タイトル	分散と標準偏差の分解
著者	木村，和範
引用	開発論集，83：145-165
発行日	2009-03-30

開発論集　第83号　145-165(2009年３月)

《研究ノート》

分散と標準偏差の分解

木　村　和　範*

もくじ

はじめに

所得分布に対数を用いる統計的計測は，低額所得階層の所得変化にたいして敏感に反応する。そのことがメリットであると考えられている。この特性を逆から見れば，対数変換が高額所得階層の所得変化には鋭敏性を欠くことを意味する（10の常用対数は1であるが，100の常用対数は2となるように，元の値(真数)が大きくなるにしたがって，より小さな値が対数として返される)。たとえば，500万円の世帯所得は250万円の世帯所得の2倍であるが，対数変換によって所得の常用対数は，それぞれ6.7と6.4となり，倍率は1.05倍に圧縮される（自然対数の場合には，それぞれ15.4と14.7となって倍率は同じく1.05倍である)。「対数変換を行うことによって数値の乖離が減少するために，不平等を表現する際の強烈さが緩和されることになるが，他方ではそのために……最も低い水準の近傍における所得格差が相対的に目立つことになる」[1)] というセンの指摘はこの間の事情を言い当てている。

このように指摘されているにもかかわらず，原系列に対数変換を施した統計量である対数分散や平均対数偏差が，所得格差の指標として使用されている。それは，これらの指標が所得格差を①年齢階層内変動（級内変動）と②年齢階層間変動（級間変動）に要因分解し，所得格差の構造把握が可能であると考えられているからである。また，対数分散や平均対数偏差の値の増加(減少)は，①年齢階層内変動の寄与分,②年齢階層間変動の寄与分,③階級を構成する世帯数(人数)変動の寄与分

1）Sen, Amartya, *On Economic Inequality*, Expanded Edn., with James E. Foster, Oxford 1997. ただし，引用は鈴村興太郎・須賀晃一訳『不平等の経済学』東洋経済新報社，2000年，p.36f. による。

*（きむら　かずのり）開発研究所研究員，北海学園大学経済学部教授

表１　データの組と統計量

階級	変量	個数	階級別平均	階級別分散
1	${}^0x_{11}$　${}^0x_{12}$ ……………………………………… ${}^0x_{1{}^0k_1}$	${}^0k_1$	$\overline{{}^0x_1}$	${}^0\sigma_1{}^2$
2	${}^0x_{21}$　${}^0x_{22}$ ………… ${}^0x_{2{}^0k_2}$	${}^0k_2$	$\overline{{}^0x_2}$	${}^0\sigma_2{}^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	${}^0x_{i1}$　${}^0x_{i2}$ ………………… ${}^0x_{i{}^0k_i}$	${}^0k_i$	$\overline{{}^0x_i}$	${}^0\sigma_i{}^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	${}^0x_{m1}$　${}^0x_{m2}$ ……………………… ${}^0x_{m{}^0k_m}$	${}^0k_m$	$\overline{{}^0x_m}$	${}^0\sigma_m{}^2$
総合計	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$	${}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$		
総平均	$\overline{\overline{{}^0x}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}$			
総分散	${}^0\sigma^2=\dfrac{1}{{}^0N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$			

に分解され，そのために，格差構造のより詳細な分析が可能であることも，それらの計測指標が有効であることの論拠になっている。そして，要因分解から，①格差の拡大は人口構成の高齢化（人口動態変化）によること，②人口動態効果による格差の拡大は「見かけ上」にすぎないことなどが指摘されている[2]。

上に述べた有効性は対数変換を用いる対数分散や平均対数偏差に固有の特性であろうか。これらの計測指標によらなければ，変動の要因分解は不可能であろうか。対数変換は必要不可欠な操作であろうか。本稿はこれらの検討を課題として，対数変換が施されていない原系列の分散に着目し，その要因分解を試みる。さらに，この試みを拡充して，グループ分けされたそれぞれの階級を構成する個体数の総体的な数量的変化（これを構造的変化と言うことにする）が果たす寄与を計測するための計算式を誘導する。そして，この構造的変化による分散の増減が，「見かけ上」の変化であるかどうかを検討するとともに，分散の増減を要因分解することによって，構造的変化の主因とされる階級を特定することが可能かどうかを検討する。また，分散の要因分解をもとにして，標準偏差の差の要因分解についても言及する。

１．総変動の分解

⑴　基準時点における総変動とその分解

基準時点(0)における変量を ${}^0x$ とする。この変量 ${}^0x$ が m 個の階級に分類され，それぞれの階級に落ちる変量の個数を ${}^0k_i$ とすると，基準時点における変量の組と関連統計量は上のようにまとめることができる（表１）。

この変量の組について，${}^0x_{ij}$ の総平均を $\overline{\overline{{}^0x}}$ とおくとき，総変動 ${}^0V_T$ は

$$
{}^0V_T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2 \tag{1}
$$

である。

この総変動 ${}^0V_T$ を級内変動 ${}^0V_I$ と級間変

２）内閣府『経済財政白書』(2006年版，p.262f.，2007年版，p.233)

動 ${}^0V_A$ に分解する目的で，基準時点において第 i 階級に属す変量 ${}^0x_{ij}$ とその総平均 $\overline{\overline{{}^0x}}$ の偏差二乗和 $\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$ を以下でもとめる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i}+\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2\\
&\quad+2\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\\
&\quad+\sum_{j=1}^{{}^0k_i}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2\\
&\quad+2\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\\
&\quad+{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2
\end{aligned}\tag{2}$$

(2)式第 2 項の $\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})$ を整理すれば，次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\\
&=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})\\
&=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}-\sum_{j=1}^{{}^0k_i}\overline{{}^0x_i}\right)\\
&=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}-{}^0k_i\overline{{}^0x_i}\right)\\
&=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}-{}^0k_i\times\frac{\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}}{{}^0k_i}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

したがって，(1)式は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2
\end{aligned}\tag{3}$$

となる。この(3)式右辺の第 1 項は級内変動 ${}^0V_I$ を示し，第 2 項は級間変動 ${}^0V_A$ を意味する。したがって，総変動 ${}^0V$［(1)式］は

$${}^0V_T={}^0V_I+{}^0V_A \tag{4}$$

に分解できる。

ここまでは，分散分析を取り扱う数理統計学教科書のレベルである。

(2) 簡便式の誘導

(3)式の値を計算するための簡便式を誘導する。これもまた，初等統計学的な叙述であることをあらかじめ断っておく。(3)式左辺 ${}^0V_T$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}\left\{{}^0x_{ij}^2-2\cdot{}^0x_{ij}\cdot\overline{\overline{{}^0x}}+(\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}(\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}^2-2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\\
&\quad+{}^0N\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}={}^0V_T
\end{aligned}\tag{5}$$

他方で，(3)式右辺第 2 項 ${}^0V_A$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left\{(\overline{{}^0x_i})^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\cdot\overline{{}^0x_i}+(\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i})^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\cdot\overline{{}^0x_i}+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x})^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i})^2-2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j}{{}^0k_i}\right)^2-2\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}
\end{aligned}$$

