タイトル	所得分布とパレート指数
著者	木村，和範
引用	開発論集，75：1-13
発行日	2005-03-31

開発論集　第75号　1-13(2005年３月)

所得分布とパレート指数

木　村　和　範*

もくじ

はじめに

資本主義社会はその構成員の所得を等しく増大させることが可能な経済システムであろうか，資本主義社会のすべての構成員は一様にその経済システムの「恩恵」を享受することができるのか，あるいは豊かな生活を謳歌できるのは一部の構成員であって，貧苦にあえぐ人々が多数を占めるようになるのではないか，はたまた，社会の構成員の所得は全体的に上昇するが，そのテンポに階級格差があるのではないかなど，今日においても，それを検討してみることは少なからず意義深い，資本主義経済体制の根幹にふれる問題が，主として19世紀末から20世紀前半にかけて論議された。いわゆる貧困化（窮乏化）論争がそれである[1]。

ユリウス・ヴォルフ[2]やコスタンチーノ・ブレシアーニ[3]の著作をひもとくまでもなく，この論争に関わった経済学者は少なくない。ヴォルフによれば，19世紀末のヨーロッパ諸国では「富者はますます豊かに，貧者はますます貧しく」[4]という命題が政府の「公式見解」とされ，所得格差は国民各層で拡大する傾向にあると考えられていた。このような政

1）たとえば，美馬孝人「労働者の貧困と社会政策」荒又重雄・小越洋之助・中原弘二・美馬孝人『社会政策(1)』有斐閣　1979年　第１章　参照。

2）Wolf, Julius, *System der Sozialpolitik, Erster Band: Grundlegung. Sozialismus und kapitalistische Gesellschaftsordnung. Kritische Würdigung beider als Grundlegung einer Sozialpolitik*, Stuttgart 1892, pp.223ff.［以下 Wolf（1892)］

3）Bresciani, Costantino, "Sull'interpretazione e comparazione di seriazioni di redditi o di patrimoni," *Gironale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXIV, 1907.［以下 Bresciani（1907)］

4）このことは，イギリスでは　The rich richer, and the poor poorer，ドイツでは　Die Reichen immer reicher, die Armen immer ärmer，イタリアでは　I ricchi siano divenuti più ricchi, i poveri più poveri　と表現された。ヴォルフ［Wolf (1892), S.225］によれば，イギリスの歴史家 G. ハウエル（Howell, G., *The Co-operative Wholesale Society Annual for 1892*, p.191）がこの命題の典拠は『新約聖書』であると示唆しているとのことである。ヴォルフは『新約聖書』の文言を特定してはいないが，おそらく，次の箇所であろう。「持っている人はさらに与えられ，持たぬ人は，持っているものまでも取り上げられるのである」（マルコ福音書，4.25, p.18f.)。「持っている人はさらに与えられ，持たぬ人は，持っていると思うものまでも取り上げられるのである」(ルカ福音書，8.18, p.203)。引用はいずれも『新約聖書　福音書』（塚本虎二訳，岩波文庫版，1963年）による。

*（きむら　かずのり）開発研究所併任研究員，本学経済学部教授

治的・経済的環境のなかで貧困化をめぐる論議が活発に展開された。

事実はどうだったのであろうか。その解明には，統計，とりわけ所得統計が不可欠である。課税の必要から国民各層の所得が捕捉され，それがヨーロッパ諸国で所得統計として整備されたのは，19 世紀中葉以降である。この時期は，労働運動の高揚を背景とした上述の貧困化論争の時期と重なっている。そのために，所得分布（所得格差）の統計的研究のなかには，貧困化論争を意識した論述が少なくない[5]。

所得分布の統計的研究を 19 世紀中葉から 20 世紀初頭に限定してみると，その時期には（所得階級別の人数にもとづく分析を別としても）大別して次の 3 種類の手法が研究・開発された。第 1 は，ジーニ係数 G に代表されるような，単一の数量的指標の考案であり，第 2 は，ローレンツ曲線を用いたグラフ法の提案である。

そして，第 3 は，所得分布に関数関係をあてはめ，そのパラメータの値を計算し，それによって所得分布を時間的空間的に比較しようとする試みである。パラメータも 1 種の数量的指標であるから，この点だけを捉えれば，これは第 1 の手法と違うところがない。しかし，第 3 の試みが所得分布を特定の関数関係として把握しているという点で第 1 の手法とは異っている。ヴィルフレド・パレートの創始になるパレート指数 α は，3 番目の試みの具体的な現れである。ブレシアーニによれば，指数 α とその名が結びついているパレートは，「この問題［貧困化をめぐる論議］に数学的方法の規則を初めて導入した」[6]。

パレート指数 α は古くは「パレート常数」と言われ，大正期以降にはこの国でもそれを活用して所得分布が統計的に計測された[7]。なかでも，早川三代治は，戦前戦後を通じてパレートの所得分布論にかんする理論と実証の両面に及ぶ研究を積み上げた[8]。

早川が精力的に研究した，α の計算にもとづくパレートの所得分布研究はおおむね次の文献によって知ることができる。

① Pareto, Vilfredo, “La legge della domanda,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume X, 1895［以下 Pareto（1895）］。

② ditto, “Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari),” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896［以下 Pareto（1896a）］。

③ ditto, “La curva delle entrate e le osservazione del prof. Edgeworth,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIII, 1896［以下 Pareto（1896b）］。

5）cf. Bresciani (1907).

