)式に示されるパレート・モデルである。

α についての相異なる2つの解釈を対照させる目的から，所得を x_0 と x_1（ただし $x_0<x_1$）で示すこととする。また，それぞれの所得を

4）Pareto (1895), p. 61.

5）Benini, R., "Di alcune curva descrette da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897［以下 Benini (1897)］, p. 178.

上回る所得の世帯数を $N(x_0)$, $N(x_1)$とする。このときには,

$$N(x_0)=\frac{H}{x_0^{\alpha}} \tag{2}$$

$$N(x_1)=\frac{H}{x_1^{\alpha}} \tag{3}$$

となる。また, (2)式と(3)式から

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\frac{\frac{H}{x_1^{\alpha}}}{\frac{H}{x_0^{\alpha}}}$$

$$=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha} \tag{4}$$

となる。$x_0<x_1$ であるから, $\frac{x_0}{x_1}<1$ となる。したがって, (4)式において α が大きくなるとき, その右辺の値は, 全体として, 小さくなる。かりに所得 x_0 が捕捉しうる最低所得額であるとすれば, $N(x_0)$はその社会で補足しえた世帯の総数を意味する。この場合, (4)式の左辺は, 対象となった全世帯のなかで, 所得が x_1 以上になる世帯が占める割合を示す。すなわち, より高額の所得階級に属す世帯の割合を示す。この世帯割合 $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ が小さくなるということと, α が大きくなるということとは同義である。そのようなとき, なぜパレートは所得分布の不平等性が強まると考えたのであろうか。また, 同じ現象を見て, ベニーニはなぜ逆に所得分布がより平等になると考えたのであろうか。これについてはジーニの指摘が参考になる。

ジーニは1909年に所得分布の統計的計測にも言い及んだ論文を公表した[6]。この論文は, その考察を本来の目的とするものではなく, 社会階級ごとに異なる人口増加率が階級間の所得格差に由来すると主張することに, その目的をおいている。この考察のためには所得分布の統計的計測の問題は避けて通ることができないと考えたジーニは, この論文の一部をその検討に充てた。ジーニは次のように述べている[7]。

> まず, 最初に, 富の集中というものを定義しておく必要がある。
>
> 富者の数が貧者の数に較べて相対的に少ないほど, 富の分布がより不平等であると考える人がいる。この根拠は, おそらく, 特権をもつ者が少なくなるにつれて, 富の不均衡がより強く感じられるという心理学的な考えであろう。
>
> これとは反対に, 富者の数が貧者に較べて相対的に多いほど, 富の分布が不平等であると考える人もいる。絶対的平等（uguaglianza assoluta）に近い状態というのは, ただ一人だけが裕福で, 残りの人々の資産（あるいは所得）が同一であると考えられているのであろう。

ジーニは上に引用した見解に立つ論者の名を挙げてはいない[8]。しかし, (4)式にたいす

6）Gini, Corrado, “Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909［以下 Gini (1909)］. これは, 本稿で考察する「集中指数」（いわゆるジーニ指数）が初めて論じられた論文である。

7）Gini (1909), p. 69.

8）Gini, C., “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell'Economista*, Ser. 5, Vol. 20, 1922［以下 Gini (1922)］, p. 49 では, これらの見解に立つ論者が特定され, それぞれパレートとベニーニの名が挙げられている。なお, この Gini, “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell'Economista*, Ser. 5, Vol. 20 を引用している論文のなかには, その刊行年を 1910 年と

るパレート[9]とベニーニ[10]の見解を顧みれば，ジーニが取り上げた第1の見解に立つのはパレートであり，第2の見解がベニーニの名前と結びついていることは明らかである。

(2) ジーニの批判

ジーニは上の引用文に続けて，次のように述べている[11]。

> 私にはこれらの両方ともが不完全であるように思われる。富者と貧者の人数という，富の分布にかんする単一の要因だけが考慮されて，その他の要因，すなわち資産や所得の総額というものが考慮されていないからである。
>
> かりに，ただ一人の富者が平均をわずかに上回る富を保有しているとすれば，そのような富者がいる状態より以上に，絶対的な平等に近い状態というものは存在しないであろう。しかし，この唯一の人間がその地域の富の大半を占有しているときには，このような状態ほど平等から遠くかけ離れた状態というものはないであろう。
>
> 地域（もしくは時点）Aにおいて，国民の富（ricchezza nationale）の$\frac{1}{X}$を保有している人々の人口割合$\frac{1}{Y}$が，地域（もしくは時点）Bよりも小さい場合には，富の集中はBよりもAのほうが強い［たとえば，富の50%を占有している人口割合がAでは20%，Bでは50%であるとすれば，集中はAのほうが強い］。しかし，$\frac{1}{Y}$の人口が保有する富の割合が，AよりもBのほうで小さければ，逆になるように思われる［たとえば，人口の50%によって占有された富が，Aにおいては富の全体の50%であるのにたいして，Bにおいては30%である場合には，Bの方がより集中している］。

このように，ベニーニもパレートもその出発点において，所得総額という所得分布の統計的計測にとって重要な要因を見落としていたとジーニは批判している。

(3) ジーニ・モデルの優位性

ジーニは，上に引用した文章に続けて，$\frac{1}{X}$と$\frac{1}{Y}$とを関係づける「しかるべき指数（un indice appropriato）」の追求が重要であると指摘し，指数δを考案した。このδが，パレート指数αとは

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

という関係にあるとされる「集中指数（indici di concentrazione）」である[12]。このδの導

していているものもある。たとえば，①Gini, C., “Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri,” *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte Seconda, 1913-14, p. 1205; ② Savorgnan, Franco, “La distribuzione dei redditi nelle provincie e nelle grandi città dell'Austria,” *Publicazioni del Museo Commerciale di Trieste*, 1912, p. 5; ③ Gini, C., “Measurement of Income,” *Economic Journal*, Vol. 31, 1921, p. 720; ④ Bresciani-Turroni, C., “Annual Survey of Statistical Data: Pareto's Law and the Index of Inequality of Incomes,” *Econometrica*, Vol. 7, 1939, p. 118.

9）①Pareto (1895), p. 61; ② Pareto (1897b), p. 25.

10）Benini (1905), p. 187.

11）Gini (1909), p. 69f.　本稿における表記を統一するために，原文のx，yを各々X，Yとした。

12）Gini (1922), p. 42.

出については次節で述べる。また，δ と α の間の数学的関係についても後に言及する（4．α，β，δ の数学的関係　参照)。ここでは，まず，1909年論文（Gini, C., “Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza,” *Gironale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909）にもとづいてジーニ・モデルの概要とその優位性についてのジーニの見解を見る。そして，δ を定式化するに先立って，さしあたり，彼はどのようにパレート批判を展開したかについて述べることにしよう。

すでに述べたようにパレート・モデルは

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

である。これにたいして，ジーニは次のようなモデル（以下，ジーニ・モデル）を想定した。

$$A(x)=\frac{K}{x^{\beta}} \tag{5}$$

ここに，$A(x)$は所得が x 以上となる全世帯の所得の合計，β と K はデータによってさまざまな値をとるパラメータ。

したがって，所得分布に関数関係をあてはめるという基本的な構想そのものは，パレートと同様である。ここで，(5)式の両辺の対数をとって整理すれば，次式を得る。

$$\log A(x)=\log K-\beta \log x \tag{5'}$$

ジーニはフランス（時期は不詳であるが，20世紀初頭と考えられる）とオーストリア（1904年）の所得統計（表1）を用いて，パレート指数 α とみずからのモデルに措定したパラメータ β の値を求めた。なかでもオーストリアの所得分析はそれ以降もジーニによって，しばしば引用されているので[13)]，こ

表1　オーストリアの所得分布（1904年）

所　　得（クローネ）x	納税者数（人）$N(x)$	所得総額（クローネ）$A(x)$
$\boxed{200,000}$	$\boxed{307}$	156,200,000
100,000	883	235,100,000
20,000	9,980	570,800,000
12,000	22,138	755,300,000
5,200	92,085	1,267,700,000
2,400	308,814	2,003,100,000
2,000	396,403	2,195,500,000
1,600	569,555	2,516,800,000
1,300	788,219	2,830,100,000
1,200	919,769	2,995,700,000

（出所）Leiter, F., *Die Verteilung des Einkommens in Oesterreich,* Braumüller, Wien und Leipzig 1907. ただし，引用はGini, Corrado, “Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909, p. 73による。

13）たとえば，Gini (1922), pp. 16ff.