表 2　総変動 ${}^0V_T$ のための計算表（(5)式）

階級	変量	個数	変量の二乗	階級別平均*	階級別分散*
1	${}^0x_{11}$　${}^0x_{12}$　…………………………… ${}^0x_{1{}^0k_1}$	${}^0k_1$	${}^0x_{11}{}^2$　${}^0x_{12}{}^2$　…………………………… ${}^0x_{1{}^0k_1}{}^2$	$\overline{{}^0x_1}$	${}^0\sigma_1{}^2=\frac{1}{{}^0k_1}\sum_{j=1}^{{}^0k_1}({}^0x_{1j}-\overline{{}^0x_1})^2$
2	${}^0x_{21}$　${}^0x_{22}$　………… ${}^0x_{2{}^0k_2}$	${}^0k_2$	${}^0x_{21}{}^2$　${}^0x_{22}{}^2$ …………… ${}^0x_{2{}^0k_2}{}^2$	$\overline{{}^0x_2}$	${}^0\sigma_2{}^2=\frac{1}{{}^0k_2}\sum_{j=1}^{{}^0k_2}({}^0x_{2j}-\overline{{}^0x_2})^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	${}^0x_{i1}$　${}^0x_{i2}$ ………………… ${}^0x_{i{}^0k_i}$	${}^0k_i$	${}^0x_{i1}{}^2$　${}^0x_{i2}{}^2$ ……………………… ${}^0x_{i{}^0k_i}{}^2$	$\overline{{}^0x_i}$	${}^0\sigma_i{}^2=\frac{1}{{}^0k_i}\sum_{j=1}^{{}^0k_i}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	${}^0x_{m1}$　${}^0x_{m2}$ …………………… ${}^0x_{m{}^0k_m}$	${}^0k_m$	${}^0x_{m1}{}^2$　${}^0x_{m2}{}^2$ ………………………… ${}^0x_{m{}^0k_m}{}^2$	$\overline{{}^0x_m}$	${}^0\sigma_m{}^2=\frac{1}{{}^0k_m}\sum_{j=1}^{{}^0k_m}({}^0x_{mj}-\overline{{}^0x_m})^2$
総合計	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$	${}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}{}^2$		
	$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2$	総平均*	$\overline{\overline{{}^0x}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}$	総分散*	${}^0\sigma^2=\frac{1}{{}^0N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$
	$\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$				
${}^0V_T$	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$	参考** $\frac{{}^0V_T}{{}^0N}$	$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}}{{}^0N}$		

＊は，${}^0V_T$ の計算には直接の必要がない参考値である。

＊＊は，⒆式左辺の値をもとめるときに用いる。

表 3　級間変動 ${}^0V_A$ のための計算表（(6)式）

階級	変量	個数	階級別合計		
1	${}^0x_{11}\ \ {}^0x_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ {}^0x_{1{}^0k_1}$	${}^0k_1$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}\right)^2}{{}^0k_1}$
2	${}^0x_{21}\ \ {}^0x_{22}\cdots{}^0x_{2{}^0k_2}$	${}^0k_2$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}\right)^2}{{}^0k_2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	${}^0x_{i1}\ \ {}^0x_{i2}\ \cdots\cdots\ {}^0x_{i{}^0k_i}$	${}^0k_i$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0k_i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	${}^0x_{m1}\ \ {}^0x_{m2}\ \cdots\cdots\cdots\ {}^0x_{m{}^0k_m}$	${}^0k_m$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_m}{}^0x_{mj}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_m}{}^0x_{mj}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_m}{}^0x_{mj}\right)^2}{{}^0k_m}$
総合計	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$	${}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$			$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j\right)^2}{{}^0k_i}$
	$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2$				
	$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$				
${}^0V_A$	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j\right)^2}{k_i}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$		参考* ${}^0V_I$	${}^0V_T-{}^0V_A$	
参考 $\dfrac{{}^0V_A}{{}^0N}$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j\right)^2}{k_i}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}}{{}^0N}$		参考* $\dfrac{{}^0V_I}{{}^0N}$	$\dfrac{{}^0V_T}{{}^0N}-\dfrac{{}^0V_A}{{}^0N}$	

＊${}^0V_T$ は表 2 でもとめた。

$$
+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2
$$

$$
=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j}{{}^0k_i}\right)^2-2\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}
$$

$$
+{}^0N\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2
$$

$$
=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_j\right)^2}{{}^0k_i}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}={}^0V_A \quad (6)
$$

(4)式より

$$
{}^0V_I={}^0V_T-{}^0V_A \quad (4)'
$$

なので，(5)式から総変動 ${}^0V_T$ を，また(6)式から級間変動 ${}^0V_A$ をもとめて，その結果を(4)′式に代入すれば，級内変動 ${}^0V_I$ を得ることができる。

以上の数式にもとづいて実際に各種の変動を計測するには，表 2 から総変動 ${}^0V_T$ をもとめ，表 3 から級間変動 ${}^0V_A$ をもとめればよい。級内変動 ${}^0V_I$ は(4)′式 [${}^0V_A-{}^0V_T$] によっ

てもとめることができる。

⑶　数値例

表 4 には，4 つの階級のそれぞれが 5 個ずつの個体からなるときの，階級別個体データが表章されている。

表 4 のデータは次の数値をあたえる。

$$^0V_T=67873-\frac{1153^2}{20}=1402.55$$

［⑸式による（表 2 参照）］

$$^0V_A=67305-\frac{1153^2}{20}=834.55$$

［⑹式による（表 3 参照）］

$$^0V_I=1402.55-834.55=568.00$$

［⑷′式による］

以上から，総変動 ^0V は 1402.55，級内変動 ^0V_I は 568.00，級間変動 ^0V_A は 834.55 である。したがって，これらの数値を

$$^0V_T={}^0V_I+{}^0V_A \qquad (4)［再掲］$$

に代入すれば，総変動は

$$1402.55=568.00+834.55$$

と分解される。

表 4　総変動の分解のための数値例

階級	階級別個体データ					階級別平均	階級別分散
1	60	65	69	73	75	68.4	29.44
2	51	53	55	59	62	56.0	16.00
3	48	49	53	60	65	55.0	42.80
4	46	47	50	53	60	51.2	25.36

（出所）森博美「分散分析」，近昭夫・木村和範・森博美編『演習　統計［改訂版］』産業統計研究社，1985 年，第 15 章，p.30 にもとづく。ただし，表示の仕方に手を加えた。

2．総分散の分解

⑴　分解式

分散 σ^2 は，平均偏差二乗和（総変動）を偏差の個数で除して得られる。平均偏差の個数は階級内のデータ数 ^0k_i の総和 ^0N（$=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$）に等しいから，基準時点の全データにかんする分散（総分散）$^0\sigma_T{}^2$ は，総変動 ^0V_T を偏差の総個数 ^0N で除した

$$^0\sigma_T{}^2=\frac{^0V_T}{^0N} \qquad (7)$$

によってあたえられる。

この⑺式に，表 4 があたえるデータの総個数 ^0N（$=20$）と ^0V_T（$=1402.55$）を代入すれば，総分散 $^0\sigma_T{}^2$ は

$$^0\sigma_T{}^2=70.1275$$

となる。

また，⑷式から総分散 $^0\sigma_T{}^2=\frac{^0V_T}{^0N}$ は，

$$\frac{^0V_T}{^0N}=\frac{^0V_I+{}^0V_A}{^0N}=\frac{^0V_I}{^0N}+\frac{^0V_A}{^0N} \qquad (8)$$

