タイトル	分散と標準偏差の分解にかんする再考察
著者	木村，和範
引用	開発論集，84：151-168
発行日	2009-09-30

開発論集　第84号　151-168（2009年９月）

《研究ノート》

分散と標準偏差の分解にかんする再考察

木　村　和　範*

は じ め に

基準時点（0）と比較時点（t）の総分散をそれぞれ ${}^0\sigma^2=\frac{{}^0V_T}{{}^0N}$，${}^t\sigma^2=\frac{{}^tV_T}{{}^tN}$ とおく（ただし，V_T は総変動，N はデータの総個体数）。このとき，分散 $\frac{V_T}{N}$ は，次のように級内変動 $\frac{V_I}{N}$ と級間変動 $\frac{V_A}{N}$ に分解される[1)]。

$$\begin{cases} \dfrac{{}^0V_T}{{}^0N}=\dfrac{{}^0V_I}{{}^0N}+\dfrac{{}^0V_A}{{}^0N} \\ \dfrac{{}^tV_T}{{}^tN}=\dfrac{{}^tV_I}{{}^tN}+\dfrac{{}^tV_A}{{}^tN} \end{cases}$$

上式の値をもとめるには，次式を原系列（基準時点のデータを ${}^0x$，比較時点のデータを ${}^tx$ とする）に応用すればよい。

$$\begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{{}^0N}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i}\right)^2}{{}^0N}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{{}^0N} \\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}\left({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{{}^tN}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}\left({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i}\right)^2}{{}^tN}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}{}^tk_i\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2}{{}^tN} \end{cases}$$

ただし，m は階級の数，k は階級別の個体数，N は総個体数，$\overline{x}$ は階級別の平均，$\overline{\overline{x}}$ は総平均である。

そして，２時点間の分散の差（${}^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$）を $\varDelta\sigma^2$ とおけば，

$$\begin{aligned}\varDelta\sigma^2&=\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}\left({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i}\right)^2}{{}^tN}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i}\right)^2}{{}^0N}\right\}\\&\quad+\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\\&=\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}\left({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i}\right)^2}{{}^tN}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}\left({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i}\right)^2}{{}^0N}\right\}\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2-\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}}\right)^2+\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2}{2}\right\}\end{aligned}\qquad(1)$$

となる。この(1)式は，$\varDelta\sigma^2$ が，(a)①級内変動の差，②広義の級間変動の差に分解されるとともに，(b)①級内変動の差，②狭義の級間変動の差，③構造的変化にも分解されることを示

１）以下の叙述は，木村和範「分散と標準偏差の分解」『開発論集』（北海学園大学開発研究所）第 83 号，2009 年［木村（2009）］にもとづく。

*（きむら　かずのり）開発研究所研究員，北海学園大学経済学部教授

している。

上でもとめた2時点間の総分散の差 $\varDelta\sigma^2$ は

$$\varDelta\sigma^2 = {}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2$$
$$= ({}^t\sigma + {}^0\sigma)({}^t\sigma - {}^0\sigma)$$

と変形できるので，2時点間の総標準偏差の差 $\varDelta\sigma = {}^t\sigma - {}^0\sigma$ は，

$$\varDelta\sigma = \frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\varDelta\sigma^2 \qquad (2)$$

となる。(2)式に(1)式の $\varDelta\sigma^2$ を代入すれば，総標準偏差の差 $\varDelta\sigma$ についても，総分散の差と同様の要因分解が可能となる。

ところが，上述した方法には，総標準偏差そのものを要因分解できないという難点がある。そこで，本稿では，$\varDelta\sigma^2$ を媒介にして，2時点の総標準偏の差 $\varDelta\sigma$ をもとめるための分解式（(2)式）の誘導（本誌前号掲載拙稿）とは別の方式によって，すなわち，それぞれの時点における総標準偏差（${}^0\sigma$ と ${}^t\sigma$）を用いて，総標準偏差の差にかんする分解式を誘導する。

標準偏差は分散との間に周知の関係があるので，総標準偏差を取り上げるのに先立って，総分散の分解について考察する。

1．総分散

(1) 総分散の分解

基準時点の総分散 ${}^0\sigma^2$ については，

$${}^0\sigma^2 \equiv {}^0\sigma^2$$

が恒等的に成立するので，

$${}^0\sigma^2 = {}^0\sigma^2$$
$$= {}^0\sigma^2 - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + {}^0\sigma^2 - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + {}^0\sigma^2\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0N - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + {}^0\sigma^2\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$\left(\because \quad {}^0N = \sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\right)$$

ここに，${}^0\sigma_i{}^2$ は，系列が m 個の階級に分類されるときの第 i 階級の分散である。

となる。これをさらに整理すれば，次のようになる。

$${}^0\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}{}^0\sigma^2\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0k_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma^2 - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i{}^2) \qquad (3)$$

(3)式右辺の第1項は級内変動の指標である。他方で，第2項は級間変動の指標である。すなわち，基準時点の総分散 ${}^0\sigma^2$ は，①階級内の個体数の構成比（シェア）$\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$ をウェイトとする ${}^0\sigma_i{}^2$（階級別分散）の積和としてあたえられる級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2$ と②$\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$ をウェイトとする（${}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i{}^2$）（総分散と階級別分散の差）の積和としてあたえられる級間変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i{}^2)$ に分解される。

(2) 2時点間における総分散の差の分解

これまでと同様に，基準時点における総分散を ${}^0\sigma^2$ とおく。また，比較時点における総分散を ${}^t\sigma^2$ とおく。このとき，それぞれの分散は次のようになる。

$$\begin{cases} {}^0\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i{}^2) \\ {}^t\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i{}^2) \end{cases}$$