こでは，それを取り上げることにする。

表１のデータについて，パレート・モデル［(1')式］とジーニ・モデル［(5')式］をあてはめ，コーシーの補間法を適用して，それぞれのパラメータを計算すれば，次のようになる[14]。

パレート・モデル：

$$\log N(x)=10.8249-1.5803\log x \quad (6)$$

ジーニ・モデル：

$$\log A(x)=11.2611-0.5805\log x \quad (7)$$

(6)式と(7)式に，所得x(表１)の対数($\log x$)を代入し，$\log N(x)$の理論値$\log N(x)'$と$\log A(x)$の理論値$\log A(x)'$を求め，さらにそれぞれの理論値から（表１に表章された）実測値$N(x)$と$A(x)$の対数［$\log N(x)$と$\log A(x)$］を減ずる。そして，この差を理論値からの「乖離」とする。

表２の$\boxed{}$で強調した箇所を例にして，このことを説明すれば，次のようになる。パレート・モデルにたいしてコーシーの補間法を適用する。そうすると，表１の原系列から(6)式が特定される。この式の$\log x$のxに200,000を代入して($\log 200{,}000=5.3010$)，(6)式の値を計算すると，所得が200,000クローネ以上である世帯数$N(200{,}000)'$の対数の理論値が得られる［$\log N(200{,}000)'=2.4476$］。

ところが，表１は所得が200,000クローネ以上である世帯の実測値$N(200{,}000)$として307をあたえている。この対数$\log N(200{,}000)$は2.4871である［$\log N(200{,}000)=2.4871$］。先に計算した理論値(2.4476)からこの実測値(2.4871)を減ずると，両者の乖離が-0.0395［$=\log N(200{,}000)'-\log N(200{,}000)$］ともとめられる。ジーニ・モデルについてもこのような計算をして，両方のモデルの関連

表２　モデル別所得別乖離（オーストリア，1904年）

所得x（クローネ）	乖離 パレート・モデル(6)式[1)] $\log N(x)'-\log N(x)$	乖離 ジーニ・モデル(7)式[2)] $\log A(x)'-\log A(x)$
$\boxed{200{,}000}$	$\boxed{-0.03953}$	−0.00994
100,000	−0.02263	−0.01276
20,000	0.02879	0.00777
12,000	0.03337	0.01492
5,200	−0.01174	0.00086
2,400	−0.00659	−0.00290
2,000	0.01010	0.00324
1,600	0.00585	0.00018
1,300	0.00724	0.00157
1,200	−0.00485	−0.00294

（訳注）1) $\log N(x)'$は(6)式右辺の$\log x$のxに表１のxを代入すれば，得ることができる。また，$\log N(x)$は表１に表章された$N(x)$の実測値から求められる。

2) 上の注記と同様の手続きによって，$\log A(x)'$と$\log A(x)$を得ることができる。

（出所）Gini, Corrado, "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909, p. 73. ただし，引用者による検算にもとづいてジーニの結果を訂正した。

14) Gini (1909), p. 73. ただし，明らかなミスプリや計算の誤りは訂正した。なお，以下で取り扱う対数は，すべて常用対数である。

データ（小数第5位まで）を一覧にまとめたものが表2である。

表2にもとづいて，所得分布については，所得 x と所得総額 $A(x)$との間の関係を(5)式や(5')式（$\log A(x)=\log K-\beta\log x$）のような関数関係として把握するほうが，パレートのように所得 x と世帯数（人数）$N(x)$との間の関係を，(1)式や(1')式（$\log N(x)=\log H-\alpha\log x$)に示される関数関係として把握するよりも，現実説明力の点で優れているとジーニは主張した[15]。しかし，彼は，パレート・モデルの有効性が根本から否定されるものではないとも考えている。

2．パレート指数と集中指数（ジーニ指数）

(1) 2つの指数（α，β）と δ

ジーニは1909年論文[16]のなかで，

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta} \tag{8}$$

を掲げた（ただし，本稿における他の表記に合わせた)。

この(8)式の δ は，1910年論文で，ジーニによって「集中指数」[17]と命名された。これは，後に世人が「ジーニ指数」と呼ぶようになった「べき」であるが，1909年論文では，まだ特別の名称を付けられてはいなかった。しかし，それでも，1909年論文では，この δ が所得分布の集中度を統計的に計測するために有効であると主張されている。δ の意義については，後述することにする（次節参照)。

そして，ここでは，話を元に戻して，集中指数 δ がどのようにして誘導されるかについて考察する。この点については，ジーニの叙述は簡潔をきわめ，ただ(8)式をあたえているだけであると言ってもよいので，以下の叙述はたぶんに筆者の解釈にもとづいていることをあらかじめ断っておく。すでに述べたようにパレートは所得分布について次のモデルを構想した。

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

これにたいして，ジーニのモデルは

$$A(x)=\frac{K}{x^{\beta}} \tag{5}$$

である。以下に述べるように，この(1)式と(5)式から δ が誘導される。

(1)式にもとづけば，所得 x_0 と x_1 ($x_0<x_1$)について，次式が誘導される。

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha} \qquad (9)\ [(4)\text{式再掲}]$$

(9)式の両辺を $\frac{1}{\alpha}$ 乗すれば，次式を得る。

$$\left\{\frac{N(x_1)}{N(x_0)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{x_0}{x_1} \tag{9'}$$

他方で，(5)式から所得 x_0と x_1については

$$\frac{A(x_1)}{A(x_0)}=\frac{\frac{K}{x_1^{\beta}}}{\frac{K}{x_0^{\beta}}}$$

$$=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\beta} \tag{10}$$

が誘導される。(10)式の両辺を $\frac{1}{\beta}$ 乗すれば，

$$\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\frac{1}{\beta}}=\frac{x_0}{x_1} \tag{10'}$$

を得る。

15) Gini (1909), p. 73.

16) Gini (1909), p. 39.

17) Gini, C., "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Atti della Società Italiano per il Progresso delle Scienze, Terza Riunione, Padva, Settembre 1909*, Roma 1910 [以下 Gini (1910)]。

(9')式と(10')式から

$$\left\{\frac{N(x_1)}{N(x_0)}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\frac{1}{\beta}} \tag{11}$$

となり，この(11)式の両辺を α 乗すれば，次式を得る。

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{12}$$

ここで

$$\delta=\frac{\alpha}{\beta} \tag{13}$$

とおけば，(8)式に到達する。すなわち，

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta} \tag{8}$$

となる。こうして，パレート・モデル[(1)式]とジーニ・モデル［(5)式］から(8)式が誘導され，しかも，パレート・モデルのパラメータ（指数）α とジーニ・モデルのパラメータ（指数）β は，δ とは(13)式のような関係（$\delta=\frac{\alpha}{\beta}$）にあることが明らかとなった。

オーストリア(1904年)のデータから，(13)式の α と β については，コーシーの補間法によって

パレート・モデル：$\alpha=1.5803$ [(6)式参照]
ジ ー ニ・モデル：$\beta=0.5805$ [(7)式参照]

となる。したがって，(13)式にこれらの値を代入すると

$\delta=2.722$

である。この δ の値2.722がオーストリア（1904年）の所得統計に適合的かどうかは，$\frac{A(x_1)}{A(x_0)}$ の δ 乗が $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ と等しくなるような δ の値を現実の所得統計から計算し，この実測値を理論値（$\delta=2.722$）と比較してみればよい。このときの計算結果は，概ね表3のようにまとめることができる。

この表3(5)欄は，所得ごとに個別に計算された9個の δ (2.710，2.730，……，2.714)とその相加平均 (2.715) を表章している。この個別の δ について，ジーニは「δ の実測値［表3(5)欄]が[$\alpha=1.5803$，$\beta=0.5805$，$\delta=\frac{\alpha}{\beta}$ によってもとめた]理論値2.722の周りを変動している」と述べた。そして，オーストリア(1904年)においては人数 $N(x)$ と所得総額 $A(x)$ との間には，理論上，