と分解できる。上式の右辺第 1 項は総分散にたいする級内変動の寄与分を示し，第 2 項は総分散にたいする級間変動の寄与分を示している。

⑵　数値例

⑻式に表 4 のデータにもとづいて上で算出された数値（^0V_I と ^0V_A，および ^0N）を代入すれば，総分散 $^0\sigma_T{}^2$ は

$$70.1275=28.4000+41.7275$$

と分解される。ここから総分散（70.1）にたいする級内変動の寄与分は 28.4 となり，これは総分散の 40.5％にあたる（寄与率 40.5％）。ま

た，級間変動の寄与分は 41.7 となり，これは総分散の 59.5％である（寄与率 59.5％)。

3．総変動の差の分解

⑴　分解式

基準時点を 0，比較時点を t とおく。そして，時点が異なっていても，階級の個数（m）が不変であるとする（m＝const.)。ただし，異なった時点における各階級内の個体数（k）が必ずしも同一であるとは限らない。すなわち，${}^0k_i={}^tk_i$ となることは否定できないが，つねにこれが成立している保証はなく，${}^0k_i\neq{}^tk_i$ となる可能性もある。また，総個数（N）についても同様に，${}^0N={}^tN$ が成立する場合もあるが，そうではなく，${}^0N\neq{}^tN$ となって，${}^0N<{}^tN$ となることもあれば，${}^0N>{}^tN$ となることもある。いずれにしても，基準時点と比較時点の 2 時点における総変動とその分解式は⑶式により次のようになる。

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx})^2+\sum_{i=1}^{m}{}^tk_i(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2\end{cases}$$

比較時点における総変動が基準時点と較べてどれだけ増加（減少）したかを調べるには，比較時点における総変動 ${}^tV_T$ から基準時点における総変動 ${}^0V_T$ を引けばよい。すなわち，次のようになる。

$$\begin{array}{rl}&\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx})^2+\sum_{i=1}^{m}{}^tk_i(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2\\ -)&\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\ \hline &\underbrace{{}^tV_T-{}^0V_T}_{\substack{\text{総変動}\\(\varDelta_T)}}\quad=\quad\underbrace{({}^tV_I-{}^0V_I)}_{\substack{\text{級内変動}\\(\varDelta_I)}}\quad+\quad\underbrace{({}^tV_A-{}^0V_A)}_{\substack{\text{級間変動}\\(\varDelta_A)}}\end{array}\qquad(9)$$

ここでは，２時点間における総変動，級内変動，級間変動にかんするそれぞれの差が，

$$\begin{cases}\varDelta_T={}^tV_T-{}^0V_T\\ \varDelta_I={}^tV_I-{}^0V_I\\ \varDelta_A={}^tV_A-{}^0V_A\end{cases}$$

と表されている。

⑵　級間変動の差の分解

階級別のデータ数の変化が総変動の変化 $\varDelta_T$ にあたえる影響（寄与分）を計測する目的で，上のように分解された総変動の差にかんする⑼式右辺第 2 項（級間変動の差）${}^tV_A-{}^0V_A$，すなわち，

$$\begin{aligned}\varDelta_A&={}^tV_A-{}^0V_A\\ &=\sum_{i=1}^{m}{}^tk_i(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\end{aligned}\qquad(10)$$

に着目する。

ここで，

$$\begin{cases}{}^td_i=(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2\\ {}^0d_i=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\end{cases}\qquad(11)$$

とおき，⑽式に代入する。

$$\begin{aligned}\varDelta_A&=\sum_{i=1}^{m}{}^tk_i{}^td_i-\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i{}^0d_i\\ &=\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i{}^td_i-{}^0k_i{}^0d_i)\end{aligned}\qquad(12)$$

上式を整理するために次のようにおく。

$$\begin{cases}{}^tk_i={}^0k_i+\varDelta{}^0k_i\\ {}^td_i={}^0d_i+\varDelta{}^0d_i\end{cases}$$

そして，これらを⑿式右辺の（　）内に代入する。

$$\begin{aligned}&{}^tk_i{}^td_i-{}^0k_i{}^0d_i\\ &=({}^0k_i+\varDelta{}^0k_i)({}^0d_i+\varDelta{}^0d_i)-{}^0k_i{}^0d_i\\ &={}^0k_i{}^0d_i+{}^0k_i\varDelta{}^0d_i+\varDelta{}^0k_i{}^0d_i+\varDelta{}^0k_i\varDelta{}^0d_i-{}^0k_i{}^0d_i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&={}^0k_i\Delta^0d_i+\Delta^0k_i{}^0d_i+\frac{1}{2}\Delta^0k_i\Delta^0d_i+\frac{1}{2}\Delta^0k_i\Delta^0d_i\\
&=\Delta^0d_i\left({}^0k_i+\frac{1}{2}\Delta^0k_i\right)+\Delta^0k_i\left({}^0d_i+\frac{1}{2}\Delta^0d_i\right)\\
&=({}^td_i-{}^0d_i)\left\{{}^0k_i+\frac{1}{2}({}^tk_i-{}^0k_i)\right\}+({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{{}^0d_i+\frac{1}{2}({}^td_i-{}^0d_i)\right\}\\
&=\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{{}^tk_i+{}^0k_i}{2}\right)\\
&\quad+({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

［(11)式による］

(13)式を(12)式に代入すると(10)式は次のように整理することができる[3]。

$$
\begin{aligned}
&\Delta_A\\
&=\sum_{i=1}^{m}\left[\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{{}^tk_i+{}^0k_i}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{{}^tk_i+{}^0k_i}{2}\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

(14)式の数学的含意を理解するために，同式右辺の各項を

$$
\begin{cases}
\Delta_A'=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{{}^tk_i+{}^0k_i}{2}\right)\\
\Delta_A''=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}
\end{cases}
$$

とおく。

ここで，いずれの階級においてもそれを構成する個体数が異時点間で変化しない（${}^tk_i={}^0k_i$）と仮定すれば，すなわち，

$${}^tk_i-{}^0k_i=0$$

であれば，

$$
\begin{cases}
\Delta_A'=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{{}^tk_i+{}^0k_i}{2}\right)\\
\quad=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\frac{2\cdot{}^0k_i}{2}\\
\qquad\qquad\qquad(\because\ {}^tk_i={}^0k_i)\\
\quad=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\cdot{}^0k_i\\
\Delta_A''=0 \qquad\qquad (\because\ {}^tk_i-{}^0k_i=0)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \Delta_A&=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\cdot{}^0k_i\\
&=\Delta_A'
\end{aligned}
$$

となる。このことから分ることは，すべての階級において時点間で階級内個体数に変化がない場合，階級ごとの級間変動の変化 Δ_A' が，基準時点の階級内個体数をウェイトとして，級間変動の変化 Δ_A を規定するということである。

他方で，いずれの階級においても時点間で級間変動に変化がない（$(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$）とすれば，すなわち

$$(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2=0$$

であれば，

$$
\begin{cases}
\Delta_A'=0 \qquad (\because\ (\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2=0)\\
\Delta_A''=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}\\
\quad=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)\left\{\frac{2(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}\\
\qquad\qquad(\because\ (\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2=(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2)\\
\quad=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \Delta_A&=\sum_{i=1}^{m}({}^tk_i-{}^0k_i)(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\\
&=\Delta_A''
\end{aligned}
$$

となる。このことは，すべての階級において時点間で級間変動に変化がない場合，階級内個体数の変化 Δ_A'' が，基準時点における階級ごとの級間変動をウェイトとして，級間変動の変化 Δ_A を規定することを意味する。

このように，総変動の差にかんする(9)式右

3）①関彌三郎『寄与度・寄与率 —— 増加率の寄与度分解法 ——』産業統計研究社，1992 年，p.179；②木村和範『ジニ係数の形成』北海道大学出版会，2008 年，p.317f.。