2時点間の差を

$$\varDelta^2 = {}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2 \tag{4}$$

とおく。この差を分解するにあたり，級内変動の差 $\varDelta_I^2$ と級間変動の差 $\varDelta_A^2$ に分けることにする。すなわち，

$$\varDelta^2 = \varDelta_I^2 + \varDelta_A^2 \tag{5}$$

とおく。この(5)式右辺の各項は，それぞれ，次のようになる。

$$\begin{cases} \varDelta_I^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2} \\ \qquad = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}\right) \\ \varDelta_A^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^tk_i}{{}^tN}\left({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\left({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2}\right) \end{cases} \tag{6}$$

級内変動の差 $\varDelta_I^2$ の数理的意味は明らかである。級間変動の差 $\varDelta_A^2$ は次のようにすれば，その含意を解明することができる。そこで，

$$\begin{cases} \frac{{}^0k_i}{{}^0N} = {}^0\lambda_i \\ \frac{{}^tk_i}{{}^tN} = {}^t\lambda_i \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} {}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2} = {}^0d_i^2 \\ {}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2} = {}^td_i^2 \end{cases} \tag{8}$$

とおく。また，

$$\begin{cases} {}^t\lambda_i = {}^0\lambda_i + \varDelta^0\lambda_i \\ {}^td_i^2 = {}^0d_i^2 + \varDelta^0d_i^2 \end{cases} \tag{9}$$

$$\therefore \begin{cases} \varDelta^0\lambda_i = {}^t\lambda_i - {}^0\lambda_i \\ \varDelta^0d_i^2 = {}^td_i^2 - {}^0d_i^2 \end{cases} \tag{9$'$}$$

とおく。(7)式，(8)式，(9)式により，(6)式に示した $\varDelta_A^2$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varDelta_A^2 &= \sum_{i=1}^{m} {}^t\lambda_i \cdot {}^td_i^2 - \sum_{i=1}^{m} {}^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} ({}^0\lambda_i + \varDelta^0\lambda_i)({}^0d_i^2 + \varDelta^0d_i^2) - \sum_{i=1}^{m} {}^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \{({}^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 + {}^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2 + \varDelta^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 + \varDelta^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2) - {}^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} ({}^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2 + \varDelta^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 + \varDelta^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left({}^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2 + \varDelta^0\lambda_i \cdot {}^0d_i^2 + \frac{\varDelta^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2}{2} + \frac{\varDelta^0\lambda_i \cdot \varDelta^0d_i^2}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left\{\varDelta^0d_i^2\left({}^0\lambda_i + \frac{1}{2}\varDelta^0\lambda_i\right) + \varDelta^0\lambda_i\left({}^0d_i^2 + \frac{1}{2}\varDelta^0d_i^2\right)\right\} \end{aligned}$$

上式に(9)′式を代入すると，次式を得る。

$$\begin{aligned} \varDelta_A^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left[({}^td_i^2 - {}^0d_i^2)\left\{{}^0\lambda_i + \frac{1}{2}({}^t\lambda_i - {}^0\lambda_i)\right\} + ({}^t\lambda_i - {}^0\lambda_i)\left\{{}^0d_i^2 + \frac{1}{2}({}^td_i^2 - {}^0d_i^2)\right\}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left\{({}^td_i^2 - {}^0d_i^2)\left(\frac{{}^t\lambda_i + {}^0\lambda_i}{2}\right) + ({}^t\lambda_i - {}^0\lambda_i)\left(\frac{{}^td_i^2 + {}^0d_i^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

さらに，この式に(7)式と(8)式を代入する。

$$\begin{aligned} \varDelta_A^2 &= \sum_{i=1}^{m}\left[\{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) + ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) + ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

(5)式，(6)式，(10)式により，(4)式は

$$\begin{aligned} \varDelta^2 &= {}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}\right) + \left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}\right) + \sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) + ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

(11)式右辺の第１項は級内変動を示している。級間変動の差 $\varDelta_A^2$ を分解して得られた(11)式右辺の第２項と第３項の数理的意味を考察する目的で，次のようにおく。

$$\Delta_A^{2\prime}=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right) \quad (12)$$

$$\Delta_A^{2\prime\prime}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\} \quad (13)$$

ここで仮に，階級内の個体数が全体に占める割合（シェア）にかんして，２つの時点で変動がなく，すべての階級において同一であるとすれば，すなわち，一般に

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}=\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$$

が成立するとすれば，

$$\begin{aligned}\Delta_A^{2\prime}&=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\\&=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\}\cdot\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\\\Delta_A^{2\prime\prime}&=0\end{aligned}$$

となる。このことは，階級内の個体数を基準時点に固定したとき（「構造的変化」がない場合）には，階級を構成する個体の数量的規定性にかんする変動

$$({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)$$

だけで，級間変動の差 Δ_A^2 が説明されることを意味する。したがって，$\Delta_A^{2\prime}$ は，級間変動を計測する指標と見なすことができる。ところが,「級間変動」という用語は，分解前の Δ_A^2 についてすでに用いている。そこで，この混同を回避する目的で，Δ_A^2 を広義の級間変動の指標とし，分解後の $\Delta_A^{2\prime}$ を狭義の級間変動の指標とした[2)]。

他方で，総分散と階級別分散の乖離が，どの階級についても時点を異にして同一であるとすれば，すなわち，一般に

$${}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2={}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2$$

が成立するとすれば，

$$\begin{aligned}\Delta_A^{2\prime}&=0\\\Delta_A^{2\prime\prime}&=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\}\\&=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\end{aligned}$$