6）Bresciani (1907), p.20.

7）小倉金之助『統計的研究法』積善館　1925 年 p.445。

8）早川三代治『パレート法則による所得と財産の分布に関する研究』。これは早川が早稲田大学に提出した学位請求論文であり，これには 1932 年 9 月から 1959 年 5 月までに公表したパレート分布（パレート法則）にかんする理論的ならびに実証的研究の成果が収録されている。早川は，これにより 1960 年 1 月 18 日付けで経済学博士の学位を授与された。したがって，上記著書は 1960 年ころに刊行されたと考えられるが，上記著書には奥付がないので，正確な刊行年月日は不詳である。このために，以下では，早川（＊）と略記する。

④ ditto, *Cours d'Économie Politique*, Tome Second, (Livre III. La réparti- tion et la consommation), Lausanne 1897［以下Pareto（1897a)］（Tome Premier は1896年刊行)。イタリア語版は *Corso di Economia Politica*, (Libro Terzo. La ripartizione e il consumo), Secondo Volume, Torino 1942［以下Pareto(1942)］(第1巻[Primo Volume] も刊行年は同じ)。

⑤ ditto, "Aggiunta allo studio sulla curva delle entrate," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897［以下Pareto（1897b)］。

以下ではこれらの文献にもとづいてパレートの見解を

(1) 所得分布モデル

(2) パレート指数の計算

の順に考察する。その際，この分野における先行研究者である早川三代治[9]ならびに森田優三[10]の著作を適宜参照する。そして，パレートの所得分布研究が果たした政治経済学上の役割を解明する手がかりを得たい。

9）①早川三代治「パレートの所得分配論」(第1章第1節)；②同「所得ピラミッドの端初的形態」(第1章第6節)；③同「Charlier のB型頻度曲線による所得分布」(第1章第7節)；④同「所得ピラミッド下層部の形状並に才能分布と所得分布との関聯に就いて」(附論1)。章節等は早川（＊）による。

10）森田優三『国民所得の評価と分析』東洋経済新報社 1949年，p.120 ff., p.138 ff.［以下，森田(1949)］。

1．所得分布モデル

(1) 所得分布の形状

パレートは図1以外にもそれに類似した図を用いて，所得分布の図示を試みている。それにもかかわらず，ここで，この図1を引用したのは，それがもっとも詳細なものだからである。

以下では，この図に即してパレートの見解を見てゆくこととする。彼は，各国（地域）の税務当局が収集した所得統計について，一方で（世帯や個人の）所得を x とおき，また他方でその所得が x 以上になる世帯（あるいは個人）の数（世帯数・人数）を $N(x)$ とおいて，統計をとりまとめた。そして，横軸に $N(x)$ をとり，縦軸に x をとったグラフを描けば，どの国（地域）の所得分布も同じ形状の図で概観できると考えた(図1)[11]。この図において点 M 付近の形状が正規分布に類似しているとオットー・アモン[12]が指摘していることについて，早川三代治は次のように指摘している[13]。「パレートは所得分布曲線を正常[正規]分布曲線とは見てゐない故に，パレートの所論はアムモンの所論に賛同してゐるのではないが，併し明確な批判を敢てしてゐるのでもない。」

以下では，図1の上部と下部に分けて考察する。縦軸の G は当該所得分布における最高の所得額である。しかし，現実には所得統計

11）Pareto (1896b), p.439.

12）Ammon, Otto, *Die Gesellschaftsordnung und ihre natürlichen Grundlagen*, Jena 1895, p.83, p. 86, esp. pp.129ff. ただし，引用は Pareto (1897a), p.314［Pareto(1942)，p.347］による。

13）早川（＊），p.112。

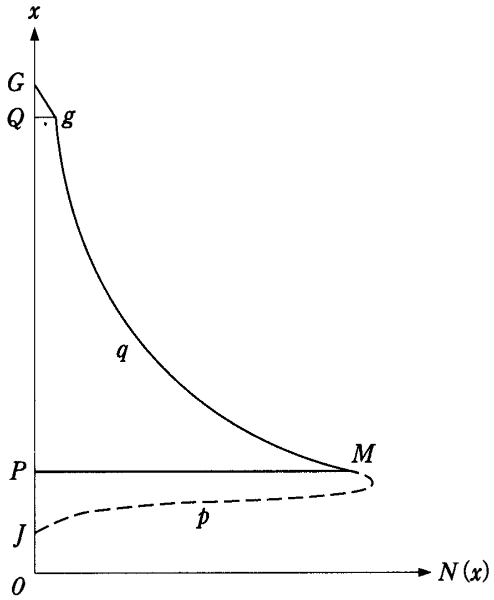


図1　パレートの所得分布図

（出所）Pareto, Vilfredo, “La curva delle entrate e le osservazione del prof. Edgeworth, “*Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIII, 1896, p.439 にもとづく。