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{2.722} \tag{14}$$

という関係があると主張した[18]。

(2) 小 括

前節と本節における考察を要約すれば，次のようになる。

i．パレートが所得分布を所得 x と世帯数（人数）$N(x)$ の間の関数関係 ($\log N(x)=\log H-\alpha\log x$) として把握したのにたいして，ジーニは所得総額 $A(x)$ と世帯数（人数）$N(x)$ の間の関数関係としても捉えるべきであると主張した。

ii．そのために，ジーニは

1．$\log A(x)=\log K-\beta\log x$ というモデル（ジーニ・モデル）を構築した。

2．コーシーの補間法により K と β の値を求め，上記モデルのあたえる理論値と現実の所得統計とを対照して，ジーニ・モデルの適合性を確認した。

3．ジーニ・モデルのほうがパレート・モデルよりも優れていると主張

18) Gini (1909), p. 71.ここに言う「理論値」は，後に δ の「実測値」と言われるようになった（表6参照）。

表 3　δ の実測値（最低所得 x_0＝1,200 クローネ）

所得（クローネ）	納税者数（人）	所得総額（クローネ）	$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta}$ ［(8)式］		
			左辺	右辺	
x	$N(x_1)$	$A(x_1)$	$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$	$\frac{A(x_1)}{A(x_0)}$	δ*
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
200,000	307	156,200,000	0.0003337795	0.0521414027	2.710
100,000	883	235,100,000	0.0009600237	0.0784791535	2.730
20,000	9,980	570,800,000	0.0108505505	0.1905397737	2.728
12,000	22,138	755,300,000	0.0240690869	0.2521280502	2.705
5,200	92,085	1,267,700,000	0.1001175295	0.4231732149	2.676
2,400	308,814	2,003,100,000	0.3357516942	0.6686584104	2.712
2,000	396,403	2,195,500,000	0.4309810398	0.7328838001	2.708
1,600	569,555	2,516,800,000	0.6192370041	0.8401375305	2.751
1,300	788,219	2,830,100,000	0.8569749578	0.9447207664	2.714
（参考）				平　均	2.715
x_0	$N(x_0)$	$A(x_0)$		（参考）$\delta=\frac{\alpha}{\beta}$	2.722
1,200	919,769	2,995,700,000			

（注＊）(8)式は $N=A^{\delta}$ と書き換えることができる。この式の対数をとれば，$\log N=\delta\log A$ となる。この式は $\delta=\frac{\log N}{\log A}$ と同値であるから，この関係によって δ の値［(5)欄の数値］を得ることができる。

（出所）Gini, Corrado, “Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909, p. 74 および Gini, Corrado, “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell'Economista*, Ser. 5, Vol. 20, 1922, p. 17 にもとづいて作成。ただし，ミスプリは正した。

した。（しかし，パレート・モデルをその根本から否定しているわけではない。）

4．パレート・モデルとジーニ・モデルから $\delta=\frac{\alpha}{\beta}$［(13)式］の関係にある集中指数 δ（ジーニ指数）を導出した。

iii．δ が現実の所得統計と適合的であると判断したジーニは，所得総額 $A(x)$ と世帯数（人数）$N(x)$ とを関係づけて，所得分布の集中度を統計的に計測しようとした当初の構想を実現するには，

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta} \qquad (8)$$

が活用できると考えた。

3．集中指数 δ と所得分布の統計的計測

(1)　集中指数 δ の理論

ジーニは，社会的富の何パーセント（あるいは $\frac{1}{X}$）が何パーセントの人口（あるいは $\frac{1}{Y}$）によって占有されているかが明確にならなければ，富の集中について適切な判断ができないと考えて，パレートを批判した。そして，$\frac{1}{X}$ と $\frac{1}{Y}$ とを結びつけるための「しかるべき指数」を追求した。後述するように，それが(8)式右辺の「べき」δ である。この δ が果たすと期待された機能は，所得分布の集中度を統計的に計測することである。

以下では δ のこの機能に言及するが，数式展開の点でジーニの説明は省略的で，そのた

めに難解な側面をもつ。そこで，ジーニの所説に補足しながら，理解を進めることとする。

明らかに，

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)} = \frac{1}{\frac{N(x_0)}{N(x_1)}} \quad かつ \quad \frac{A(x_1)}{A(x_0)} = \frac{1}{\frac{A(x_0)}{A(x_1)}}$$

である。

$$\frac{N(x_0)}{N(x_1)} = Y \quad および \quad \frac{A(x_0)}{A(x_1)} = X$$

とおけば，(8)式は

$$\frac{1}{Y} = \left(\frac{1}{X}\right)^{\delta} \tag{8'}$$

となる。ここで，(8')式の意味を考えてみよう。そのために，(8')式の左辺$\left(\frac{1}{Y}\right)$は世帯割合$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$を示し，右辺の$\left(\frac{1}{X}\right)$は当該社会の総所得にたいする特定所得階級の合計所得の割合$\frac{A(x_1)}{A(x_0)}$を示すことを確認しておく。

$\delta=1$のときは，(8')式は

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{X}$$

となる。これは，どのような世帯の割合をとってみても，一般に，その世帯の割合と所得の割合が等しいことを意味する。このような社会では，世帯間の所得格差がまったく存在しないという意味で所得分布の均等性が確保されている。

これにたいして，$\delta=2$のときはどうなるであろうか。ここで，$\frac{1}{X}=\frac{1}{2}$，すなわち全世帯の所得の50%に着目しよう。$\frac{1}{X}=\frac{1}{2}$のとき，(8')式は，

$$\frac{1}{Y} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

であるから，$\frac{1}{Y}=\frac{1}{4}$になる。これは，全世帯の25%に該当する。

次に，$\delta=5$の場合には，全世帯の所得50%$\left(\frac{1}{X}=\frac{1}{2}\right)$に着目したときに，その所得は全世帯の何%によって領有されているかを考えてみよう。$\delta=5$で，$\frac{1}{X}=\frac{1}{2}$のとき，(8')式は

$$\frac{1}{Y} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

となる。すなわち，

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{32} = 0.031$$

である。これは，全世帯の所得の3.1%に該当する。

以上から，$\delta=2$のときには，全世帯の25%が全世帯の所得の50%を領有していたのにたいして，$\delta=5$のときには，全世帯数の3.1%が全世帯の所得の50%を領有しているということが分かる。したがって，同一の所得世帯数（より厳密にはその割合）に着目したとき，δが大きくなるにつれて，当該世帯数(より厳密には，全世帯に占める割合）は小さくなり，集中度が強まると予想される。このことは，δ(集中指数）と$\frac{1}{X}$(所得の割合)，$\frac{1}{Y}$(世帯数の割合)との間にある数量的関係を表にまとめれば，より明確になる（表4）。

(2) δの計測

上述したようにδは，その値が大きくなるにつれて，少数の世帯に所得が集中することを示す。このことから，δをジーニは所得分布の集中度の尺度として使用するよう提言し，さまざまな国についてδを計測した[19]。そのとき，(8')式のδが$\frac{\alpha}{\beta}$[(13)式]であたえられることを活用した。そして，計測結果を表にまとめた（表5）。

ジーニに直接先行するベニーニは，所得階級区分の上限と下限の変更あるいは階級区分

19) Gini (1909), pp. 76ff.

の数の変更などが，パレート指数 α の値に影響をあたえると指摘している[20]。ジーニもこのことを認め，利用できる統計によって国ごとに階級区分が異なり，そこには統一性がなく，したがって，α の値によって，軽々に国際比較はできないと述べている。それだけでなく，「さまざまな国々にかんして得られた α，β，δ の値は，厳密には，比較することができない。」とさえ述べている[21]。しかし，このことは，一国における時間的比較が不可能であるということを意味するものではない。その証拠に，ジーニはオーストリアを例外として，残りの国では一様に δ の値が上昇していることから，それらの国々では所得分布の集中が傾向的に昂進していると指摘した[22]。

その上で，ジーニは次のように主張している[23]。

所得や資産の累進的集中は社会的な危険状態（un pericolo sociale）を示すかどうかを知りたいと願っている人がいる。

思うに，このような質問には議論の余地のない解答というものはない。富の集中は，富の所有を絶対的に減少させている貧しい人々の不満を助長するばかりか，また，富者にたいして過度にまでその力をあたえるものであるから，ある地域の平均的な富が横ばいであるときには，確かにその問いにたいする答えはイエスになるはずである。だがしかし，ふつうに見られるように地域の平均的な富が増大している場合には，このイエスという答えは疑わしいものとなる。実際に，平均的な富が上昇するにつれて，富が不平等であるという話はあまり耳にしなくなる。このことに疑いを挟む人はいない。（最高に幅広い研究だけがこの問いに解答をあたえることになるが）生物学的規模で見れば，有機体が巨大になり，また複雑になるにつれて，神経系統の優位性

表4　社会の総所得の割合 $\left(\frac{1}{X}\right)$ と人口割合 $\left(\frac{1}{Y}\right)$

$1/X$	δ				
	2	3	4	5	6
1/6	1/36	1/216	1/1,296	1/7,776	1/46,656
1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729
1/2	**1/4**	**1/8**	**1/16**	**1/32**	**1/64**
2/3	4/9	8/27	16/81	32/243	64/729
5/6	25/36	126/216	625/1,296	3,125/7,776	15,625/46,656

（出所）Gini, Corrado, “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell’Economista*, Ser. 5, Vol. 20, 1922, p. 40. ただし，引用者による強調は本文の叙述に対応する。

20）Benini (1897), p. 187.
21）Gini (1909), p. 78.
22）Gini (1909), p. 77.
23）Gini (1909), p. 81f.