となる。このことは，階級を構成する個体の数量的規定性を基準時点に固定したとき，級間変動の差 Δ_A が，階級内の個体数の変動（シェアの変化）

$$\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$$

だけで説明されることを意味する。したがって，$\Delta_A^{2\prime\prime}$ は，系列の「構造的変化」を計測する指標と見なすことができる。

２．総標準偏差

⑴　総標準偏差の分解

基準時点（0）の総標準偏差を ${}^0\sigma$ とおく。

$${}^0\sigma\equiv{}^0\sigma$$

は恒等的に成立するので，

$$\begin{aligned}{}^0\sigma&={}^0\sigma\\&={}^0\sigma-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+{}^0\sigma-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+{}^0\sigma\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0N-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+{}^0\sigma\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i\\&\qquad\left(\because\quad {}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\right)\end{aligned}$$

２）木村（2009），p.153。

ここに，${}^0\sigma_i$ は，系列が m 個の階級に分類されるときの，第 i 階級の標準偏差である。

となる。これをさらに整理すれば，次のようになる。

$$
\begin{aligned}
{}^0\sigma &= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}{}^0\sigma\cdot\frac{1}{{}^0N}\cdot{}^0k_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

⒁式右辺の第１項は級内変動の指標である。他方で，第２項は級間変動の指標である。すなわち，基準時点の総標準偏差 ${}^0\sigma$ は，①階級内の個体数の構成比（シェア）$\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$ をウェイトとする ${}^0\sigma_i$（階級別標準偏差）の積和としてあたえられる級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i$ と②$\frac{{}^0k_i}{{}^0N}$ をウェイトとする$({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$（総標準偏差と階級別標準偏差の差）の積和としてあたえられる級間変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$に分解される。

⑵　２時点間における総標準偏差の差の分解（その１）

これまでと同様に，基準時点における総標準偏差を ${}^0\sigma$ とおく。また，比較時点における総標準偏差を ${}^t\sigma$ とおく。このとき，それぞれの標準偏差は次のようになる。

$$
\begin{cases}
{}^0\sigma=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i) \\
{}^t\sigma=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)
\end{cases}
$$

２時点間の差をとり，

$$\varDelta={}^t\sigma-{}^0\sigma \qquad (15)$$

と書くことにする。この差を分解するにあたり，級内変動の差 $\varDelta_I$ と級間変動の差 $\varDelta_A$ に分けることにする。すなわち，

$$\varDelta=\varDelta_I+\varDelta_A \qquad (16)$$

とおく。⒃式右辺の各項は，それぞれ，次のようになる。

$$
\begin{cases}
\varDelta_I=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i \\
\quad=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i\right) \\
\varDelta_A=\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)
\end{cases} \qquad (17)
$$

級内変動の差 $\varDelta_I$ の数理的意味は明らかである。級間変動の差 $\varDelta_A$ は次のようにすれば，その含意を解明することができる。

$$
\begin{cases}
\frac{{}^0k_i}{{}^0N}={}^0\lambda_i \\
\frac{{}^tk_i}{{}^tN}={}^t\lambda_i
\end{cases} \qquad (7)［再掲］
$$

$$
\begin{cases}
{}^0\sigma-{}^0\sigma_i={}^0d_i \\
{}^t\sigma-{}^t\sigma_i={}^td_i
\end{cases} \qquad (18)
$$

とおき，さらに，

$$
\begin{cases}
{}^t\lambda_i={}^0\lambda_i+\varDelta^0\lambda_i \\
{}^td_i={}^0d_i+\varDelta^0d_i
\end{cases} \qquad (19)
$$

$$
\therefore \begin{cases}
\varDelta^0\lambda_i={}^t\lambda_i-{}^0\lambda_i \\
\varDelta^0d_i={}^td_i-{}^0d_i
\end{cases} \qquad (19)'
$$

とおく。⑺式，⒅式，⒆式により，⒄式の$\varDelta_A$は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\varDelta_A&=\sum_{i=1}^{m}{}^t\lambda_i\cdot{}^td_i-\sum_{i=1}^{m}{}^0\lambda_i\cdot{}^0d_i \\
&=\sum_{i=1}^{m}({}^0\lambda_i+\varDelta^0\lambda_i)({}^0d_i+\varDelta^0d_i)-\sum_{i=1}^{m}{}^0\lambda_i\cdot{}^0d_i \\
&=\sum_{i=1}^{m}\{({}^0\lambda_i\cdot{}^0d_i+{}^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i+\varDelta^0\lambda_i\cdot{}^0d_i+\varDelta^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i)-{}^0\lambda_i\cdot{}^0d_i\} \\
&=\sum_{i=1}^{m}({}^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i+\varDelta^0\lambda_i\cdot{}^0d_i+\varDelta^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i) \\
&=\sum_{i=1}^{m}\left({}^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i+\varDelta^0\lambda_i\cdot{}^0d_i+\frac{\varDelta^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i}{2}+\frac{\varDelta^0\lambda_i\cdot\varDelta^0d_i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{\varDelta^0 d_i\left({}^0\lambda_i+\frac{1}{2}\varDelta^0\lambda_i\right)+\varDelta^0\lambda_i\left({}^0d_i+\frac{1}{2}\varDelta^0 d_i\right)\right\}$$

上式に(19)′式を代入すると，次式を得る。

$$\varDelta_A=\sum_{i=1}^{m}\left[({}^t d_i-{}^0 d_i)\left\{{}^0\lambda_i+\frac{1}{2}({}^t\lambda_i-{}^0\lambda_i)\right\}+({}^t\lambda_i-{}^0\lambda_i)\left\{{}^0 d_i+\frac{1}{2}({}^t d_i-{}^0 d_i)\right\}\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t d_i-{}^0 d_i)\left(\frac{{}^t\lambda_i+{}^0\lambda_i}{2}\right)+({}^t\lambda_i-{}^0\lambda_i)\left(\frac{{}^t d_i+{}^0 d_i}{2}\right)\right\}$$