がそのときどきの最高所得額を表章することはなく，Q 以上の所得（$x \geqq Q$）を有する世帯（もしくは個人）の数が表章されるだけなので，図中の線分 Gg は，そうであろうと予想されるに過ぎず，そのためにパレートは，線分 Gg がない図を掲載している論文を執筆したこともある[14)]。さらにまた，パレートは，実際には，高額の所得を有する世帯や個人は少ないので，曲線 Mqg を図1の左上方に向けて平滑に延長しても，$x=G$ の付近では現実とモデルとの乖離は大きいと予想した。このような事情から，モデルとの適合性を勘案して，パレートは，モデルの現実説明力の及ぶ範囲から線分 Gg を除いた[15)]。

14) ①Pareto (1897a), p.315［Pareto (1942), p.347］；②Pareto(1897b), p.16.

15) Pareto (1896b), p.439.

次に，図1の下部に点線で描いた曲線（JpM）について述べる。縦軸の $x=J$ は世帯（もしくは個人）が生存するのに必要とされる最低限度の所得額である[16)]。しかし，生命の維持にとって最低限度の所得の近傍にいる世帯（個人）（$J \leqq x < P$）には，所得税の課税免除が適用されているために，それらの階層にかんする詳細な所得統計は期待できない。結局，税務当局によって公表される統計は P 以上（$x \geqq P$）の所得を有する世帯（個人）についてだけである。他方で，上述した理由から捕捉される所得の上限は Q である。こうして，パレートは図1から $x<P$ の部分（曲線 JpM）と $x>Q$ の部分（線分 Gg）を除き，現実の所得統計にもとづいて把捉される所得分布は，曲線 gqM であるとした[17)]。

パレートは，図1に示したような形状の曲線（$GgqMpJ$）が全体として「多様に表出」する「人間の勤勉さ」に依存し，「諸個人間の精神的・肉体的性質の分布法則」を示す[18)]「統計的法則（legge statistica）」であると考えた[19)]。そして，「［富の分布という］現象の主たる原因は，人間の本性のなかにもとめられるべきである。」とパレートは主張し[20)]，この曲線全体のうち，とくに，曲線 gqM と直線 MP で作られる図形を「社会的ピラミッド（pyramide

16) Pareto (1896b), p.439.

17) このことが典型的に現われた例としてパレートはスイス中部のウーリ（Uri）州の所得統計を挙げている［Pareto (1897b), p.25］。

18) Pareto (1897b), p.17f.

19) Pareto (1897b), p.26.

20) Pareto (1897a), p.304［Pareto(1942), p.334］. この点については，①早川前掲「所得ピラミッド下層部の形状並に才能分布と所得分布の関聯に就いて」；②森田（1949），p.122f. も参照。

sociale[21], piramide sociale[22])」と名づけた[23]。

(2) パレート・モデル

パレートは，「社会的ピラミッド」の曲線 gqM（図1）で示される世帯（または個人）の所得分布が次のような関数で表現できると考えた[24]。

$$N(x)=\frac{H}{(x+a)^{\alpha}} \tag{1}$$

ここに x は世帯（または個人）の所得，$N(x)$ は所得が x 以上の世帯数（もしくは人数），α（>0）と H はパラメータ。a は所得の源泉ごとに正負の値をとると考えられている。

彼によれば，その所得が勤労，土地所有，贈与，遺産相続，救恤，窃盗などのいずれに由来しても，世帯（もしくは個人）の収入が x であれば，それは，所得が x であると見なされ，(1)式が妥当すると考えられている[25]。ただし，収入源を異にする各種の世帯（個人）所得（「部分的所得（entrate parziali）」[26]）については，(1)式の右辺の a は，その収入源ごとに異なった正負の値をとりうるとパレートは主張した。たとえば，勤労による所得では $a<0$，資産による所得では $a>0$ になると考えられた[27]。しかし，彼は，「部分的所得」を合算した「総合所得（entrate totali）」においては，その正負の a が相殺されて，

$$a=0$$

になると主張した[28]。このとき，(1)式は

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{2}$$

となる。この(2)式は，後にコスタンチーノ・ブレシアーニ＝チュッローニによって「パレートの第1法則（Pareto's first law）」と名づけられた[29]。一般に上式の α が「パレート指数（Pareto's index）」と言われるのは，それが(2)式右辺の分母における x の「べき」（指数）だからである。

パレートにあっては，所得分布にかんする研究の重点は「総合所得」におかれ，それについてのパレート指数 α にもとづいて，諸国・諸地域の所得分布が比較研究された。そ

21) Pareto (1897a), p.316.

22) Pareto (1942), p.353.

23) パレートの「社会的ピラミッド」については，①早川前掲「パレートの所得分配論」；②同前掲「所得ピラミッドの端初的形態」；③森田（1949），pp.121ff. も参照。

24) パレートは，より厳密には，所得分布が $N(x)=\frac{H}{(x+a)^{\alpha}}e^{-\beta x}$ であると考えた。しかし，オルデンブルク大公国［ドイツ北西部の北海に面した地域で現ニーダーザクセン州の一部］のデータを例外として，β は無視できる（ゼロとみなしてよい）と考えて，(1)式を誘導した（Pareto (1897a), p.307f.［Pareto (1942), p.335f.］）。オルデンブルク大公国の所得分布については Pareto (1896b), p.440 参照。

25) ① Pareto (1896b), p.439；② Pareto (1897b), p.15.