辺第２項（級間変動の差）${}^{t}V_A-{}^{0}V_A$ に着目し，それを分解すると，級間変動の差 $\varDelta_A$は，①階級内の個体数が一定不変であることを前提したときに，さまざまな級間変動の変化が果たす寄与分 $\varDelta_A{}'$ と②すべての階級において時点間で級間変動がなく，一定不変であると前提したときに，階級内個体数の変化が果たす寄与分 $\varDelta_A{}''$ に分解されることが分かる。

以上の結果，総変動の異時点間変化 $\varDelta_T$ は次のように分解される。

①級内変動の異時点間変化 $\varDelta_I$

②級間変動の異時点間変化 $\varDelta_A{}'$

③階級内個体数の異時点間変化 $\varDelta_A{}''$

換言すれば，総変動を級内変動と級間変動に分解し，異時点間で比較するときには，それぞれの変動別（級内変動と級間変動）の変化を検出するにすぎないが，総変動の差 $\varDelta_T$ をとることによって，

$$\begin{aligned}&\varDelta_T\\&=\varDelta_I+\varDelta_A\\&=\varDelta_I+\varDelta_A{}'+\varDelta_A{}'' \end{aligned}\tag{15}$$

と分解され，総変動の差 $\varDelta_T$ にたいして果たす①級内変動の異時点間変化の寄与分 $\varDelta_I$，②級間変動の異時点間変化の寄与分 $\varDelta_A{}'$ の２つだけでなく，③階級内個体数の異時点間変化の寄与分 $\varDelta_A{}''$ も計測できるようになる。すなわち，

$$\varDelta_A={}^{t}V_A-{}^{0}V_A \qquad (10)[再掲]$$

から⒁式を誘導することによって，級間変動 $\varDelta_A$ は，$\varDelta_A{}'$ と $\varDelta_A{}''$ の２つに分解される。本稿では分解前の級間変動 $\varDelta_A$ を広義の級間変動と名づけ，分解後の級間変動 $\varDelta_A{}'$ を狭義の級間変動と名づけることにする（図１参照）。

$$\text{総変動の変化}\ \varDelta_T\begin{cases}\text{級内変動}\ \varDelta_I\\[2ex] \text{広義の級間変動}\ \varDelta_A\begin{cases}\text{狭義の級間変動}\ \varDelta_A{}'\\ \text{個 体 数 変 動}\ \varDelta_A{}''\end{cases}\end{cases}$$

図１　総変動の変化とその要因

こうして，⑼式と⒁式により，⒂式は次のように分解することができる。

$$\begin{aligned}&{}^{t}V_T-{}^{0}V_T=\varDelta_T\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i}\right)^2\right\}\\
&\quad+\left\{\sum_{i=1}^{m}{}^{t}k_i\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}{}^{0}k_i\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\right\}\\
&=\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\right\}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\right\}\left(\frac{{}^{t}k_i+{}^{0}k_i}{2}\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left({}^{t}k_i-{}^{0}k_i\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2+\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2}{2}\right\}\end{aligned}\tag{16}$$

ところで，総変動は個体データの総数によっても変動する。この総個数の違いが果たす数値集団の変動効果を除去するために考案されたのが，分散である。これは，偏差１つあたりの変動を計測する尺度である。これによって，構成する個体の総数を異にする諸集団を統一的に比較することができる。そこで，異時点間の総変動の差を統一的基準（分散）で比較するために，次に項を改めて総分散の差がどのように分解されるかを考察する。

４．総分散の差の分解

⑴　分解式

基準時点を０で表し，そのときのデータの総個数を ${}^{0}N$ とおく。また，比較時点を t で表し，そのときのデータの総個数を ${}^{t}N$ とおく。さらに，基準時点における総分散を ${}^{0}\sigma^2$，比較時点における総分散を ${}^{t}\sigma^2$ とおく。総分散は，

総変動（平均偏差二乗和）を偏差の個数で除した統計量であるから，比較時点の総分散と基準時点の総分散は次のようになる。

$$\begin{cases} {}^{t}\sigma^2=\dfrac{{}^{t}V_T}{{}^{t}N} \\[2ex] {}^{0}\sigma^2=\dfrac{{}^{0}V_T}{{}^{0}N} \end{cases} \tag{17}$$

すでに述べたように，総変動 V_T は級内変動 V_I と級間変動 V_A に分解されるので，⒄式は

$$\begin{cases} {}^{t}\sigma^2=\dfrac{{}^{t}V_I+{}^{t}V_A}{{}^{t}N}=\dfrac{{}^{t}V_I}{{}^{t}N}+\dfrac{{}^{t}V_A}{{}^{t}N} \\[2ex] {}^{0}\sigma^2=\dfrac{{}^{0}V_I+{}^{0}V_A}{{}^{0}N}=\dfrac{{}^{0}V_I}{{}^{0}N}+\dfrac{{}^{0}V_A}{{}^{0}N} \end{cases} \tag{17$'$}$$

になる。

2時点間における総分散の差を $\varDelta\sigma^2$ とおくと，それは次のようになる（⑼式，⒄′式参照）。

$$\begin{aligned}
\varDelta\sigma^2&={}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2\\
&=\left(\frac{{}^{t}V_I}{{}^{t}N}+\frac{{}^{t}V_A}{{}^{t}N}\right)-\left(\frac{{}^{0}V_I}{{}^{0}N}+\frac{{}^{0}V_A}{{}^{0}N}\right)\\
&=\left(\frac{{}^{t}V_I}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}V_I}{{}^{0}N}\right)+\left(\frac{{}^{t}V_A}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}V_A}{{}^{0}N}\right)\\
&=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}\right\}\\
&\quad+\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}{}^{t}k_i(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}{}^{0}k_i(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2}{{}^{0}N}\right\}\\
&=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}\right\}\\
&\quad+\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2\right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

ここで，

$$\lambda_i=\frac{k_i}{N}$$

とおくと，上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varDelta\sigma^2&=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}\right\}\\
&\quad+\left\{\sum_{i=1}^{m}{}^{t}\lambda_i(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-\sum_{i=1}^{m}{}^{0}\lambda_i(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2\right\}
\end{aligned} \tag{18$'$}$$

ところが，⒅′式右辺における

$$\sum_{i=1}^{m}{}^{t}\lambda_i(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-\sum_{i=1}^{m}{}^{0}\lambda_i(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2$$

は，

$$\begin{aligned}
&\varDelta_A\\
&={}^{t}V_A-{}^{0}V_A\\
&=\sum_{i=1}^{m}{}^{t}k_i(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-\sum_{i=1}^{m}{}^{0}k_i(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2
\end{aligned} \tag{10}$$

［再掲］

と形式的に同一である。そこで，⑽式から⒁式を誘導した手順を準用して，⒅′式右辺の第3項と第4項を整理し，その結果を⒅′式に代入すれば，$\varDelta\sigma^2$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varDelta\sigma^2&=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}\right\}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2\right\}\left(\frac{{}^{t}\lambda_i+{}^{0}\lambda_i}{2}\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m}({}^{t}\lambda_i-{}^{0}\lambda_i)\left\{\frac{(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2+(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2}{2}\right\}\\
&=\overbrace{\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i})^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i})^2}{{}^{0}N}\right\}}^{\text{①総分散の変動にたいする級内変動の変化の寄与分}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2-(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2\right\}\left(\frac{\dfrac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}+\dfrac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}}{2}\right)}^{\text{②総分散の変動にたいする級間変動の変化の寄与分}}\\
&\quad+\overbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^2+(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^2}{2}\right\}}^{\text{③総分散の変動にたいする階級内個体占有率の変化の寄与分}}
\end{aligned} \tag{19}$$

⒄式により，総分散の差 $\varDelta\sigma^2$ は次のようになる。

$$\varDelta\sigma^2=\frac{{}^{t}V_T}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}V_T}{{}^{0}N} \tag{20}$$