さらに，この式に(7)式と(18)式を代入する。

$$\varDelta_A=\sum_{i=1}^{m}\left[\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)+\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\}\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\} \quad (20)$$

したがって，(16)式，(17)式，(20)式によって

$$\varDelta={}^t\sigma-{}^0\sigma \quad (15)[再掲]$$

は次のようになる。

$$\varDelta={}^t\sigma-{}^0\sigma$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}{}^t\sigma_i-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}{}^0\sigma_i\right)+\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^t k_i}{{}^t N}({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}{}^t\sigma_i-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}{}^0\sigma_i\right)+\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\} \quad (21)$$

(21)式右辺の第１項は級内変動を示す。級間変動の差 $\varDelta_A$ を分解して得られた(21)式右辺の第２項と第３項の数理的意味を考察する目的で，次のようにおく。

$$\varDelta_A'=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right) \quad (22)$$

$$\varDelta_A''=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^t k_i}{{}^t N}-\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)+({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)}{2}\right\} \quad (23)$$

ここで仮に，階級内の個体数が全体に占める割合（シェア）にかんして，２つの時点で変動がなく，すべての階級において同一であるとすれば，すなわち，一般に

$$\frac{{}^t k_i}{{}^t N}=\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}$$

が成立するとすれば，

$$\varDelta_A'=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^t k_i}{{}^t N}+\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}}{2}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)\}\cdot\frac{{}^0 k_i}{{}^0 N}$$
$$\varDelta_A''=0$$

となる。このことは，階級内の個体数を基準時点に固定したとき（「構造的変化」がない場合）に，階級を構成する個体の数量的規定性にかんする変動

$$({}^t\sigma-{}^t\sigma_i)-({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$$

だけで，級間変動の差 $\varDelta_A$ が説明されることを意味する。このために，$\varDelta_A'$ は，級間変動を計測する指標と見なすことができる。ところが，「級間変動」という用語は，分解前の $\varDelta_A$ にたいしてすでに用いている。そこで，この混同を回避する目的で，「１．(2) 2 時点間における総分散の差の分解（その１）」における叙述を踏襲して，ここでも広義の級間変動と狭義の級間変動という用語を使用する。そして，①分解前の級間変動を広義の級間変動と②分解によって析出された級間変動を狭義の級間変動と言うことにする。

次に，総標準偏差と階級別標準偏差の乖離が，どの階級についても時点を異にして同一である場合，すなわち，一般に

$${}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_i={}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_i$$

が成立する場合を考察する。このときには，

$$\varDelta_A'=0$$
$$\varDelta_A''=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{({}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_i)+({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_i)}{2}\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)({}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_i)$$
$$(\because\quad {}^{t}\sigma-{}^{t}\sigma_i={}^{0}\sigma-{}^{0}\sigma_i)$$

となる。このことは，階級を構成する個体の数量的規定性を基準時点に固定したとき，級間変動の差 $\varDelta_A$ が，階級内の個体数の変動（シェアの変化）

$$\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}$$

だけで説明されることを意味する。したがって，$\varDelta_A''$ は，系列の「構造的変化」を計測する指標と見なすことができる。

⑶ 2時点間における総標準偏差の差の分解（その2）

2時点間における総標準偏差の差（$\varDelta={}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$）にかんする分解式は次のようにしても導出することができる。2時点間における総分散の差を示す

$$\varDelta^2={}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2 \qquad (4)[再掲]$$

の右辺を因数分解すれば，

$${}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2=({}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma)({}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma)$$

となり，これを整理すれば，

$${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}({}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2)$$
$$=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\cdot\varDelta^2$$

となる。この式に

$$\varDelta^2={}^{t}\sigma^2-{}^{0}\sigma^2$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_i^2-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i^2\right)+\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_i^2-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i^2\right)+\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)-({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}}{2}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)+({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)}{2}\right\} \qquad (11)[再掲]$$

を代入すれば，2時点間における総標準偏差の差にかんする分解式として次式を得る。

$${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_i^2-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i^2\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_i^2-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i^2\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)-({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)\right\}\left(\frac{\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}+\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}}{2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{{}^{t}\sigma+{}^{0}\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}-\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}\right)\left\{\frac{({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)+({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)}{2}\right\}\right] \qquad (24)$$

3．分解式と数値例

⑴ 分解式

これまでの検討で誘導した分解式を表にまとめると，次のようになる（表1～6）。

⑵ 数値例

以下に表章した数値例（表7～9）に，上述の分解式（表1～6）を応用する[3]。

表1　総分散の分解式 ―― ⑶式 ――

	総分散	級内変動	級間変動
基準時点	${}^{0}\sigma^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}{}^{0}\sigma_i^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{0}k_i}{{}^{0}N}({}^{0}\sigma^2-{}^{0}\sigma_i^2)$
比較時点	${}^{t}\sigma^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}{}^{t}\sigma_i^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^{t}k_i}{{}^{t}N}({}^{t}\sigma^2-{}^{t}\sigma_i^2)$

表 2　総分散の差の分解式（その 1）―― 級間変動の分解前：⑹式 ――

総分散の差	級内変動	広義の級間変動
${}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})$

表 3　総分散の差の分解式（その 2）―― 級間変動の分解後：⑾式 ――

総分散の差	級内変動	狭義の級間変動	構造的変化
${}^t\sigma^2 - {}^0\sigma^2$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}$	$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$	$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) + ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\}$