26) Pareto (1897b), p.15.

27) Pareto (1897a), p.309［Pareto (1942), p.342］.

28) Pareto (1897b), p.16. なお，Pareto (1895), p.60 ではザクセン，プロイセン，イギリスなどの所得分布研究が(2)式にもとづいて行われている。したがって，研究の端緒においては(2)式が構想されていたと考えられる。

29) Bresciani-Turroni, Costantino, "On Pareto's Law," *JRSS* (New Series), Vol.100, Pt.3, 1937, p.422. この「第1法則」にたいしてブレシアーニ＝チュッローニは，(1)式を「パレートの第2法則」と命名している。この論文の執筆者は，脚注3に掲げた Costantino Bresciani と同一人物である。

して，H の値は地域ごとに異なるが，α の変動は小さいことを確認した。パレートは所得分布を化学物質になぞらえ，「同一の化学物質」は大中小さまざまな大きさの結晶として描くことができるが，それらの形態はすべて同一であることを「たとえ」に，時空を問わずパレート指数 α が安定的であると主張した[30)]。このことについては，後に改めて触れることにしたい。

2．パレート指数の計算

(1) コーシーの補間法（内挿法）

パレート指数 α をもとめるには，(2)式の両辺の対数をとって

$$\log N(x) = \log H - \alpha \log x \tag{3}$$

とすればよい[31)]。所得統計への(3)式のあてはめは，データの組 (x, y) への直線 $y = a + bx$ のあてはめと同じであり，その場合には，今日では最小二乗法がよく応用されている。したがって，(3)式の切片 $\log H$ と勾配 α をもとめようとする場合にも，最小二乗法の応用が考えられる。しかし，パレートは，最小二乗法の計算手続きが複雑煩瑣であることを理由にして，その適用を忌避し，「手軽(spedito)」なコーシーの補間法（内挿法）(il metodo di interpolazione del Cauchy) を採用した。以来，このコーシーの補間法は，イタリアにおける所得分布研究で多用されることになった[32)]。

パレートは表1のデータを用いて，コーシーの補間法を次のように例解している[33)]。

> ［表1の］数 A の平均を計算する。この例では3.5である。各々の A からこの平均を引き，その数［平均］が大きいときは負の符号を付す。そうすると，［表2の］∇A で示した数を得る。M についても同

表1　コーシーの補間法のための数値例（パレート）（その1）

	A	M
	1	1.5
	2	3.1
	3	2.5
	4	3.5
	5	4.0
	6	5.5
合計	21	20.1
平均	3.5	3.35

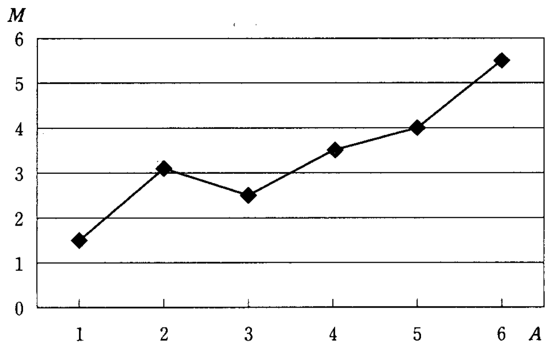
（出所）Pareto, Vilfredo, "Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari)," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896, p.84 に加筆。

30）Pareto (1897a), p.305f. [Pareto (1942), p.338.]

31）(3)式は(2)式と同じなので，(3)式がパレート（の第1）法則と言われることもある。

32）パレート理論をイタリアに紹介し，普及させたロドルフォ・ベニーニもまた，基本的にはコーシーの方法を採用した。e.g. Benini, Rodolfo, "Principii di Statistica Metodologia," *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, pp.141ff., pp.146ff., pp.185ff. cf. 木村和範「パレート指数にかんするベニーニの見解」『経済論集』(北海学園大学) 第52巻第2・3合併号 2004年。

33）Pareto (1896a), p.84. 原データをグラフで表示すれば，次のようになる。



参考図　表1のグラフ

様の操作を行うと，▽M で示した別の数を得る。ここで，負の▽A についてそのすべての符号を変え，［それとともに］この▽A の隣に記載した▽M のすべての数の符号を変えて合計する。こうすると，すべての▽M は正となる。……ゼロになる▽A があれば，それに隣り合う▽M は除外しなければならない。すなわち，そのような▽M をゼロと見なすのである。［表1の数値例では］▽A の合計は9であり，▽M の合計は5.9である。後者［▽M の合計5.9］で前者［▽A の合計9.0］を割ると，この現象を表現する……直線の**勾配**（inclinazione）を得る。この勾配が正であれば，現象は増加し，負のときには減少している。さらにまた，この直線は縦軸 M の平均と横軸 A の平均を通る。こうして，すべてが定まる（ゴシック体による強調はパレートによるが，傍点による強調は引用者による）。