表５　(19)式右辺第２項・第３項のための計算表

階級	階級別平均		個数		$(\overline{x_i}-\overline{\overline{x}})^2$		個体比率						広義の級間変動	
													(19)式右辺第２項（狭義の級間変動）	(19)式右辺第３項（構造的変化）
	比較時点	基準時点	比較時点	基準時点	比較時点 ①	基準時点 ②	比較時点 ③	基準時点 ④	⑤ ①−②	⑥ (①＋②)/2	⑦ ③−④	⑧ (③＋④)/2	⑨ ⑤×⑧	⑩ ⑦×⑥
1	$\overline{{}^tx_1}$	$\overline{{}^0x_1}$	${}^tk_1$	${}^0k_1$	$(\overline{{}^tx_1}-\overline{\overline{{}^tx}})^2$	$(\overline{{}^0x_1}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{{}^tk_1}{{}^tN}$	$\frac{{}^0k_1}{{}^0N}$	$(\overline{{}^tx_1}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_1}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{(\overline{{}^tx_1}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_1}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}$	$\frac{{}^tk_1}{{}^tN}-\frac{{}^0k_1}{{}^0N}$	$\frac{\frac{{}^tk_1}{{}^tN}+\frac{{}^0k_1}{{}^0N}}{2}$	$\left\{(\overline{{}^tx_1}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_1}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_1}{{}^tN}+\frac{{}^0k_1}{{}^0N}}{2}\right)$	$\left(\frac{{}^tk_1}{{}^tN}-\frac{{}^0k_1}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_1}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_1}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$
2	$\overline{{}^tx_2}$	$\overline{{}^0x_2}$	${}^tk_2$	${}^0k_2$	$(\overline{{}^tx_2}-\overline{\overline{{}^tx}})^2$	$(\overline{{}^0x_2}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{{}^tk_2}{{}^tN}$	$\frac{{}^0k_2}{{}^0N}$	$(\overline{{}^tx_2}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_2}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{(\overline{{}^tx_2}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_2}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}$	$\frac{{}^tk_2}{{}^tN}-\frac{{}^0k_2}{{}^0N}$	$\frac{\frac{{}^tk_2}{{}^tN}+\frac{{}^0k_2}{{}^0N}}{2}$	$\left\{(\overline{{}^tx_2}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_2}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_2}{{}^tN}+\frac{{}^0k_2}{{}^0N}}{2}\right)$	$\left(\frac{{}^tk_2}{{}^tN}-\frac{{}^0k_2}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_2}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_2}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\overline{{}^tx_i}$	$\overline{{}^0x_i}$	${}^tk_i$	${}^0k_i$	$(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2$	$(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}$	$\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$	$(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}$	$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$	$\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}$	$\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$	$\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\overline{{}^tx_m}$	$\overline{{}^0x_m}$	${}^tk_m$	${}^0k_m$	$(\overline{{}^tx_m}-\overline{\overline{{}^tx}})^2$	$(\overline{{}^0x_m}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{{}^tk_m}{{}^tN}$	$\frac{{}^0k_m}{{}^0N}$	$(\overline{{}^tx_m}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_m}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$	$\frac{(\overline{{}^tx_m}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_m}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}$	$\frac{{}^tk_m}{{}^tN}-\frac{{}^0k_m}{{}^0N}$	$\frac{\frac{{}^tk_m}{{}^tN}+\frac{{}^0k_m}{{}^0N}}{2}$	$\left\{(\overline{{}^tx_m}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_m}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_m}{{}^tN}+\frac{{}^0k_m}{{}^0N}}{2}\right)$	$\left(\frac{{}^tk_m}{{}^tN}-\frac{{}^0k_m}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_m}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_m}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$
合計			${}^tN=\sum_{i=1}^{m}{}^tk_i$	${}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$									$\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$	$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$

		比較時点		基準時点		備考
合計	平均	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}$	$\overline{\overline{{}^tx}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}{}^tx_{ij}}{{}^tN}$	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$	$\overline{\overline{{}^0x}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}$	表2参照

表 6　級間分散の差にかんする分解式のための検算表

階級	比較時点 ⑪ ③×①	基準時点 ⑫ ④×②	分解前の級間分散（⒅式第 2 項） ⑬ ⑪－⑫	備考 （①～④は表 5 に対応）
1	$\frac{{}^t k_1}{{}^t N}(\overline{{}^t x_1}-\overline{\overline{{}^t x}})^2$	$\frac{{}^0 k_1}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_1}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	$\frac{{}^t k_1}{{}^t N}(\overline{{}^t x_1}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\frac{{}^0 k_1}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_1}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	
2	$\frac{{}^t k_2}{{}^t N}(\overline{{}^t x_2}-\overline{\overline{{}^t x}})^2$	$\frac{{}^0 k_2}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_2}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	$\frac{{}^t k_2}{{}^t N}(\overline{{}^t x_2}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\frac{{}^0 k_2}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_2}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
i	$\frac{{}^t k_i}{{}^t N}(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2$	$\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	$\frac{{}^t k_i}{{}^t N}(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
m	$\frac{{}^t k_m}{{}^t N}(\overline{{}^t x_m}-\overline{\overline{{}^t x}})^2$	$\frac{{}^0 k_m}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_m}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	$\frac{{}^t k_m}{{}^t N}(\overline{{}^t x_m}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\frac{{}^0 k_m}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_m}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	
合計	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^t k_i}{{}^t N}(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^t k_i}{{}^t N}(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2$	広義の級間変動（⒅式参照）。ただし，⒅式の λ は k/N。
参　考			$\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2+(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2}{2}\right\}$	分解後の級間変動（⒆式参照）。表 5 の⑨欄と⑩欄の合計。

検算は $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^t k_i}{{}^t N}(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2=\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2-(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^t x_i}-\overline{\overline{{}^t x}})^2+(\overline{{}^0 x_i}-\overline{\overline{{}^0 x}})^2}{2}\right\}$ による。

この(20)式の V_T は，すでに誘導した簡便式（(5)式）によってもとめることができる（表２参照)。

他方で，(19)式右辺の①は

$$\frac{{}^tV_I}{{}^tN}-\frac{{}^0V_I}{{}^0N}$$

である。上式の V_I は，(5)式でもとめた V_T(表２参照）と(6)式でもとめた V_A（表３参照）によって算出することができる（(4)′ 式 $[V_I = V_T - V_A]$ 参照)。また，${}^tN$ と ${}^0N$ はそれぞれ，比較時点と基準時点におけるデータの総数である。

以上により，(19)式右辺の①（総分散の変動にたいする級内変動の変化の寄与分）をもとめることができる。そして，(19)式右辺の②と③は，表５（前々頁）を作成すれば，もとめることができる。また，その検算には表６（前頁）を用いればよい。

(2)　寄与率

(18)式でもとめた $\varDelta\sigma^2$ で，(19)式右辺が示すそれぞれの寄与分を割れば，①総分散の変動にたいする級内変動の変化の寄与率，②総分散の変動にたいする（狭義の）級間変動の変化の寄与率，③総分散の変動にたいする階級内個体占有率の変化（構造的変化）の寄与率を，次のように計算することができる。

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}}{\varDelta\sigma^2}\\[2ex]
\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\dfrac{\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}+\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)}{\varDelta\sigma^2}\\[2ex]
\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}-\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\dfrac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}}{\varDelta\sigma^2}
\end{array}\right\}\quad(21)$$