表 4　総標準偏差の分解式 ―― ⒁式 ――

	総標準偏差	級内変動	級間変動
基準時点	${}^0\sigma$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma - {}^0\sigma_i)$
比較時点	${}^t\sigma$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma - {}^t\sigma_i)$

表 5　総標準偏差の差の分解式（その 1）―― 級間変動の分解前 ――

総標準偏差の差	数式	級内変動	広義の級間変動
${}^t\sigma - {}^0\sigma$	⒄式	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma - {}^t\sigma_i) - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma - {}^0\sigma_i)$
	⒇式	$\frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}\right)\right\}$	$\frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\right\}$

表 6　総標準偏差の差の分解式（その 2）―― 級間変動の分解後 ――

総標準偏差の差	数式	級内変動	狭義の級間変動	構造的変化
${}^t\sigma - {}^0\sigma$	㉑式	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i - \sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$	$\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma - {}^t\sigma_i) - ({}^0\sigma - {}^0\sigma_i)\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$	$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma - {}^t\sigma_i) + ({}^0\sigma - {}^0\sigma_i)}{2}\right\}$
	㉔式	$\frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i^{\,2} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i^{\,2}\right)\right\}$	$\frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) - ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN} + \frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\right]$	$\frac{1}{{}^t\sigma + {}^0\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN} - \frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2 - {}^t\sigma_i^{\,2}) + ({}^0\sigma^2 - {}^0\sigma_i^{\,2})}{2}\right\}\right]$

4．計算例

⑴　要因分解

①　総分散

表 7 ～ 9 の数値例にかんして表 1 に記載した統計量（総分散の分解）をもとめれば，次のようになる（表 10）。

3）数値例は，木村（2009）所載の表 4（p.150），7（p.157），8（同）に同じ。ただし，適宜，関連数値を加えた。

表 7　基準時点のデータ

階級	階級別個体データ					個体比率	階級別平均	階級別分散	総分散
1	60	65	69	73	75	0.25	68.4	29.44	70.13
2	51	53	55	59	62	0.25	56.0	16.00	
3	48	49	53	60	65	0.25	55.0	42.80	
4	46	47	50	53	60	0.25	51.2	25.64	

（出所）森博美「分散分析」，近昭夫・木村和範・森博美編『演習　統計［改訂版］』産業統計研究社，1985 年，第 15 章，p.30 にもとづく。ただし，表示の仕方に手を加えた。

表 8　比較時点のデータ（その 1）—— ケース I ——

階級	階級別個体データ					個体比率	階級別平均	階級別分散	総分散
1	60	65	69	73	75	0.2	68.4	29.44	142.15
2	51	53	55	59	62	0.4	56.0	16.00	
	51	53	55	59	62				
3	48	49	53	60	65	0.2	55.0	42.80	
4	20	30	40	50	60	0.2	40.0	200.00	

表 9　比較時点のデータ（その 2）—— ケース II ——

階級	階級別個体データ					個体比率	階級別平均	階級別分散	総分散
1	60	65	69	73	75	0.2	68.4	29.44	214.03
2	51	53	55	59	62	0.2	56.0	16.00	
3	48	49	53	60	65	0.2	55.0	42.80	
4	20	30	40	50	60	0.4	40.0	200.00	
	20	30	40	50	60				

表 10　総分散の分解

		総分散 ${}^*\sigma^2$	級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^*k_i}{{}^*N}{}^*\sigma_i^2$	級間変動 $\sum_{i=}^{m}\frac{{}^*k_i}{{}^*N}({}^*\sigma^2-{}^*\sigma_i^2)$
基準時点（＊＝0）		70.13	28.4700	41.6600
比較時点（＊＝t）	ケース I	142.15	60.8480	81.3020
	ケース II	214.03	97.6480	116.3820

（注記）計算式は表 1 による。

表 7 ～ 9 の数値例にかんして表 2 に記載した統計量（総分散の差の変動要因別分解，ただし，級間変動分解前）をもとめれば，ケース I と II は次頁のようになる（表 11）。

表 11　総分散の差の分解（その 1）―― 級間変動の分解前 ――

	総分散の差 $^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$	級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2$	広義の級間変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)$
ケース I	72.0200	32.3780	39.6420
ケース II	143.9000	69.1780	74.7220

（注記）計算式は表 2 による。

表 12　総分散の差の分解式（その 2）―― 級間変動の分解後 ――

	総分散の差 $^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$	級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{^tk_i}{^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{^0k_i}{^0N}{}^0\sigma_i{}^2$	狭義の級間変動 $\sum_{i=1}^{m}\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)\}\left(\frac{\frac{^tk_i}{^tN}+\frac{^0k_i}{^0N}}{2}\right)$	構造的変化 $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{^tk_i}{^tN}-\frac{^0k_i}{^0N}\right)\left\{\frac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i{}^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)}{2}\right\}$
ケース I	72.0200	32.3780	32.7890	6.8530
ケース II	143.9000	69.1780	87.2330	−12.5110

（注記）計算式は表 3 による。

表 13　総標準偏差の分解

		総標準偏差 $^*\sigma$	級内変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{^*k_i}{^*N}{}^*\sigma_i$	級間変動 $\sum_{i=1}^{m}\frac{^*k_i}{^*N}({}^*\sigma-{}^*\sigma_i)$
基準時点（＊＝0）		8.3744	5.2579	3.1165
比較時点（＊＝t）	ケース I	11.9227	6.8220	5.1006
	ケース II	14.6298	8.8505	5.7793