要するに，パレートによれば，元のデータが表1であたえられるときにコーシーの補間法を応用する場合には，内挿直線（補間式）は次のような手順を経て特定されることになる。

i．横座標の系列 A の平均値を求める（$\overline{A}=3.5$）。

ii．系列 A の各項について，「個別値－平均値」（$A-\overline{A}$）によって，平均値との乖離（▽A）をもとめる（表2）。

iii．縦座標の系列 M についても，系列 A と同様に平均値（$\overline{M}=3.35$）との乖離（▽M）をもとめる（表2）。

iv．系列 A と M のそれぞれについて次の手順で平均値との乖離が全体としてどれだけの大きさであるかを計算し，内挿直線の勾配をもとめる。すなわち，

①　横方向のデータ（系列 A）についてiiで求めた乖離を絶対値に変換して，その合計をもとめる（Σ ▽A＝9.0）。

②　上と同様の操作を系列 M についても行う。ただし，表2に示した元の乖離のなかで，その符号を負から正へと変換した系列 A の各項（全部で3個）に対応する系列 M の3つの項については，その符号を負から正へと変換して，乖離の合計をもとめなければならない（上記引用文における傍点箇所参照）。こうして，乖離の合計が得られる（Σ ▽M＝5.9）。

③　上述した操作で求めた2つの乖離について，横方向の系列の乖離の合計を分母とし，縦方向の系列の乖離の合計を分子とすれば，次のようになる。すなわち，

$$\frac{\text{縦方向の乖離の合計}}{\text{横方向の乖離の合計}}=\frac{5.9}{9.0}$$

表2　コーシーの補間法のための数値例（パレート）（その2）

	▽A	▽M
	−2.5	−1.85
	−1.5	−0.25
	−0.5	−0.85
	+0.5	+0.15
	+1.5	+0.65
	+2.5	+2.15
合計*	9.0	5.9

（注＊）負の符号を反転させた後の合計。
（出所）Pareto, Vilfredo, “Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari),” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896, p.84 に加筆。

となる[34]。これがもとめるべき内挿直線の勾配である。

v. 内挿直線は2つの系列(A, M)の平均値($\overline{A}$, $\overline{M}$)＝(3.5, 3.35)を通る。一般に，任意の点(x_0, y_0)を通り，その勾配がbである直線$y=a+bx$は，

$$y_0=a+bx_0$$

を満たすので，切片aは

$$a=y_0-bx_0$$

である。この式に(x_0, y_0)＝(3.5, 3.35)，$b=\frac{5.9}{9.0}$を代入すると，

$$a=y_0-bx_0=3.35-\frac{5.9}{9.0}\times 3.5=1.06$$

また，

$$b=\frac{5.9}{9.0}=0.66$$

であるから，元の系列の記号AとMを用いれば，もとめるべき内挿直線は，

$$M=1.06+0.66A$$

となる。

vi. 上にもとめた内挿直線があたえる(Mの)値をM'とする。そして，参考までに原系列Mと内挿直線で補間されたM'との乖離($M'-M$)を，表3にまとめておく[35]。

表3　内挿直線($M=1.06+0.66A$)からの乖離

A	M	$M'=1.06+0.66A$	$M'-M$
1	1.5	1.72	0.22
2	3.1	2.38	−0.72
3	2.5	3.04	0.54
4	3.5	3.70	0.20
5	4.0	4.36	0.36
6	5.5	5.02	−0.48

(2) 補間法による所得分布の分析

パレートは，数値例（上述）によってコーシーの補間法を例解した直後に，ギッフェンがイギリスの所得分布についてまとめたデータにたいしてコーシーの補間法を応用した。ギッフェンのデータは次のとおりである。

表4　イギリスの所得分布（Giffen による）

（人）*

所得（ポンド）	1843年	1879-80年
150	106,637	320,162
200	67,271	190,061
300	38,901	101,616
400	25,472	61,720
500	18,691	45,219
600	13,911	33,902
700	11,239	27,008
800	9,365	22,954
900	7,923	19,359
1,000	7,029	17,963
2,000	2,801	7,611
3,000	1,566	4,480
4,000	1,040	3,050
5,000	701	2,292
10,000	208	853
50,000	8	68

(注*) 欄内の数値は，左欄に記載した金額以上の所得を有する者の数。

(出所) Parero, Vilfredo, "Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari)," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896, p.85.