表７　ケースⅠ――比較時点のデータ（その１）――

階級	階級別個体データ					階級別平均	階級別分散
1	60	65	69	73	75	68.4	29.44
2	51	53	55	59	62	56.0	16.00
	51	53	55	59	62		
3	48	49	53	60	65	55.0	42.80
4	20	30	40	50	60	40.0	200.00

表８　ケースⅡ――比較時点のデータ（その２）――

階級	階級別個体データ					階級別平均	階級別分散
1	60	65	69	73	75	68.4	29.44
2	51	53	55	59	62	56.0	16.00
3	48	49	53	60	65	55.0	42.80
4	20	30	40	50	60	40.0	200.00
	20	30	40	50	60		

(3)　数値例

表４に表章したデータの組を基準時点のデータと見なす。そして，比較時点のデータとしてケースⅠ（表７）とケースⅡ（表８）の２つを取り上げ，これまで述べてきた要因分解法の特質を具体例によって示す。

ケースⅠでは，第２階級に落ちるデータの個数が10個となって，基準時点のデータの２倍になっている（同一の値が２個ずつある）こと，ならびに第４階級における５個の個体の数量的規定性が異なり，階級別の平均と分散が変化していることが確認できる。その他の２つの階級（第１階級と第３階級）において平均・分散に変化はない（第２階級も平均・分散は２時点間で同じである)。

ケースⅡでは，第１階級から第３階級までは基準時点と同様であるが，第４階級だけがその階級に落ちる個体の個数とその数量的規定性が基準時点とは異なり，そのために，こ

表 9　数値例にかんするさまざまな統計量

	比較時点		基準時点
	ケース I（表 7）	ケース II（表 8）	（表 4）
総平均 $\overline{\overline{{}^{0}x}}$	55.08	51.88	57.65
総個数 N	25	25	20
総変動 V_T	3,553.84	5,350.64	1,402.55
級内変動 V_I	1,521.20	2,441.20	568.00
級間変動 V_A	2,032.64	2,909.44	834.55
総変動/総個数　V_T/N，［総分散 σ^2］	142.1536	214.0256	70.1275
級内変動/総個数　V_I/N	60.8480	97.6480	28.4000
級間変動/総個数　V_A/N	81.3056	116.3776	41.7275
（参考値）総標準偏差　σ	11.9228	14.6296	8.3742

表 10　2 時点間における差

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">比較時点－基準時点</td></tr>
<tr><td colspan="2">ケース I</td><td colspan="2">ケース II</td></tr>
<tr><td colspan="2">総分散　$\varDelta V_T/N$，［$\varDelta\sigma^2$］</td><td colspan="2">72.0261</td><td colspan="2">143.8981</td></tr>
<tr><td colspan="2">級内変動　$\varDelta V_I/N$</td><td colspan="2">32.4480
(45.1%)</td><td colspan="2">69.2480
(48.1%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動　$\varDelta V_A/N$</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">39.5781
(54.9%)</td><td>53.5360
(　74.3%)</td><td rowspan="2">74.6501
(51.9%)</td><td>71.5680
(49.7%)</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>−13.9579
(−19.4%)</td><td>3.0821
(2.1%)</td></tr>
</table>

（注記）（　）内数字は，総分散の差にたいする寄与率（%）。ケース II における寄与率では計算上の誤差が生ずる。

の階級の平均・分散が基準時点の値とは異なっている。しかし，いずれのケースでも，総個数が 20 から 25 へと増加していることは共通している。

これらのデータについて，これまでに述べてきた計算式を適用すれば，さまざまな統計量の値が上のように得られる（表 9）。

また，2 時点間における総分散の差については上のようになる（表 10）。

個体数が基準時点の 5 から比較時点の 10 へと 2 倍に増加した階級が 1 つだけある点がケース I と II に共通しているにもかかわらず，表 10 から，構造的変化の寄与分は 2 つのケースで等しくないことが分かる。以下では，このことを考察する。

ケース I では構造的変化の寄与分が総分散の差を減少させるのにたいして，ケース II では構造的変化が微小ながら総分散の差を増加させている。しかし，この表 10 からだけでは，総分散の変化をもたらした階級がどれであるかは分からない。表 10 から分かることは，ケース I では総体として構造的変化が総分散の差を引き下げる作用をなしたということだけである。

このことは，表 10 における①級内変動，②狭義の級間変動，③構造的変化の，それぞれの寄与を数値的に特定する次式

$$
\Delta\sigma^2=\overbrace{\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}\left({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i}\right)^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i}\right)^2}{{}^0N}\right\}}^{①}
$$
$$
\overbrace{+\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)}^{②}
$$
$$
\overbrace{+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}}^{③}\quad(19)［再掲］
$$

から明らかである。⒆式は，それぞれの寄与分が，階級ごとに計算される関連数値の和としてあたえられることを示している。①級内変動はともかくとして，②狭義の級間変動の寄与については

$$\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2$$

が負数となる階級の存在が，その寄与分を押し下げる。また，③構造的変化の寄与については

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$$

の値が負数になる階級の存在は，それだけこの寄与分を小さくする。

以下では，このことを⒆式に即して考察する。狭義の級間変動による寄与分の大きさを規定する

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

に着目すると，

$$\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2$$

が負になる（すなわち，比較時点における階級別平均と総平均との乖離が基準時点よりも小さくなる）階級があれば，それは（狭義の）級間変動を押し下げる作用を果たす（逆も同じ）。

同様に，構造的変化の寄与分を示すとされる

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}$$

に着目すると，

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$$

が負になる階級が存在すれば（すなわち，比較時点における階級内個数の構成比が基準時点よりも小さくなるような階級があれば），それは，構造的変化の寄与分を減少させる（逆もまた同じ）。ただし，上で注目した次式

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\\
&\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

のいずれについても，その値は，すべての階級によってもたらされた寄与分の総計である。繰り返すが，表 10 では，変動の主因となった階級を特定することができない。この難点を克服するには，階級別に数値を表章した表５の活用が有効である。このことは，級内変動の変化を読みとるときにも，同様である。①狭義の級間変動と②構造的変化の寄与分を押し上げる（押し下げる）方向に作用した階級を析出するために作成した表 11（次頁）は，これまでの数値例（ケースⅠ，Ⅱ）を入れて作成した表５の一部を抽出して表章している。

表 11 によって，次のことが明らかになる。すなわち，ケースⅠでは，①狭義の級間変動の寄与分を押し上げたのは，第１階級と第４階級であること，②構造的変化の寄与分を押し上げたのは，第２階級であること。そして，

表 11　階級別分析表（部分）

階級	ケースⅠ		ケースⅡ	
	$({}^t\overline{x_i}-{}^t\overline{\overline{x}})^2-({}^0\overline{x_i}-{}^0\overline{\overline{x}})^2$	$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$	$({}^t\overline{x_i}-{}^t\overline{\overline{x}})^2-({}^0\overline{x_i}-{}^0\overline{\overline{x}})^2$	$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$
1	61.8599	−0.05	157.3479	−0.05
2	−1.8761	0.15	14.2519	−0.05
3	−7.0161	−0.05	2.7119	−0.05
4	185.8039	−0.05	99.5319	0.15