（注記）計算式は表 4 による。

表 14　総標準偏差の差の分解（その 1）―― 級間変動の分解前 ――

	総標準偏差の差	数式	級内変動	広義の級間変動
ケース I	3.5483	⑵1式	1.5641	1.9842
		⑵4式	1.5952	1.9531
ケース II	6.2554	⑵1式	3.5926	2.6628
		⑵4式	3.0072	3.2482

（注記）計算式は表 5 による。

同様に，級間変動の分解後にかんするケースごとの計算結果は上のようになる(表 12)。

②　総標準偏差

表 7 ～ 9 の数値例にかんして表 4 に記載した統計量（総標準偏差の分解）をもとめれば，上のようになる（表 13)。

表 7 ～ 9 の数値例にかんして表 5 に記載した統計量(総標準偏差の差の変動要因別分解，ただし，級間変動分解前）をもとめれば，ケース I と II は上のようになる（表 14)。

表 7 ～ 9 の数値例にかんして表 6 に記載し

表 15　総標準偏差の差の分解式（その 2）―― 級間変動の分解後 ――

ケース	総標準偏差の差	数式	級内変動	狭義の級間変動	構造的変化
I	3.5483	⑵式	1.5641	1.5056	0.4785
		⑵式	1.5952	1.6155	0.3376
II	6.2554	⑵式	3.5926	3.3049	−0.6420
		⑵式	3.0072	3.7921	−0.5439

（注記）計算式は表 6 による。

表 16　2 時点間における差の寄与度 ―― 総分散 ――

			ケースⅠ		ケースⅡ	
総分散の増加率（%）			102.69		205.19	
寄与度	級内変動		46.17		98.64	
	広義の級間変動	狭義の級間変動	56.52	46.75	106.55	124.39
		構造的変化		9.77		−17.84

表 17　総分散の差にたいする寄与率（%）

		ケースⅠ		ケースⅡ	
級内変動		44.96		48.07	
広義の級間変動	狭義の級間変動	55.04	45.53	51.93	60.62
	構造的変化		9.52		−8.69
（参考）$^{t}\sigma^{2}-{}^{0}\sigma^{2}$		100.00		100.00	

（注記）表 11，12 参照。

た統計量（総標準偏差の差の変動要因別分解，ただし，級間変動分解後）をもとめれば，ケースⅠとⅡは上のようになる（表 15）。

⑵　寄与度・寄与率

①　総分散

総分散の増加分（$^{t}\sigma^{2}-{}^{0}\sigma^{2}$）[4] ――72.02（ケースⅠ），143.90（ケースⅡ）―― は基準時点の総分散（$^{0}\sigma^{2}=70.13$）[5] のどれだけに当たるかを示す割合が，総分散の増加率である。これは，それぞれ，102.69%（ケースⅠ），205.19%（ケースⅡ）である。この増加率を，要因別（①級内変動，②広義の級間変動（②′ 狭義の級間変動，②″ 構造的変化））の増加分[6] で案分すれば，要因別の寄与度をもとめることができる（表 16）。

また，それぞれの要因が総分散の増加分にたいして果たす寄与分（寄与率）をもとめることもできる。この寄与分は，総分散の増加分のなかに占めるそれぞれの寄与分の割合である。これを計算すれば，上のようになる（表 17）。

②　総標準偏差

総標準偏差の増加分（$^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$）[7] ――

4）表 11 参照。
5）表 10 参照。
6）表 11，12 参照。
7）表 14 参照。

表 18　2 時点間における差の寄与度 ―― 総標準偏差 ――

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">ケースⅠ</td><td colspan="2">ケースⅡ</td></tr>
<tr><td colspan="3">総標準偏差の増加率（%）</td><td colspan="2">42.37</td><td colspan="2">74.70</td></tr>
<tr><td rowspan="3">寄与度</td><td colspan="2">級内変動</td><td colspan="2">18.68</td><td colspan="2">42.90</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">23.69</td><td>17.98</td><td rowspan="2">31.80</td><td>39.47</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>5.71</td><td>−7.67</td></tr>
</table>

表 19　総標準偏差の差にたいする寄与率（%）

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">ケースⅠ</td><td colspan="2">ケースⅡ</td></tr>
<tr><td colspan="2">級内変動</td><td colspan="2">44.08</td><td colspan="2">57.43</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">55.92</td><td>42.43</td><td rowspan="2">42.57</td><td>52.83</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>13.49</td><td>−10.26</td></tr>
<tr><td colspan="2">（参考）${}^{t}\sigma-{}^{0}\sigma$</td><td colspan="2">100.00</td><td colspan="2">100.00</td></tr>
</table>

（注記）表 14，15 参照。

3.5483（ケースⅠ），6.2554（ケースⅡ）―― は基準時点の総標準偏差（${}^{0}\sigma$=8.3744）[8] のどれだけに当たるかを示す割合が，総標準偏差の増加率である。これは，それぞれ，42.37%（ケースⅠ），74.70%（ケースⅡ）である。表 16 を作成したときと同様に，この増加率を，要因別の増加分[9] で案分すれば，要因別の寄与度をもとめることができる（表 18）。

次に，それぞれの要因（①級内変動，②広義の級間変動（②′ 狭義の級間変動，②″ 構造的変化））が，総標準偏差の増加分にたいして果たす寄与分（寄与率）をもとめる。この寄与分は，総標準偏差の増加分に占めるそれぞれの寄与分の割合である。これを計算すれば，上のようになる（表 19）。

上に掲げた表 18 と表 19 に表章した数値は，(17)式と(21)式を用いてもとめた数値にもとづく。(24)式による数値についても同様の計算によって，要因別にかんする異なった値の寄与度・寄与率がもとめられるが，本稿ではそれは表章していない。