34) これは，縦方向の平均的な乖離を横方向の平均的な乖離で割ったときの商

$$\frac{\text{縦方向の平均的な乖離}}{\text{横方向の平均的な乖離}}=\frac{\frac{5.9}{6}}{\frac{9.0}{6}}=\frac{5.9}{9.0}$$

と同値である。

35) これにたいして最小二乗法を同一のデータの組に適用したときには，内挿直線として

$M=-0.78+1.28A$

を得る。

パレートによれば，このデータは

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{2}$$

で表される「統計的法則」(ブレシアーニ＝チュッローニのいわゆる「パレートの第1法則」)に従う。具体的な所得統計データからこの関数の H と α をもとめるためには，(2)式の両辺の対数をとり，変形して

$$\log N(x)=\log H-\alpha\log x \tag{3}$$

とすれば，データの組に一次式をあてはめるために上で例解したコーシーの補間法を適用することができる。

ところで，コーシーの補間法を例解したときにあてはめた内挿直線は $y=a+bx$ であった。すなわち，x の係数 b の符号は正であった。パレートは，コーシーの補間法を対数変換した所得分布関数の特定に利用したときも，これと同様に $\log x$ の係数 α の符号をひとまずは正であるとして，

$$\log N(x)=\log H+\alpha\log x$$

をあてはめた。内挿直線を特定するためにそのようにしても，後に見るように，計算の結果，負の値の α がもとめられ(α の符号は負となって)，問題は生じない。

パレートは，コーシーの補間法を適用するために，表4に示したイギリスの所得分布を示すデータ，すなわち所得 x と人数 $N(x)$ についてその対数をもとめた。その上で，$\log x$ と $\log N(x)$ について平均をもとめ，さらに個別値との乖離を計算し，その乖離について符号を変換するなどして，必要なデータを整えた。このような一連の措置の結果が表にまとめられた（表5）。

これにより，イギリス（1843年）の所得分布にたいする内挿直線の勾配 α は，

$$\alpha=\frac{-12.61856}{8.42080}=-1.498 \tag{4}$$

となった（$\alpha=-1.498$）[36]。同様にして，パレートは1879-80年のイギリスについて，$\alpha=-1.353$ ともとめている。

1843年の α の値（-1.498）を

$$\log N(x)=\log H+\alpha\log x$$

に代入すれば，

$$\log N(x)=\log H-1.498\log x$$

となる。このように，補間法を適用する最初の段階で，α の符号をプラスとして内挿直線をあてはめても，計算を続けてゆけば，最終的には負の値の α が得られて，所得分布にかんする「統計的法則」としての元の関数(α の符号は正，(2)式参照)とその両辺の対数をとった式（α の符号は負，(3)式参照）との間の関係は維持されることになる。

パレートは $\alpha_{1843}=-1.498$ と $\alpha_{1879-80}=-1.353$ を得て，計算を終えているが，ここでは，さらに進んで，一般に $\log H$ で示される切片の値をもとめることにしよう。1879-80年のイギリスについても同様の計算によって，切片 $\log H$ をもとめることができるが，以下では1843年についてだけ計算することにする。

(3)式で表現される内挿直線は，$\log x$ の平均値3.09463と $\log N(x)$ の平均値3.67255を通るので(表5の各欄参照)，この値を(3)式に

36) パレートの計算によれば，$\alpha=-1.499$ であり(Pareto [1896a], p.86)，本文とは小数第3位が異なるが，これはパレートが掲げた元の表の対数に若干の誤りがあるからである。

表5　イギリスにおける所得分布のための計算表（1843年）

所得（ポンド） x	人数 $N(x)$	$\log x$	$\triangledown\log x$ $[\log x-\overline{\log x}]$	$\triangledown\log x$（補正後）	$\log N(x)$	$\triangledown\log N(x)$ $[\log N(x)-\overline{\log N(x)}]$	$\triangledown\log N(x)$（補正後）
150	106,637	2.17609	−0.91853	0.91853	5.02791	1.35536	−1.35536
200	67,271	2.30103	−0.79360	0.79360	4.82783	1.15528	−1.15528
300	38,901	2.47712	−0.61750	0.61750	4.58996	0.91741	−0.91741
400	25,472	2.60206	−0.49257	0.49257	4.40606	0.73351	−0.73351
500	18,691	2.69897	−0.39566	0.39566	4.27163	0.59908	−0.59908
600	13,911	2.77815	−0.31647	0.31647	4.14336	0.47081	−0.47081
700	11,239	2.84510	−0.24953	0.24953	4.05073	0.37818	−0.37818
800	9,365	2.90309	−0.19154	0.19154	3.97151	0.29896	−0.29896
900	7,923	2.95424	−0.14038	0.14038	3.89889	0.22634	−0.22634
1,000	7,029	3.00000	−0.09463	0.09463	3.84689	0.17434	−0.17434
2,000	2,801	3.30103	0.20640	0.20640	3.44731	−0.22524	−0.22524
3,000	1,566	3.47712	0.38250	0.38250	3.19479	−0.47776	−0.47776
4,000	1,040	3.60206	0.50743	0.50743	3.01703	−0.65552	−0.65552
5,000	701	3.69897	0.60434	0.60434	2.84572	−0.82683	−0.82683
10,000	208	4.00000	0.90537	0.90537	2.31806	−1.35449	−1.35449
50,000	8	4.69897	1.60434	1.60434	0.90309	−2.76946	−2.76946
	合計	49.51401		8.42080	58.76078		−12.61856
	平均	3.09463			3.67255		

（出所）Parero, Vilfredo, "Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari)," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896, p.86 にもとづく。原表訂正済み。

代入することができる。このとき，

$$3.67255=\log H-1.498\times 3.09463$$

となり，もとめるべき切片は

$$\log H=8.3038 \tag{5}$$

である。したがって，(3)式は

$$\begin{aligned}\log N(x)&=8.3038-1.498\log x\\&=8.3038-\log x^{1.498}\end{aligned} \tag{6}$$