表5　パレート指数 α と集中指数 δ

地　　域	財政年度	α	β	$\delta\left[=\frac{\alpha}{\beta}\right]$
フ ラ ン ス	1906	1.584	0.739	*2.145*
ザ ク セ ン	1884	1.57	0.638	*2.46*
	1888	1.54	0.614	*2.51*
	1894	1.51	0.577	*2.62*
	1902	1.17	0.496	*2.96*
	1904	1.50	0.517	*2.89*
オーストリア	1898	1.5594	0.5644	*2.76*
	1900	1.5591	0.5677	*2.75*
	1902	1.5593	0.5641	*2.83*
	1904	1.5803	0.5805	*2.72*
プ ロ イ セ ン	1892	1.54	0.604	*2.553*
	1896	1.55	0.609	*2.553*
	1902	1.52	0.552	*2.751*
	1905	1.46	0.516	*2.836*
ノ ル ウ ェ ー	1895−1896	1.50	0.525	*2.85*
	1897−1898	1.49	0.515	*2.90*
	1899−1900	1.47	0.499	*2.95*
ハ ン ブ ル ク	1895	1.240	0.3943	*3.146*
	1897	1.223	0.3735	*3.273*
	1899	1.230	0.3756	*3.274*
イングランド[1]	1881	1.343	0.381	*3.524*
	1893	1.313	0.373	*3.524*
	1895	1.307	0.393	*3.320*
	1898	1.288	0.354	*3.636*
イ タ リ ア	1895[2]	1.59	0.594	*2.68*
	1902[2]	1.51	0.524	*2.87*
	1894[3]	−	−	*1.86*
	1902[3]	−	−	*1.71*

原注 1）商業従事者と専門職業従事者

2）労働と資本からの収入

3）労賃

訳注）表中の δ は必ずしも $\frac{\alpha}{\beta}$ とは一致しないが，元のデータが不明なので訂正していない。

（出所）Gini, Corrado, "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909, pp. 76ff. δ の数値を斜体で強調したのはジーニである。

がそれだけ際立つようになるのと同様に，富の集中は社会進化の過程では平均的な富の増大と並行して生ずる自然現象（un fenomeno naturale）である，と言うこともできよう。

こうして，ジーニは富の集中化を一般的な傾向として認めつつも，一方で，それが「危険（pericoloso）」な現象かどうかの判断を回避し，他方で，社会的な不満の解消には平均的な所得の上昇が効果的であることを示唆したのである。

4．α，β，δ の数学的関係

(1) δ と α

パレート・モデルの α とジーニ・モデルの β との間には $\delta=\frac{\alpha}{\beta}$［(13)式］という関係があることはすでに指摘した。しかし，また，パレート指数 α と集中指数（ジーニ指数）δ との間には，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ という「理論的関係」があるとも言われている。以下では，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ という数学的関係について述べるが，その際，ジーニみずからの説明を基本にして，適宜，森田優三著『国民所得の評価と分析』（東洋経済新報社　1949年）[24]を参照する。

ジーニは $\alpha=2, x=300$ を例にして，α が小さく，x が大きいほど，次の(15)式が成り立つと述べている[25]。

$$1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha}=\frac{\alpha}{x} \tag{15}$$

ジーニは，δ と α の間の数学的関係 $\left(\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ を確定するために，この(15)式[26]をその出発点としている。

(15)式の両辺に $\frac{H}{x^{\alpha}}$ を掛けると，次式を得る。

$$\frac{H}{x^{\alpha}}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha}\cdot\frac{H}{x^{\alpha}}=\frac{\alpha}{x}\cdot\frac{H}{x^{\alpha}}$$

したがって，

$$\frac{H}{x^{\alpha}}-\frac{H}{(x+1)^{\alpha}}=\frac{\alpha H}{x^{\alpha+1}} \tag{16}$$

ところで，パレート・モデル［(1)式］により，

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \quad \text{かつ} \quad N(x+1)=\frac{H}{(x+1)^{\alpha}}$$

であるから，(16)式は

$$N(x)-N(x+1)=\frac{\alpha H}{x^{\alpha+1}} \tag{17}$$

24）以下，森田（1949），p. 142f.， p. 148f.

25）Gini (1922)，p. 42. なお，以下の参考表も参照。

参考表　(15)式の適合性

α	x	(15)式	
		左辺の値	右辺の値
2.0	300	0.00663348	0.006666666
2.0	500	0.00398803	0.004
2.5	1,000	0.00249563	0.0025
2.5	2,000	0.00124891	0.00125

$\alpha=2.0$，$x=300$はジーニの計算による。

26）(15)式は次のようにすれば，証明できよう。

$$1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha}=\frac{\alpha}{x} \qquad (15) \quad \text{より，}$$

$$\text{左辺}-\text{右辺}=1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha}-\frac{\alpha}{x}$$

$$=1-\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\alpha}-\frac{\alpha}{x}$$

x が大きくなるとき，α の値の如何にかかわらず，第2項は1に収束する。また，前提から α は小さく，x は大きいので，x が大きくなるとき，第3項は0（ゼロ）に収束する。したがって，極限では，「左辺－右辺」の値は，1－1－0となって，ゼロである。このとき，左辺＝右辺となって，結局，(15)式が証明される。［証明終わり］

となる。

この(17)式の左辺は所得が x から $x+1$ までの世帯数である。この世帯数を n とおく。すなわち

$$n=N(x)-N(x+1)$$

である。

また，所得 x と $x+1$ については，x が十分に大きければ，$x \fallingdotseq x+1$ と見なしてよい。したがって，所得が x から $x+1$ までの n 世帯の所得の合計 S_n は

$$S_n=nx$$

である。よって，

$$\begin{aligned} S_n &= nx \\ &= \{N(x)-N(x+1)\}x \\ &= \frac{\alpha H}{x^{\alpha+1}} \cdot x \qquad [(17)\text{式による}] \\ &= \frac{\alpha H}{x^{\alpha}} \\ &= \alpha H x^{-\alpha} \end{aligned}$$

ここで所得が x_1 以上となる全世帯の所得総計を $A(x_1)$ とおく。このとき，次のようになる。

$$\begin{aligned} A(x_1) &= \int_{x_1}^{\infty} S_n dx \\ &= \int_{x_1}^{\infty} \alpha H x^{-\alpha} dx \\ &= \left[\frac{\alpha H}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_{x_1}^{\infty} \\ &= \frac{\alpha H}{\alpha-1} x_1^{1-\alpha} \qquad (18) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A(x_1)=\frac{\alpha}{\alpha-1} H \cdot \frac{1}{x_1^{\alpha}} \cdot x_1 \qquad (18')$$

(18)式の x_1 を一般化して x で表した式について，その対数をとると，

$$\log A(x)=\log \frac{\alpha}{\alpha-1} H+(1-\alpha) \log x$$

$$=\log \frac{\alpha}{\alpha-1} H-(\alpha-1) \log x$$

$$\therefore \quad \log x=\frac{\log \frac{\alpha}{\alpha-1} H-\log A(x)}{\alpha-1} \qquad (19)$$

また，パレート・モデル［(1)式］より

$$\log N(x)=\log H-\alpha \log x \qquad (1')$$

$$\therefore \quad \log x=\frac{\log H-\log N(x)}{\alpha} \qquad (20)$$

(19)式と(20)式より，

$$\frac{\log \frac{\alpha}{\alpha-1} H-\log A(x)}{\alpha-1} = \frac{\log H-\log N(x)}{\alpha}$$

両辺に α を掛けると，次式を得る。

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\left\{\log \frac{\alpha}{\alpha-1} H-\log A(x)\right\} =\log H-\log N(x)$$

$$\therefore \quad \log N(x)=\frac{\alpha}{\alpha-1} \log A(x) - \frac{\alpha}{\alpha-1} \log \frac{\alpha}{\alpha-1} H + \log H \qquad (21)$$