お わ り に

本稿は，本誌前号掲載の拙稿とは別の仕方で，①総分散，②総分散の差（②′ 級間変動分解前，②″ 級間変動分解後），③総標準偏差，④総標準偏差の差（④′ 級間変動分解前，④″ 級間変動分解後）の 4 種類について，分解式を誘導した。前号で採った方法では，総標準偏差の分解式を誘導できないので，それについては比較できない。しかし，上記の分解のうち，①，②，④については，前号と同一の数値例に適用した結果を比較することができる。本稿を終えるにあたって，以下でそのことを考察する。そのために，計算結果を要約する。

① 総分散については，総分散，級内変動，級間変動のいずれにおいても，丸め誤差を考慮すれば，計算結果は一致していると見ることができる（表 20）（計算式の対照には付表 1 参照）。

8）表 13 参照。
9）表 14，15 参照。

表 20　総分散，級内変動，級間変動にかんする計算結果の対照表

			総分散	級内変動	級間変動
基準時点		(3)式*	70.13	28.47	41.66
		表 9**	70.13	28.40	41.73
比較時点	ケース I	(3)式*	142.15	60.85	81.30
		表 9**	142.15	60.85	81.31
	ケース II	(3)式*	214.03	97.65	116.38
		表 9**	214.03	97.65	116.38

＊ 数値は本稿における表 10 による。
＊＊ 木村（2009），p.158。

表 21　総分散の差，級内変動，級間変動にかんする計算結果の対照表

			総分散の差	級内変動	級間変動
比較時点－基準時点	ケース I	(6)式*	72.02	32.38	39.64
		表 10**	72.03	32.45	39.58
	ケース II	(6)式*	143.90	69.18	74.72
		表 10**	143.90	69.25	74.65

＊ 数値は本稿における表 11 による。
＊＊ 木村（2009），p.158。

表 22　狭義の級間変動と構造的変化にかんする計算結果の対照表 ―― 総分散の差 ――

		狭義の級間変動	構造的変化
ケース I	(11)式*	32.80	6.85
	表 10**	53.54	－13.96
ケース II	(11)式*	87.23	－12.51
	表 10**	71.57	3.08

＊ 数値は本稿における表 12 による。
＊＊ 木村（2009），p.158。

② 総分散の差については，次のようになった。すなわち，

②′ 級間変動の分解前については，総変動の差，級内変動の差，広義の級間変動のいずれについても同様に丸め誤差を考慮すれば，計算結果は一致している（表 21）（計算式の対照には付表 3 参照）。

②″ 級間変動の分解後については，当然ながら，総変動の差，級内変動の差について，計算結果は一致している（前項参照）。しかし，狭義の級間変動と構造的変化については，計算結果は一致しない（表 22）（計算式の対照には付表 3 参照）。

③ 総標準偏差については比較できない（計算式については付表 2 参照）。

④ 総標準偏差の差については，次頁に示すように（表 23），分解前の「総標準偏差の差」そのものについては，結果数字は同一である。しかし，分解された諸要因について比較してみると，すべての計算式が同一の値をあたえるとは限らないことが分かる（計算式の対照には付表 4 参照）。

以上の確認にもとづいて，次のように述べることができる。

① 総分散を時点ごとに取り上げ，それぞ

表 23　級内変動，広義の級間変動，狭義の級間変動，構造的変化にかんする計算結果の対照表 ── 総標準偏差の差 ──

		総標準偏差の差	級内変動	広義の級間変動	狭義の級間変動	構造的変化
ケースⅠ	⑵1式*	**3.55**	1.56	1.98	1.51	0.48
	⑵4式*	**3.55**	1.60	1.95	1.62	0.34
	表 13**	**3.55**	1.60	1.95	2.64	－0.69
ケースⅡ	⑵1式*	**6.26**	3.59	2.66	3.30	－0.64
	⑵4式*	**6.26**	3.01	3.25	3.79	－0.54
	表 13**	**6.26**	3.01	3.25	3.11	0.13

＊ 数値は本稿における表 14，15 による。
＊＊ 木村（2009），p.162。

れの総分散を級内変動と級間変動に分解するときには，いずれの分解式でも同じ値をあたえる。

② 時点別の標準偏差を別々に取り上げ，それぞれの総標準偏差を級内変動と級間変動に分解するときには，前号による方法では分解式が誘導できず，標準偏差にかんしては，さしあたり，本稿で誘導した分解式の応用が考えられる。

③ 総分散の差の要因分解を級内変動といわゆる広義の級間変動に分解するときには，本稿で導出した分解式と前号の分解式は同じ値をあたえる。

④ 総分散の差の要因分解において，広義の級間変動をさらに⑴狭義の級間変動と⑵構造的変化に分解するときには，上記の 2 種類の分解式のどれを採用するかによって，それぞれの変動の大きさは異なる。

⑤ 総標準偏差の差の要因分解にかんして，本稿では 2 種類の分解式を誘導した。そして，この 2 種類の分解式ならびに前号で導出した分解式を同一の数値例に応用してみた。その結果，「総標準偏差の差」の値はいずれも同一となるが，その差を⑴級内変動，⑵広義の級間変動，⑶狭義の級間変動，⑷構造的変化に分解したときには，すべての要因について同一の値があたえられるとは限らなかった。

＊　　＊　　＊　　＊

総標準偏差は総分散と同様に分布の散布度の尺度である。また，総標準偏差の差にかんする分解式も，分散の差にかんする分解式と同様に，散布度の変化を計測するための指標たりうる。総標準偏差の差の分解式を誘導したところ，少なくとも 3 種類があって，そのいずれもが数学的には無矛盾であり，その意味ではそれぞれの分解式に優劣をつけることはできない。ところが，それらの分解式は要因別の寄与の大きさとして同じ値をあたえるとは限らない。分解式を適用した結果数字の不一致は，それぞれの要因の寄与の規模の違いがその符号だけでなく，その絶対値の相違となって表出する。このために，総標準偏差の差の要因別の寄与を計測したとされるそれぞれの数値の解釈については，慎重であることがもとめられる。