となる。この(6)式を両対数グラフで表示すれば直線になることから，この直線は一般にパレート(直)線と言われている。

また，(5)式から

$$H=201{,}279{,}710.9 \tag{7}$$

となる。

したがって，最終的な所得分布関数として次式を得る。

$$N(x)=\frac{201{,}279{,}710.9}{x^{1.498}} \tag{8}$$

これが1843年のイギリスの所得分布にかんする「統計的法則」である。このように，パレートはコーシーの補間法を応用して，各国（地域）のパレート指数を計算し，それを表にまとめた(表6)。この表からパレートは所得分布の傾向が「整然」としていることを読み取り，それにもとづいて，α は安定的であって，いささかも国々の経済条件に左右されることがないと主張した[37]。

37) Pareto (1897a), p.312 [Pareto (1942), p.344].

表6　各国（地域）のパレート指数 α

国（地域）	パレート指数α	国（地域）	パレート指数α
イギリス (1843年)	1.50	ペルージャ (都市部)	1.69
(1879-80年)	1.35	(郡部)	1.37
プロイセン (1852年)	1.89	アンコーナ，アレッツォ，パルマ，ピサ（計）	1.32
(1876年)	1.72	イタリア23都市[1]	1.45
(1881年)	1.73	バーゼル (1887年)	1.24
(1886年)	1.68	パリ	1.57
(1890年)	1.60	アウクスブルク (1471年)	1.43(＊)[2]
(1894年)	1.60	(1498年)	1.47(＊)
ザクセン (1880年)	1.58	(1512年)	1.26(＊)
(1886年)	1.51	(1526年)	1.43(＊)
フィレンツェ	1.41	ペルー[3] (18世紀末)	1.79(＊)

（訳注）1）Ancona, Arezzo, Belluno, Bologna, Cuneo, Ferrara, Firenze, Foggia, Grosseto, Mantova, Massa, Modena, Parma, Pavia, Perugia, Pesaro, Pisa, Reggio nell Emilia, Siena, Sondrio, Treviso, Udine, Vicenza。この23都市はいずれも県庁所在地（図2参照）。α の値は1887年のデータにもとづいた Benini, Rodolfo, "Di alcune curve descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897, p.179 の計算による。

2）(＊)は「不正確」であるとパレートが注記しているデータである。

3）18世紀末，スペイン統治下のペルーでは「十字軍」(Croisade［仏］, Crociata［伊］) という名称の「魔よけ」(bulle［仏］, bella［伊］)［歴史上，ローマ教皇が発行する bulle はとくに「大勅書」と言う］が発売された。この「魔よけ」は購入者の所得に応じて価格が異なっていた。この販売記録から W. Robertson は所得別の人数を次のように推定した。

所得（レアル）	人数
3	1,171,953
4	503,352
13.5	93,027
27	14,205

（出所）Pareto, Vilfredo, *Cours d'Économie Politique*, Tome 2, Lausanne 1897, p.311; ditto, *Corso di Economia Politica*, Secondo Volume, Torino 1942, p.343.

む　す　び

所得統計が整備された19世紀中葉以降の理論状況をブレシアーニは次のように記している[38]。

> これまでのところ，所得と資産にかんする統計は，真っ向から対立する論考を支持するために引用されてきた。ある者は，諸個人の経済条件の不平等性が小さくなる傾向を強く世人に訴えるための証拠としてその統計を引き合いに出し，社会主義学派の演繹が誤りであると主張した。他方で，別の人々は，最近になってもまだ，その統計が，資本主義社会における経済的対立はつねに，またより激化し，不断に続いているということを示す確証になると考えている。

このような2つの見解が相対立して論争が

38) Bresciani (1907), p.13.