ここで

$$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad (22)$$

とおくと，(21)式は次のようになる。

$$\log N(x)=\delta \log A(x)-\delta \log \delta H+\log H$$

さらに $\delta H=T$ とおくと，上式は

$$\log N(x)=\delta \log A(x)-\delta \log T+\log H$$

となる。これは，次のようになる。

$$\log N(x)=\delta \log A(x)-\log C \qquad (23)$$

ただし，$\log C=\delta \log T-\log H$

$$\left[\therefore \quad N(x)=\frac{\{A(x)\}^{\delta}}{C} \quad (23')\right]$$

この(23)式（または(23')式）は「ジーニ法則」とも言われている（これにたいして本稿に言うパレート・モデルは「パレート法則」と言われることが多い）[27]。

以上から，パレート・モデル($\log N(x)=\log H-\alpha\log x$)を前提して，

$$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad (22)$$

と定義すれば，ジーニの所得分布関数［(23)式］が誘導されることになる[28]。

要するに，ジーニの所得分布関数（いわゆる「ジーニ法則」）$\log N(x)=\delta\log A(x)-\log C$ のなかのパラメータ δ（ジーニ指数）は，パレート・モデル $\log N(x)=\log H-\alpha\log x$ を前提して，「ジーニ法則」を誘導するために数式を展開するときに不可欠な定義式［(22) 式］としてあたえられている。

(2) α と β

すでに述べたように，パレート・モデルとジーニ・モデルの両方が成立していることを前提すれば，パレート指数 α とジーニの指数 β ならびに δ との間には，

$$\delta=\frac{\alpha}{\beta} \qquad (13)$$

の関係がある。

$\delta=\frac{\alpha}{\beta}$［(13)式］と $\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$［(22)式］はその誘導過程が異なるが，これらの2式が同時に成立していれば，

$$\beta=\alpha-1$$

という関係が成り立つ。

α と β の間に上のような関係が実際に成立しているかどうかを検討する目的で，ジーニは，パレート・モデルのもとで α と β を計算して，その結果を次のような表にまとめた（表6）。

言うまでもなく，原系列があたえられさえすれば，(13)式にもとづいて δ の値をもとめることができる(表5参照)。このとき，もとめられる δ の実測値を δ' で表すことにする。表6ではそれとともに，δ の理論値［(22) 式］も表章されている。この表からは，オーストリアとノルウェーでは，$\beta\fallingdotseq\alpha-1$ であることが分かる。また，ハンブルクでは $\beta\neq\alpha-1$ となって，(13)式と(22)式が両立していないことも明らかである。

5．所得の過少申告と δ

(1) 過少申告の検出指標としての δ

表6から分かるように，δ の実測値 δ'［(1)欄］と $\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ という関係式でもとめた δ の理論値［(2)欄］とを比較してみると，オーストリアやノルウェーのように両者の間に特記すべき大きさの乖離がないこともあれば，ハンブルク（1883年）では，実測値が理論値の約2倍となって，実測値から理論値が46%も乖離している場合もあることが確認できる。

ジーニは，表6に見られるようなハンブルクにおける δ の実測値と理論値と間の乖離が，どのような原因に由来すると考えているのであろうか。彼は，「思うに，δ の理論値と実測値とのこの食い違いは，さまざまな所得

27) 森田（1949），pp. 124ff., pp. 128ff；②高山憲之「分配」『経済学大辞典(第2版)』Ⅰ 東洋経済新報社 1980年 p. 424.

28) 森田（1949），p. 148f.

表6　α，β，δ

地域	年	β	$\alpha-1$	δ'（実測値）(1) $\delta'=\frac{\alpha}{\beta}$	δ（理論値）(2) $\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$	乖離* (3) [=(2)−(1)]	乖離率* (4) $\frac{(3)}{(2)}$
ハンブルク	1883	0.391	0.212	3.11	5.72	2.61	0.46
	1895	0.394	0.240	3.15	5.17	2.02	0.39
	1897	0.374	0.223	3.27	5.48	2.21	0.40
	1899	0.376	0.230	3.27	5.35	2.08	0.39
オーストリア	1898	0.564	0.559	2.76	2.79	0.03	0.01
	1900	0.568	0.559	2.75	2.79	0.04	0.01
	1902	0.564	0.559	2.76	2.79	0.03	0.01
	1904	0.581	0.580	2.72	2.72	0.00	0.00
ノルウェー	1895−1896	0.525	0.50	2.85	3.00	0.15	0.05
	1897−1898	0.515	0.49	2.90	3.04	0.14	0.05
	1899−1900	0.499	0.47	2.95	3.13	0.18	0.06

（訳注＊）引用者の計算による。
（出所）Gini, Corrado, "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Biblioteca dell'Economista*, Serie 5, Vol. 20, 1922, p. 44.

水準で税金逃れ(evasione：脱税)の強度が異なることに，その原因がある」と主張している[29]。(この指摘は，かつてベニーニ[30]がとくに低額所得階級において，データとパレート・モデルとの不適合は，当該所得階級の所得捕捉が不十分であることによると述べたことを想起させる。)そこで，上の引用文で述べられた「税金逃れ」をめぐるジーニの見解を検討することにしよう[31]。

ハンブルク(1883年)とオーストリア(1904年)について，集中指数（ジーニ指数）の実測値と理論値を抜き出してみよう（表7）。

この表7によれば，ハンブルクでは集中指数（ジーニ指数）の理論値が実測値よりも大きい。このために，ジーニは，ハンブルクでは，下位の所得階級における申告率が低い(税金逃れが多い）と予想した。しかし，この予想を実証するには，低額所得階級の平均所得の理論値と，その所得階級における平均所得の実測値との乖離が大きいことを示さなければならない。そこで，ジーニは，

$$E=\frac{M_1-M}{M} \tag{24}$$

という測度を考案した。

ここに，M_1 はある所得階級における世帯の実際の平均所得である。この実測値 M_1 は，実際の所得統計があたえる所得階級ごとの世帯数（人数）でその所得階級の所得総額を割ることによってもとめることができる。

表7　集中指数（ジーニ指数）の実測値と理論値

	実測値 $\frac{\alpha}{\beta}$	理論値 $\frac{\alpha}{\alpha-1}$
ハンブルク(1883年)	3.11	5.72
オーストリア(1904年)	2.72	2.72

（出所）表6から一部抜粋。

29) Gini (1922), p. 44. ここに言う「実測値」は，Gini (1909), p. 71［脚注18］ではδの「理論値」とされていた。
30) Benini (1905), p. 186.
31) Gini (1922), pp. 44ff.

他方，M はその所得階級にいる世帯の「理論的平均所得」である。この理論値 M は次式によってあたえられる。

$$M=\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{x_1x_2^{\alpha}-x_2x_1^{\alpha}}{x_2^{\alpha}-x_1^{\alpha}} \tag{25}$$

ただし，所得階級の下限が x_1 で，上限は x_2 である。

(25)式の誘導にかんするジーニの叙述は簡潔にすぎて難解である[32]。そこで，以下ではジーニとは別の仕方による誘導を試みたい。

所得が x_1 以上の全世帯の所得総計を $A(x_1)$ とおいたとき，$A(x_1)$ は次の(18')式で表された。

$$A(x_1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_1^{\alpha}}\cdot x_1 \tag{18'}$$

ここで，所得が x_2 以上の世帯の所得総計を $A(x_2)$ で表す。ただし，$x_1<x_2$ とする。したがって，$A(x_1)>A(x_2)$ である。

所得が x_1 以上の世帯数を $N(x_1)$，x_2 以上の世帯数を $N(x_2)$ とすると，次のようになる。

$N(x_1)$ 世帯の所得の合計：

$$A(x_1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_1^{\alpha}}\cdot x_1 \tag{18'}$$

$N(x_2)$ 世帯の所得の合計：

$$A(x_2)=\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_2^{\alpha}}\cdot x_2 \tag{18''}$$

したがって，所得が x_1 から x_2 までの世帯（x_1 を下限，x_2 を上限とする所得階級に入る世帯）の所得の合計は

$$A(x_1)-A(x_2) \tag{26}$$

である。また，所得が x_1 から x_2 までの間にある世帯数は

$$N(x_1)-N(x_2) \tag{27}$$

である。このために，所得が x_1 から x_2 までの世帯の平均的な所得 M は，

$$M=\frac{A(x_1)-A(x_2)}{N(x_1)-N(x_2)} \tag{28}$$

である。M にかんするこの(28)式は，(18')式と(18")式から次のように整理することができる。

$$M=\frac{A(x_1)-A(x_2)}{N(x_1)-N(x_2)}$$

$$=\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_1^{\alpha}}\cdot x_1-\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_2^{\alpha}}\cdot x_2}{N(x_1)-N(x_2)}$$

$$=\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_1^{\alpha}}\cdot x_1-\frac{\alpha}{\alpha-1}H\cdot\frac{1}{x_2^{\alpha}}\cdot x_2}{\frac{H}{x_1^{\alpha}}-\frac{H}{x_2^{\alpha}}}$$