ケースⅡでは，①すべての階級が狭義の級間変動の寄与分を押し上げたこと，②構造的変化を押し上げたのは第 4 階級であること。

また，構造的変化に着目すれば，次のように見える。すなわち，ケースⅠでは，第 1 階級，第 3 階級，第 4 階級の 3 つの階級による押し下げ効果が働いて，全体として構造的変化の寄与分はマイナス（−13.9575）となっている(表 10 参照)。これにたいして，ケースⅡでは，全体として構造的変化はわずかながら押し上げられ，プラスの数値 (3.0821) を示していることから(表 10 参照)，第 1 階級，第 2 階級，第 3 階級による構造的変化にたいする押し下げ効果が軽微であったことが分る。ところが，階級別の個体シェアの変化 $\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)$ だけに注目すれば，ケースⅠとケースⅡとでは大きな違いは検出されない。個体シェアの変動よりも級間変動の時点間変化が大きいほど，構造的変化が大きくなる。構造的変化を計測する数式について階級別に $\{({}^t\overline{x_i}-{}^t\overline{\overline{x}})^2+({}^0\overline{x_i}-{}^0\overline{\overline{x}})\}/2$ を計算してみれば，このことは明らかになるが，表 11 からもその見当はつく。構造的変化の寄与分は個体シェアの変動だけを反映してはいないのである。

以上のことは次のようにも言うことができる。ケースⅠでは第 2 階級，ケースⅡでは第 4 階級と言うように，階級は異なるが，２つのケースのいずれにおいても，それぞれの階級に落ちる個体の個数は 5 から 10 へと 2 倍に変化している階級が 1 つずつある。それにもかかわらず，構造的変化の寄与の大きさが異なる。このこともまた，⒆式によって説明することができる。すなわち，

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$$

が負となっても，それのウェイトとなる

$$\frac{({}^t\overline{x_i}-{}^t\overline{\overline{x}})^2+({}^0\overline{x_i}-{}^0\overline{\overline{x}})^2}{2}$$

が小さければ，それだけ

$$\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\overline{x_i}-{}^t\overline{\overline{x}})^2+({}^0\overline{x_i}-{}^0\overline{\overline{x}})^2}{2}\right\}$$

が小さくなり，構造的変化の寄与分が小さくなる。階級内に落ちる個体の構成比(個体シェア)の変化がたとえ同一であろうとも，その階級における個体の数量的規定性の変化が小さければ，構造的変化の寄与分が小さくなる。このことは，構造的変化の寄与分を計測した結果とされる数値が，単に階級を構成する要素にかんする個数の構成比の変化に依存するだけではなく，その要素のもつ数量的規定性の影響から独立ではないことを意味している。このことから，構造的変化の寄与分は「見かけ上」の変動を示すのではなく，階級に落ちる個体の数量的規定性にかんする実質的な

表 12　2時点間における差の寄与度 ―― 総分散 ――

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">ケースⅠ</td><td colspan="2">ケースⅡ</td></tr>
<tr><td colspan="3">総分散の増加率（%）</td><td colspan="2">102.7074*</td><td colspan="2">205.1950</td></tr>
<tr><td rowspan="3">寄与度</td><td colspan="2">級内変動</td><td colspan="2">46.2700**</td><td colspan="2">98.7459</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">56.4374</td><td>76.3410</td><td rowspan="2">106.4491</td><td>102.0541</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>−19.9036</td><td>4.3950</td></tr>
</table>

$* \ 102.7074=\dfrac{142.1536-70.1275}{70.1275}\times 100$

$** \ 46.2700=102.7074\times\dfrac{32.4480}{72.0261}$

変動をも反映した実体のある指標と見ることができる。

付言までにここで，２時点間の差の寄与度について述べておく。変量を x，基準時点を０，比較時点を t とおくとき，増加率 p は一般に

$$p=\frac{{}^{t}x-{}^{0}x}{{}^{0}x}\times 100(\%) \tag{22}$$

である。

今，${}^{t}x$ と ${}^{0}x$ をそれぞれの時点における分散とすれば，増加率 p は総分散の増加率になる。そして，d_i を要因 i にかんする分散の増加分，c_i を要因 i の寄与度とすると，次の比例関係が成り立つ。

$$({}^{t}x-{}^{0}x):d_i=p:c_i$$

ゆえに寄与度は

$$c_i=p\cdot\frac{d_i}{{}^{t}x-{}^{0}x} \tag{23}$$

であたえられる。x は表９に表章された総分散 σ^2 である。したがって，総分散の増加率は表９からもとめることができる。また，要因別の増加分 d_i は表 10 に記載された $\Delta\sigma^2$ である。これらの関連数値を(23)式に代入すれば，総分散の増加率にたいする要因別の寄与度を得ることができる（表 12）。

寄与度の合計は総分散の増加率に一致するが，表 12 からは，総分散の増加率 102.7%（ケースⅠ），205.2%（ケースⅡ）のうち，級内変動は 46.3%（ケースⅠ），98.7%（ケースⅡ），広義の級間変動は 56.4%（ケースⅠ），106.4%（ケースⅡ）を説明することなどが分かる。

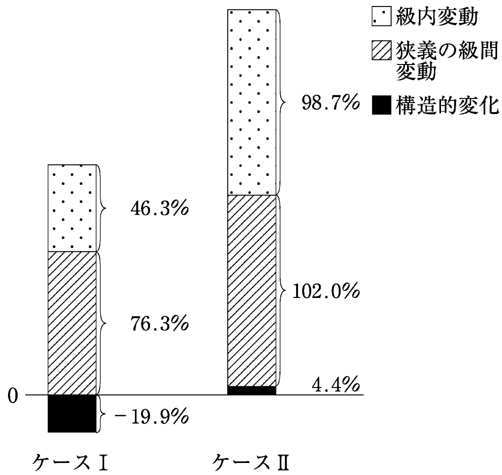

図２　総分散についての寄与度

また，表 12 はグラフでも示すことができる（図２）。

５．総標準偏差の差の分解

(1)　分解式

分散は，平均偏差の二乗和の平均であるために，分散の代わりに平均偏差の実勢に近い

統計量として標準偏差が使用されることが少なくない。そこで，以下では，総分散の差の分解にかんする考察にもとづいて，総標準偏差の差

$$\varDelta\sigma={}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$$

の分解式を誘導する。そのために

$$\varDelta\sigma^{2}={}^{t}\sigma^{2}-{}^{0}\sigma^{2} \tag{24}$$

とおく。

これを変形すれば，

$$\varDelta\sigma^{2}={}^{t}\sigma^{2}-{}^{0}\sigma^{2}=({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma)({}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma)$$

となる。ゆえに

$${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\varDelta\sigma^{2} \tag{25}$$

である。この(25)式に(19)式でもとめた $\varDelta\sigma^{2}$ を代入して，整理すれば，総標準偏差の差の分解式として次式を得る。

$$\begin{aligned}
\varDelta\sigma&={}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma\\
&=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left[\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_{1},{}^{t}k_{2},\cdots,{}^{t}k_{m}}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_{i}})^{2}}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_{1},{}^{0}k_{2},\cdots,{}^{0}k_{m}}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_{i}})^{2}}{{}^{0}N}\right\}\right.\\
&\quad+\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^{t}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^{2}-(\overline{{}^{0}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^{2}\right\}\left(\frac{\frac{{}^{t}k_{i}}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_{i}}{{}^{0}N}}{2}\right)\right\}\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_{i}}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_{i}}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^{t}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^{2}+(\overline{{}^{0}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^{2}}{2}\right\}\right]\\
&=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_{1},{}^{t}k_{2},\cdots,{}^{t}k_{m}}({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_{i}})^{2}}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_{1},{}^{0}k_{2},\cdots,{}^{0}k_{m}}({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_{i}})^{2}}{{}^{0}N}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^{t}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^{2}-(\overline{{}^{0}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^{2}\right\}\left(\frac{\frac{{}^{t}k_{i}}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_{i}}{{}^{0}N}}{2}\right)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_{i}}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_{i}}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^{t}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{t}x}})^{2}+(\overline{{}^{0}x_{i}}-\overline{\overline{{}^{0}x}})^{2}}{2}\right\}\right\}
\end{aligned} \tag{26}$$