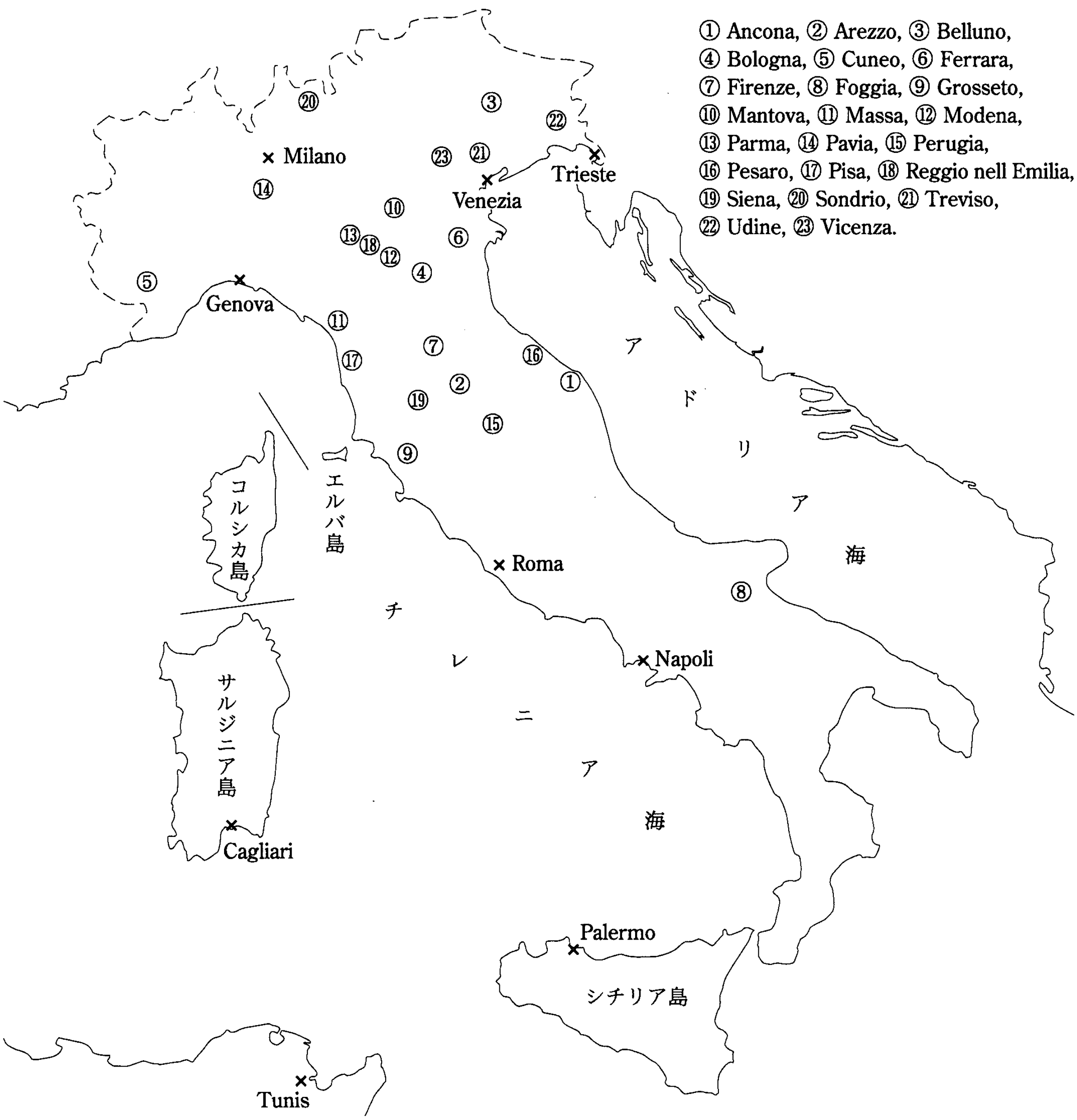


図2　県庁所在地（23 都市）

（注）地図上の都市（①〜㉓）は表 6 注(1)に対応している。

行われていた時代にあって，パレートは所得分布の解明に「数学的方法」を応用した。それにかんする本稿における考察結果を要約すれば，次のようになる。

i．パレートは所得分布を数理モデル（関数関係）として把握した。そのモデルがパレート法則（厳密にはパレートの第 1 法則）である。このモデルには 2 つのパラメータがある。パレートは，そのうちの一方によって所得分布を統計的に計測することができると考えた。所得分布の計測指標としてのパラメータが，いわゆるパレート指数 α である。

ii．パレートは，α の値を計算するとき，簡単であることを理由にして，コーシーの補間法を採用した。

iii. さまざまな時期における各国（地域）について α を計算したパレートは，α の値が安定的であると結論した。貧困化論争の渦中にこの結論を置くならば，それは，社会が平等な方向に進んでいることはないが，かと言って不平等な方向に進んでいるわけでもないことを意味する。α の安定性を確認したパレートは，時空を超えて，所得分布が安定的であって，しかも，それは「人間の本性」に由来すると考えた。安定的な α の発見という「統計的規則性」の検出，すなわち所得分布の超時空的安定性が，貧困化論争にたいするパレートの解答であったと言えよう。

従来，明らかになっているように，通説によれば，パレート指数 α が大きいほど，所得分布は均等になると言われている。パレートの解釈はこれとは逆に，α の増大は所得分布の不平等度の強化を意味する。α の変動をどのように解釈すべきかについては，先行研究によって，通説が正しいということになっている。その点にかんする限り，異論はないが，パレート法則の数学的な含意を検討すれば，さらに明らかになる事柄もあるのではないかと予想される。

パレート理論が発表された後，彼の見解は，(1)パレート指数 α の解釈と(2)所得分布モデルの適合性[39]の２点から，批判を受けることになった。これらの論点と関連させて，パレート法則の数学的含意を検討し，パレートの所得分布分析を方法論的に考察することは，別稿に譲る。

39) ① Gini, C., "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXXVIII, 1909; ② ditto, "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Science*, 1910; ③ ditto, "Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri," *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte seconda, 1913-14; ④ ditto, "Indici di concentrazione e di dipendenza," *Biblioteca dell'Economista*, Serie 5, Vol.XX, 1922. ジーニ指数については，木村和範「ジーニの集中指数」『開発論集』（北海学園大学） 第 74 号 2004 年。