（$\because$ パレート・モデルでは，一般に $N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}}$）

$$=\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}H\left(\frac{1}{x_1^{\alpha}}\cdot x_1-\frac{1}{x_2^{\alpha}}\cdot x_2\right)}{H\left(\frac{1}{x_1^{\alpha}}-\frac{1}{x_2^{\alpha}}\right)}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{\frac{x_1}{x_1^{\alpha}}-\frac{x_2}{x_2^{\alpha}}}{\frac{1}{x_1^{\alpha}}-\frac{1}{x_2^{\alpha}}}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{x_1x_2^{\alpha}-x_2x_1^{\alpha}}{x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}}\frac{x_1^{\alpha}x_2^{\alpha}}{x_2^{\alpha}-x_1^{\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{x_1x_2^{\alpha}-x_2x_1^{\alpha}}{x_2^{\alpha}-x_1^{\alpha}} \tag{29}$$

このようにして展開された(29)式は(25)式に等しく，これで(25)式が誘導されたことになる。現実の所得統計にパレート・モデルを適用して，パレート指数 α をもとめれば，(25)式によって任意の所得階級に属す世帯の「理論的」な平均所得 M がもとめられる。ここにいたって，「理論的」とは，パレート・モデルが成立していることを「理論的」前提に

32) Gini (1922), p. 47.

するという意味であることが分かる。

(2) 過少申告の検出

ジーニは，ハンブルク（1883年）とオーストリア（1904年）について所得階級別平均所得の実測値 M_1 と（(25)式にもとづく）理論値 M を計算した（表8）。

表8からハンブルクでは低額所得階級において理論値と実測値の間の乖離がオーストリアに較べて大きいことが確認できる。そして，「ハンブルク（1883年）においては税金逃れがより少額の所得で強く表れているが，オーストリア（1904年）では所得の高低と税金逃れとの間の関係は見出すことができない。」とジーニは述べ[33]，「$\delta<\frac{\alpha}{\alpha-1}$ もしくは $\beta>(\alpha-1)$ という不等式を劣位の所得におけるより強い税金逃れの指標と見なすことができる」[34] と主張した[35]。

6．集中指数 δ の一般化

前節では δ には過少申告の検出機能があることを述べた。ここでは，パレート指数 α と較べてみて，集中指数 δ の方が所得分布の変化にたいする感度が高いとするジーニの見解を紹介し，最後にその集中指数 δ が，所得分布だけでなく，それ以外の分布の集中度を計測する指標としての機能を果すと言われるまでに拡張されたことを述べる。

表8　所得階級別平均所得 ―― 実測値 M_1・理論値 M とその乖離率 E ――

ハンブルク（1883年）（マルク）				オーストリア（1904年）（クローネ）			
所得階級	実測値 M_1 (1)	理論値 M (2)	乖離率 E (3) $\left[=\frac{(1)-(2)}{(2)}\right]$	所得階級	実測値 M_1 (4)	理論値 M (5)	乖離率 E (6) $\left[=\frac{(4)-(5)}{(5)}\right]$
1,000− 2,000	1,460	1,380	0.06	1,200− 2,000	1,530	1,510	0.01
2,000− 3,500	2,710	2,600	0.04	2,000− 3,600	2,640	2,600	0.02
3,500− 5,000	4,260	4,150	0.03	3,600− 5,200	4,300	4,270	0.01
5,000− 10,000	7,180	6,870	0.05	5,200− 12,000	7,330	7,420	−0.01
10,000− 25,000	15,760	15,050	0.05	12,000− 20,000	15,180	15,130	0.00
25,000− 50,000	35,060	34,360	0.02	20,000− 40,000	27,310	27,100	0.01
50,000−100,000	69,250	70,720	−0.02	40,000−100,000	59,340	58,730	0.01

（訳注）この表の実測値 M_1 の値には，原表と不整合の箇所もあるが，検算のために必要なデータのすべてが原表であたえられている訳ではないので，訂正していない。

（出所）Gini, Corrado, “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell’Economista*, Serie 5, Vol. 20, 1922, p. 48.

33）Gini (1922), p. 48.

34）すでに指摘したように，$\delta=\frac{\alpha}{\beta}$ でもあるから，$\delta=\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha}{\alpha-1}$ であれば，$\beta>(\alpha-1)$ である。なお，引用文中の δ は実測値 δ' のことである。

35）Gini (1922), p. 47.

(1) 集中指数 δ の感度

所得分布が問題となるときは，集中指数 δ の値は所得統計に

$$\log N(x) = \delta \log A(x) - \log C \qquad (23)$$

をあてはめても，直接的に計算可能である。すなわち，(23)式はそのものとしてみれば，パレート・モデルとジーニ・モデルの両方もしくはいずれか一方を必ず前提するというものではない。ジーニは次のように述べている[36)]。

> 実際に，
>
> $$\log N = \log H - \alpha \log x \qquad (\text{VII})$$
>
> という式［パレート・モデル］から必然的に
>
> $$\log N = \delta \log A - \log K \qquad (\text{VI})$$
>
> という式［(23)式］が出てくるが，(VI)式から(VII)式は生じない。このことは証明されている。

彼は，集中指数（ジーニ指数）を構想するとき，その劈頭では，パレート・モデルを前提とした。このために，ジーニの集中指数は，パレート・モデルと数学的整合性をもっている。そして，パレート・モデルとジーニ・モデルを前提する場合に限って，

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \qquad (22)$$

という関係が成り立つ。より正確には，この(22)式$\left(\delta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$は$\log N(x) = \log H - \alpha \log x$で表現されるパレート分布を前提し，そのもとでジーニ分布$\log N(x) = \delta \log A(x) - \log C$を導出するときの条件となっていると言うことができる。

しかし，パレート・モデルやジーニ・モデルが成立しない場合にも，ジーニの集中指数は，独自に計算することができる。このことのうちに，ジーニの δ はパレート指数 α から相対的に独立しうる契機がある。

このような δ を所得分布の統計的計測の測度として見た場合，それはパレートの α にたいしてどのような優位性をもっているのであろうか。ジーニは次のように述べている[37)]。

> 指数 δ は指数 α に較べて所得分布の差異にたいして鋭敏（sensibile）である。α の値によって伝えられるものは所得分布の著しい差異についてはわずかしかない。とくに α の値が小さいときにはそうである。いわれのないことのように思われるが，このことから，富の分布があらゆる地域，あらゆる時期でほぼ等しいという見解がもたらされてしまうのである。

表9は，δ が α よりも鋭敏であること，すなわち所得分布の集中度の違いを α よりも δ の方が大きく表現することを示すために作成された。この表では，パレート・モデルを前提するとき，$\alpha = 1.5$ を中心に δ の値がどのように変化するのかが表章されている。とくに $\alpha = 1.5$ を取り上げたのは，どの地域，ど

36) Gini (1922), p. 49. ここに(VII)式の N と(VI)式の A は本稿の表記法では $N(x)$ と $A(x)$ である。また(VI)式のKは (23) 式のCである。

37) Gini (1922), p. 49.

の時期にも，指数 α はほぼ等しいとして α の安定性を主張したパレートの見解[38]を受けたベニーニが α の安定的な値を1.5であると主張したからである[39]。

この表9からは，パレート指数 α が1.5から1.6に上昇するとき，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$ という関係が成立しているもとでは，ジーニ指数 δ は3.0から2.667に減少することを示している。これは，$\alpha=1.5$（したがって $\delta=3.0$）を基準にして α の値が6.3%上昇したときには，δ が12.5%減少することを意味する。

このことから，δ は α の小さな変動を増幅して表現することが分かる。すなわち，α の値の小さな違いが，δ によって大きな違いとして表わされることになる。ジーニは，α に較べて δ がより「鋭敏」であると述べたことの意味をこのように解釈したい。この論点はパレート批判に通ずる。すでに述べたように，パレートはさまざまな国について α を実測し，その値がほぼ一定であることを確認した。「このことから，彼［パレート］は，一国における富の分布は経済の仕組みから独立しているか，あるいはほぼ独立しているという決定的に重要な結論を引き出した」とジーニは述べた[40]。しかし，ジーニによれば，パレート指数 α はジーニ指数 δ にくらべて，所得分布の計測指標としては感度が低いから，所得分布を α で計れば安定的に見えても，α を δ に換算してみると，パレートとは異なって，どの国も一定であるという結論にはならないと指摘されている。

以上，要するに，ジーニはみずから考案したモデル $\log A(x)=\log K-\beta\log x$（本稿ではこれをジーニ・モデルと言ってきた）とパレート・モデル $\log N(x)=\log H-\alpha\log x$ とを合成して，(8)式 $\left[\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta}\right]$ を導出した。ジーニの1909年論文と1910年論文が公刊されて以降は，それまでにパレート・モデルの適合性・現実説明力に疑問を覚えていた研究者のなかで，とくにパレート・モデルが高額所得者層と低額所得者層の説明力において脆弱であると見ていた論者は，パレート・モデルのあたえるパレート指数 α に替わるものとしてジーニ指数 δ に期待を寄せた。その結果，ジーニの集中指数を用いた所得分布の統計的計測が普及することになっ

表9　α と δ

α	1.200	1.300	1.400	**1.500**	1.600	1.700	1.800	1.900
δ	6.000	4.333	3.500	**3.000**	2.667	2.429	2.250	2.111

（注）$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$

38) ① Pareto (1895), p. 61; ② Pareto (1897a), p. 312[Pareto (1942), p. 344.]