(2) 数値例

これまで取り上げてきた数値例にかんして，総標準偏差の差を分解したときの，それぞれの寄与分を表にまとめた（表 13，14）。

総分散の差にかんする要因別の寄与度（表12）を計算したときと同様に，総標準偏差についても次のような表を作成することができる（表 15）。

表 13　標準偏差の差の分解

		ケースⅠ		ケースⅡ	
${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$		3.5486		6.2554	
級内変動		1.5987		3.0103	
広義の級間変動	狭義の級間変動	1.9499	2.6376	3.2451	3.1111
	構造的変化		−0.6877		0.1340

（注記）１．σ は表 9 最下欄に表章。
　　　　２．表 10 の関連数値を $1/({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma)$ 倍すれば，各種変動が計測できる。

表 14　標準偏差の差にたいする寄与率（%）

		ケースⅠ		ケースⅡ	
級内変動		45.05		48.12	
広義の級間変動	狭義の級間変動	54.95	74.33	51.88	49.73
	構造的変化		−19.38		2.14
（参考）${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$		100.00		100.00	

（注記）ケースⅡでは，計算上の誤差のために，狭義の級間変動の寄与率と構造的変化の寄与率の合計が広義の級内変動の寄与率とは一致しない。

表 15　2 時点間における差の寄与度 —— 総標準偏差 ——

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">ケースⅠ</td><td colspan="2">ケースⅡ</td></tr>
<tr><td colspan="3">総標準偏差の増加率（%）*</td><td colspan="2">42.3754**</td><td colspan="2">74.6985</td></tr>
<tr><td rowspan="3">寄与度</td><td colspan="2">級内変動</td><td colspan="2">19.0908***</td><td colspan="2">35.9473</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">23.2846</td><td>31.4967</td><td rowspan="2">38.7512</td><td>37.1510</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>−8.2121</td><td>1.6002</td></tr>
</table>

* 表 9 最下欄の参考値参照。

** $42.3754=\dfrac{11.9228-8.3742}{8.3742}\times 100$

*** $19.0908=42.3754\times\dfrac{1.5987}{3.5486}$

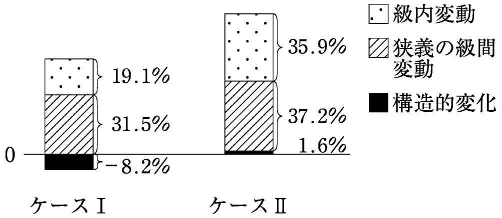

図 3　総標準偏差についての寄与度

また，表 15 はグラフでも示すことができる（図 3）。

む　す　び

以上，本稿では，原系列を対数変換して作成される計測指標に固有の難点を回避する目的で，対数変換によることなく元のデータそのものから計算される分散を取り上げ，その要因分解の可能性を検討した。そして，対数変換しない分散を用いても，原系列の変動にかんする要因分解が可能であることを述べた。これを⒆式（再掲），すなわち

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma^2=&\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\} \quad \text{級内変動}\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \quad \text{狭義の級間変動}\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\} \quad \text{構造的変化}
\end{aligned}
$$

（狭義の級間変動と構造的変化をあわせて：広義の級間変動）

によって要約的に述べる。とくに，⒆式を取り上げるのは，「見かけ上」の変動をもたらすとされる構造的変化がこの式によって計測されるからである。

再掲した⒆式は，①狭義の級間変動が積

$$\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x_i}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$$

の和としてあたえられ，また，②構造的変化は積

$$\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$$

の和としてあたえられることを示している。ただし，ここで注意すべきは，すべての階級において

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}=0$$

となるとき，すなわち，全階級をつうじて個体シェアが変化しないときに限って，⒆式は

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma^2=&\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\}\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i}\right)^2}{{}^{0}N}\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\right\}\cdot\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}$$

となり，$\mathit{\Delta}\sigma^2$ は級内変動と狭義の級間変動のみに分解される。

他方で，すべての階級において

$$\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2=0$$

となるとき，すなわち，全階級をつうじて時点間の級間変化がないときに限って，⒆式は

$$\mathit{\Delta}\sigma^2=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i}\right)^2}{{}^{0}N}\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2+\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2}{2}\right\}$$

$$=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2,\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2,\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i}\right)^2}{{}^{0}N}\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\cdot\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2$$

となり，$\mathit{\Delta}\sigma^2$ は級内変動と構造的変化のみに分解される。

しかし，

$$\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}=0$$

が成立していない階級が存在する場合には，計測したとされる狭義の級間変動は，その階級における個体シェアの変化の影響を受けることになる。

また，

$$\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2=0$$

が成立していない階級が存在する場合には，計測したとされる構造的変化は，その階級にかんする時点間級間変化の影響を受けることになる。この場合には，構造的変化は，ただ単に全体に占める階級内個体数の比率の変化だけを反映する指標ではなくなってしまう。このことは，構造的変化が「見かけ上」の分散の変化をもたらすのではなく，少くとも一般に

$$\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{{}^{t}x}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{{}^{0}x}\right)^2=0$$

が成立しない場合には，$\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{{}^{t}x}\right)^2$ と $\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{x}\right)^2$ との時点間の（見かけ上ではない）実質的な変化の影響を受けた，実体をもった変化であることを意味する。

なお，本稿では上に述べたことと関連させて，最終的に検出される総分散の変動だけからは，その変動をもたらした階級を特定することはできないこと，そして，この特定には階級別の分析が必要であることを述べた。

最後に，本稿では，総標準偏差の差の分解式を誘導した。分散は偏差の平均的な平方であるのにたいして，標準偏差はその平方根であり，それだけ実勢に近い数値があたえられると期待できるからである。しかしながら，その場合，要因分解されたそれぞれの寄与分には，比較される 2 つの時点における標準偏差の和の逆数 $(1/({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma))$ が掛けられている。そのために，総分散の差の分解のときには，広義の級間変動の分解によって析出される①狭義の級間変動と②構造的変化の 2 つの寄与分のいずれもが，一般に，時点間級間変化と階級別個体シェアの合成として得られるのにたいして，総標準偏差の差の分解によって算出される①と②の 2 つの寄与分にあっては，総分散のときと同様に 2 つの寄与の合成としてあたえられるだけでなく，さらに 2 つの時点における変動（標準偏差）―― より厳密には ${}^{t}\sigma$ と ${}^{0}\sigma$ の和の逆数 ―― が影響をあ

たえることになる。また，級内変動(狭義の級内変動と構造的変化) の寄与分にたいしても同様に，${}^{t}\sigma$ と ${}^{0}\sigma$ の和の逆数が影響をあたえていることを

$$\Delta\sigma=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{t}k_1,{}^{t}k_2\cdots,{}^{t}k_m}\left({}^{t}x_{ij}-\overline{{}^{t}x_i}\right)^2}{{}^{t}N}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^{0}k_1,{}^{0}k_2\cdots,{}^{0}k_m}\left({}^{0}x_{ij}-\overline{{}^{0}x_i}\right)^2}{{}^{0}N}\right\}$$

$$+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^{t}x_i}-\overline{\overline{{}^{t}x}}\right)^2-\left(\overline{{}^{0}x_i}-\overline{\overline{{}^{0}x}}\right)^2}{2}\right\}\right\} \quad \text{(26)式}$$

［再掲］

は示している。