39)「このような方法によって，パレートは様々な場所や時期における所得分布が同一の単純な法則に従っているということを明らかにした。……内挿直線の勾配は係数 α によってあたえられ，その値は1.5の付近で変動する。」[Benini (1905), p. 187.]

40) Gini (1922), p. 40.　資本主義経済の発展にともなって α が減少する（不平等が強まる）ことについては Bresciani, Costantino, "Dell'influenza de le condizioni economiche sulla forma delle curva dei redditi," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXI, 1905も参照。なお，この執筆者は脚注1の Bresciani-Turroni, Costantino と同一人物である。

た[41]。

それだけでなく，ジーニは，δ を所得分布の統計的計測指標からさらに一般化して，δ にたいして広く分布の集中度を計測する機能を付与した。次に項を改めてこのことについて述べることにしよう。

(2) 分布の集中指標としての δ

すでに述べたように，ジーニは，社会の総所得の割合 $\frac{1}{X}$ と人口割合 $\frac{1}{Y}$ とを結びつけるための「しかるべき指数」を追求した（本稿 1 (3))。この指数 δ が初めて公表されたのは 1909 年である。その指数 δ は，後に「ジーニ指数」と呼ばれ，今日にいたっているが，ジーニみずからは，1909 年の時点では，特別の名称をつけることはなかった。しかし，その翌年の 1910 年になって，ジーニは，その指数 δ を「集中指数（indici di concentrazione)」と名づけて，分布の集中度を特徴づけるための 1 つの統計的尺度として定式化したことはすでに述べた。このことにかんする彼の見解は同一タイトルの次の 2 つの論文で公表された[42]。

① Gini, C., “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Atti della Società Italiano per il Progresso delle Scienze, Terza Riunione, Padva, Settembre 1909*, Roma 1910.

② ditto, “Indici di concentrazione e di dipendenza,” *Biblioteca dell’Economista*, Serie 5, Vol. 20, 1922.

これらの論文では，元来，所得分布の統計的計測指標として考案された「集中指数」の適用が次のような分布にまで拡張されている[43]。集団現象 A を構成する n 個の個体の数量的規定性（これをジーニは「強度（intensità)」と言っている）を一般に a_i で表す。ここで，$a_j \geqq a_{j-1}$ とする（ただし，$j \geqq 2$)。すべての個体の「強度」の合計と平均は次のようになる。

$$\text{強度の合計：}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\text{強度の平均：}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \tag{30}$$

また，強度がもっとも大きい個体から数えて m 個の個体についても同様に，その強度の合計と平均をもとめれば，次のようになる。

41)「ジーニの式の方がパレートの式よりも，富の集中を計測するには好ましいものである。なぜならば，各所得階級の人数と所得の総合計が直接（direttamente）に考慮されており，これら 2 つの要素が集中の概念のなかに取り込まれているからである。」(Porru, Emanuele, “La concentrazione della ricchezza nelle diverse regioni d’Italia,” *Studi Economico-Giuridici Pubblicati per Cura della Facoltà di Giurisprudenza*, Istituto Economico-Giuridico, R. Università di Cagliari, Anno IV, Parte Prima, 1912, p. 114. 強調はポッルー。）この点は後の論文［Gini (1922)］ではさらに論旨が鮮明になった。なお，上に引用したポッルーの見解と同様趣旨の論述については，次も参照。① Furlan, V., “Neue Literatur zur Einkommensverteilung in Italien,” *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, III. Folge, 42. Band, 1911; ② Savorgnan, F., “La distribuzione dei redditi nelle provincie e nelle grandi città dell’Austria,” *Pubblicazioni del Museo Commeciale Trieste*, 1912.

42) ①の冒頭ページ（p.453）には，その論文が「すでに公刊された」論文②の要約であるという趣旨の脚注がある。また，文献②が *Biblioteca dell’Economista*, Serie 5, Vol. 20 に収録されていることについては，確認済みである。②を引用している論文のなかには，その刊行年が 1910 年となっているものもあることは，すでに注記した（脚注 8 参照）。

43) ① Gini(1910), pp. 454ff; ② Gini (1922), pp. 6ff.

強度の合計：$\sum_{i=n-m+1}^{n} a_i$

$$\text{強度の平均：}\frac{\sum_{i=n-m+1}^{n} a_i}{m} \tag{31}$$

(30)式と(31)式の大小を比較すれば，明らかに，

$$\frac{\sum_{i=n-m+1}^{n} a_i}{m} > \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

ゆえに

$$\frac{m}{n} < \frac{\sum_{i=n-m+1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{32}$$

ここで(32)式の右辺をδ乗することによって左辺と等しくなるようなδ（>1）を考える。このとき，(32)式は次のようになる。

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\sum_{i=n-m+1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \right)^{\delta} \tag{33}$$

ジーニはこの(33)式を満たす「べき」δのことを「集中指数」と言っている。とくにこの(33)式のように右辺の「べき」が単一の要素からなるとき，その「べき」のことを「単純集中指数（indici di concentrazione semplici）」と名づけている[44]。

この(33)式（集中指数の一般式）が(8)式（所得分布の集中度にかんする数式）と同値であることは，対照表から明らかである（表10）。

ここで最後に，一般化された集中指数と所得分布の関係について述べておく。

ジーニはパレート・モデル($\log N(x) = \log H - \alpha \log x$)とジーニ・モデル($\log A(x) = \log K - \beta \log x$)にもとづいて

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)} = \left\{ \frac{A(x_1)}{A(x_0)} \right\}^{\delta} \tag{8}$$

を誘導し，さらにそれを一般化して(33)式とした。しかし，(8)式は（したがって(33)式が）つねにパレート・モデルとジーニ・モデルの両方もしくはいずれか一方を前提しなければ誘導できないというものではない。確かに，それらの2つのモデルを前提にすれば，(8)式を誘導することができる。しかし，(8)式と同値の関係にある(33)式は，そのものとしては，パレート・モデルならびにジーニ・モデルとは独立に，(32)式で特徴づけられる分布にたいしてあてはめたモデルであると考えることもできる。(33)式の誘導はこのことを示している。それだけでなく，たとえば，オーストリア（1904年）の所得統計に(8)式（その一般式としての(33)式）をあてはめて，ジーニが所得階級ごとにδを計算した結果（表3［(5)欄］）を見れば明らかなように，δの値はパレート・モデルとジーニ・モデルの両方から独立して所得階級ごとに計算することができる。このとき，そのδは，所得階級別にその値が特定されているという意味で「個別集中指数」(indici di conzentrazione particolari)とも言うべき性質のものであろう。ジーニはこの意味での「個別集中指数」を計算した後に，それらの相加平均を求め，それもまた集中指数と言っている。これには「総合集中指数」(indici di concentrazione sintetici) という名称をあたえれば，事柄はいっそう明確になるであろう[45]。要するに，「個別」と「総合」を問わず，いずれの集中指数であろうとも，パレート・モデルとジーニ・モデルを前

44) これにたいして，「べき」が複数の要素からなっているときには，その「べき」を「複合集中指数（indice di concentrazione compresso）」と言っている［Gini (1922), p. 7］。

45)「個別集中指数」と「総合集中指数」は筆者の造語である。

表 10　数式対照表

(33)式	$\frac{m}{n}=\left(\frac{\sum_{i=n-m+1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)^{\delta}$	(8)式	$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left\{\frac{A(x_1)}{A(x_0)}\right\}^{\delta}$
a	個体の強度（$a_j \geqq a_{j-1}$, $j \geqq 2$）	x	所得($x_1>x_0$)
n	個体総数	$N(x_0)$	所得がx_0以上の人数
m	強度がある値a_{n-m+1}以上になる個体の個数	$N(x_1)$	所得がx_1以上の人数
$\sum_{i=1}^{n}a_i$	全個体の強度の和	$A(x_0)$	所得がx_0以上となる人の所得の合計
$\sum_{i=n-m+1}^{n}a_i$	強度がある値a_{n-m+1}以上の個体の強度の和	$A(x_1)$	所得がx_1以上となる人の所得の合計

提することなく，(33)式（もしくは(8)式）をあてはめて，具体的なデータから集中指数δの値を特定することが可能なのである。

む す び

パレートは指数αによって所得分布の比較を試みた。これは，所得分布を関数関係で表現されるモデルで表現しようとした最初の試みであった。そのパレート理論がベニーニを介してイタリアに受容された早い段階で，パレート・モデルの現実説明力の低さが問題視されて，ジーニ・モデルが構想された。また，ジーニは，所得分布の統計的計測指標としてのパレート指数αの低い感度を論難した。

さらにジーニは，パレート分布を前提とするときに，パレート指数αと集中指数δ（ジーニ指数）との間には，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$という数学的関係があることを明らかにした。(より厳密には，$\delta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$を前提してはじめて，パレート分布とジーニ分布が両立することを明らかにした。）このδは，パレート指数αよりも鋭敏に所得分布の違いを反映する。このことにもとづいて，彼は各地域のδを計測して，所得分布が「経済の仕組み」から独立して安定的であるとするパレートの見解を批判した。

このように，ジーニのδは，パレート批判のなかで所得分布の統計的計測指標として構想されたが，その後，所得分布にとどまらない分布の集中度の計測指標としての機能を果たす集中指数δとして一般化された。ここでは，この一般化された集中指数δについて，所得分布の計測指標としての機能に限定して，その特徴を要約して擱筆することにしたい。すなわち，集中指数δは，第1に，所得分布の集中度を計測する測度としての機能を果たすと考えられた。また，第2には，所得申告率が言われるように低位の所得階級において低いか（税金逃れが低位の所得階級で多いか）どうかの判定基準としても機能すると

された。そして，δ によってハンブルク(1883年）における低位所得階級の低申告率が実証できたと主張された。

以上のような意義をもつ集中指数 δ（ジーニ指数）は，(23)式［$\log N(x)=\delta \log A(x)-\log C$］をそれとして見れば，パレート・モデルを前提とすることなく，コーシーの補間法やその他の補間法(内挿法)（たとえば最小二乗法）によって，独自に統計データから計算することが可能である。そればかりか，表10で対照した(8)式や(33)式によれば，所得階級ごとの δ(個別集中指数)とその相加平均たる δ（総合集中指数）は補間法によることなく計算することができる。このために，ジーニ指数 δ は，パレート・モデルが成立しているか否かに関係なく，計測可能な指標となりうる可能性を内包していると指摘することができる。それは，パレート・モデルへの批判とジーニ指数の計測とが併存していることの理由でもあろう。

ひるがえって，

$$\frac{1}{Y}=\left(\frac{1}{X}\right)^{\delta} \tag{8'}$$

としても定義される所得分布の集中指数 δ の意義を別の側面から考察してみよう。(8')式からは，δ が $\frac{1}{X}$ と $\frac{1}{Y}$ の関数であると定義し直すことができる。すなわち，(8')式は

$$\delta=f\left(\frac{1}{X},\ \frac{1}{Y}\right) \tag{8''}$$

と書き直すことができる。こうすることによって，所得分布を統計的に計測する指数 δ は，$\frac{1}{X}$（ある社会の総所得のなかに占める特定所得階級の全所得の割合）と $\frac{1}{Y}$（ある社会の総世帯［総人口］のなかに占める当該特定所得階級の世帯数［人数］の割合）の関数として一般化されたことがより明確となる。

(8')式で，個別の所得階級ごとに δ を実測し（これを本稿では個別集中指数と名づけた），さらにこの個別集中指数の相加平均（これを本稿では総合集中指数と名づけた）をもとめて，これが社会全体における所得分布の集中度を示す指標になるとジーニは考えたのである。

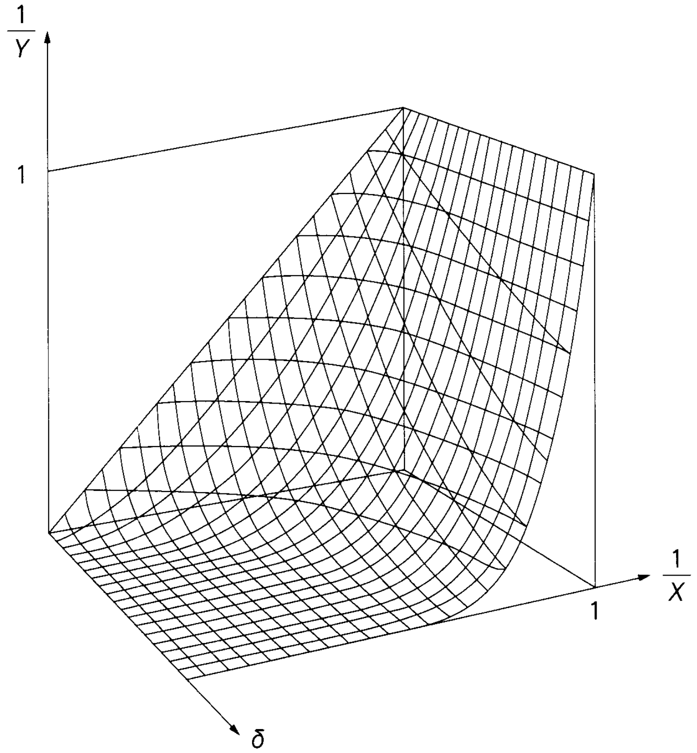
このようにして見れば，パレートの指数 α は分析を特定の所得階級に限定するものとして映ることになる。かくして，ジーニは「［パレートの］指数 α は所与の限界を上回る所得についてだけの分布を描くことに適している。この指数は富の全体にかんする分布の不平等性を計測するのではなく，その一部分を計測しているだけである」と批判したのであった[46]。

最後にここで，(8')式で表現される所得分布は，$\frac{1}{X}$，$\frac{1}{Y}$，ならびに総合集中指数としての δ の値に応じて次のような曲面でその分布が特定される1つの数理モデルでもあることに注目しておきたい（次ページの図参照）。

いったい，所得割合$\left(\frac{1}{X}\right)$と世帯の割合$\left(\frac{1}{Y}\right)$の間の関係として把握される所得分布は，一般には，図に示されるように，総合集中指数 δ の値に応じて一意的に定まるものであろうか。逆に言えば，所得分布はこの図以外にはあり得ないのであろうか。ジーニが集中指数を構想した頃，アメリカではすでに，ローレンツがあの有名な曲線による所得分布の分析手法を公表していた(1905年)[47]。そこ

46）Gini (1922), p. 48.

47）Lorenz, Max O., "Methods of Measuring the



注）理論上，δ 軸の値には上限はないが（$\delta \geqq 1$），$\frac{1}{X}$ と $\frac{1}{Y}$ については $0<\frac{1}{X}<1$，$0<\frac{1}{Y}<1$ である。

図　ジーニの集中曲面：$\frac{1}{Y}=\left(\frac{1}{X}\right)^{\delta}$

では，関数関係で表現される特定の数学的なモデルを前提とすることなく，所得分布が記述的に分析されている。

このローレンツの研究は，ジーニにどのような影響をあたえたのであろうか。ジーニは 1914 年に，後にジーニ係数と呼ばれる「集中比（rapporto di concentrazione)」R を定式化して，所得分布の統計的計測にかんする研究に新たな地平を開いた[48)]。ジーニ指数 δ を構想したジーニが，さらにジーニ係数 G を構想したのは何故であろうか。この点の検討を含めて，今後に課題は多く残されている。

Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, No. 70, 1905. 次も参照。木村和範「ローレンツ曲線の形成」『経済論集』（北海学園大学）第 51 巻第 3・4 合併号 2004 年。

48）Gini, C., "Sulla misura della concentrazione e delle variabilità dei caratteri,," *Atti del Reale Istituto Veneto di Science, Lettere ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte Seconda,1913-14.

［付記］本稿の執筆にあたっては日本学術振興会から研究助成（2002［平成 14］年度〜2004［平成 16］年度）を受けている（機関番号：30107，研究種目：基盤(B)(2)，課題番号：14402031，研究代表者：池田均北海学園大学経済学部教授）。