これにたいして，総分散の差の分解式にか

んしては，その差を，①級内変動と②広義の級間変動に分解した場合には，得られる結果数字に差異がない。このため，結果数字の解釈をめぐる問題が生ずる余地はない。ところが，総分散の差の変動に寄与するとされる「広義の級間変動」をさらに①狭義の級間変動と②構造的変化に分解するときには，採用する分解式によって異なった値があたえられる。このことは，総標準偏差の差の要因分解式を適用したときと同様に，総分散の差の要因分解式の適用においても，結果数字にたいする解釈には慎重であることがもとめられることを示唆している。

付表 1．総分散（基準時点）の分解にかんする数式の対照表

	(3)式	(8)式*
総分散	σ_0^2	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}$
級内変動	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$
級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i{}^2)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}$

＊　木村（2009），p.150。ただし，(8)式は(3)式と(4)式（同，p.147）にもとづく。

付表 2．総標準偏差（基準時点）の分解にかんする数式の対照表

	(14)式	表 9*
総標準偏差	$\sqrt{\sigma_0{}^2}$	$\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}}$
級内変動	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i$	――
級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma-{}^0\sigma_i)$	――

＊　木村(2009)，p.158。ただし，この式は付表 1（本稿）の(8)式にもとづく。

付表 3．分散の差にかんする数式の対照表

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">(11)式</td><td colspan="2">(18)式・(19)式*</td></tr>
<tr><td colspan="2">総分散の差</td><td colspan="2">$^t\sigma^2-{}^0\sigma^2$</td><td colspan="2">$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\ldots\ldots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{\overline{{}^tx}})^2}{{}^tN}-\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{{}^0N}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">級内変動</td><td colspan="2">$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}\,{}^t\sigma_i{}^2-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\,{}^0\sigma_i{}^2$</td><td colspan="2">$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\ldots\ldots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\ldots\ldots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">広義の級間変動</td><td>狭義の級間変動</td><td rowspan="2">$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)$</td><td>$\sum_{i=1}^{m}\left\{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)-({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)\right\}\left(\dfrac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$</td><td rowspan="2">$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2$</td><td>$\sum_{i=1}^{m}\left\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}\left(\dfrac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>構造的変化</td><td>$\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}-\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\dfrac{({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2)+({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2)}{2}\right\}$</td><td>$\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{{}^tk_i}{{}^tN}-\dfrac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\dfrac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}$</td></tr>
</table>

＊　木村（2009），p.154。

付表 4．総標準偏差の差の要因分解にかんする数式の

差		${}^t\sigma-{}^0\sigma$			
数式		⑵1式		⑵4式	
級内変動		$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i$		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}{}^t\sigma_i{}^2-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}{}^0\sigma_i{}^2\right)\right\}$	
広義の級間変動	狭義の級間変動	$\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\left({}^t\sigma-{}^t\sigma_i\right)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\left({}^0\sigma-{}^0\sigma_i\right)$	$\sum_{i=1}^{m}\left\{\left({}^t\sigma-{}^t\sigma_i\right)-\left({}^0\sigma-{}^0\sigma_i\right)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)$	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)\right\}$	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left\{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)-\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)\right\}\left(\frac{\frac{{}^tk_i}{{}^tN}+\frac{{}^0k_i}{{}^0N}}{2}\right)\right\}$
	構造的変化		$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left({}^t\sigma-{}^t\sigma_i\right)+\left({}^0\sigma-{}^0\sigma_i\right)}{2}\right\}$		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{\left({}^t\sigma^2-{}^t\sigma_i^2\right)+\left({}^0\sigma^2-{}^0\sigma_i^2\right)}{2}\right\}\right]$

＊　木村（2009），p.162。広義の級間変動については⒅式（同，p.154）にもとづく。

［訂正：拙稿「分散と標準偏差の分解」『開発論集』第 83 号，2009 年 3 月］

1．p.147 f.，⑹式［訂正箇所は　　の部分である。］

$$\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left\{\left(\overline{{}^0x_i}\right)^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\cdot\overline{{}^0x_i}-\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{{}^0x_i}\right)^2-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\cdot\overline{{}^0x_i}+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{\overline{{}^0x}}\right)^2$$

$$=\underline{\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{{}^0x_i}\right)^2}-2\cdot\overline{\overline{{}^0x}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\overline{{}^0x_i}\right)^2-2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2$$

$$=\underline{\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{j=1}^{{}^0ki}{}^0x_{ij}}{{}^0k_i}\right)^2}-2\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{\mathrm{ij}}\right)^2}{{}^0N}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2$$

（次頁に続く）

対照表

差		
数式	(26)式*	
級内変動	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^tk_1,{}^tk_2,\cdots\cdots,{}^tk_m}({}^tx_{ij}-\overline{{}^tx_i})^2}{{}^tN}-\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots\cdots,{}^0k_m}({}^0x_{ij}-\overline{{}^0x_i})^2}{{}^0N}\right\}$	
広義の級間変動	$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^tk_i}{{}^tN}(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-\sum_{i=1}^{m}\frac{{}^0k_i}{{}^0N}(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\right\}$	
狭義の級間変動		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left\{\sum_{i=1}^{m}\{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2-(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2\}\left(\frac{\frac{{}^0k_i}{{}^0N}+\frac{{}^tk_i}{{}^tN}}{2}\right)\right\}$
構造的変化		$\frac{1}{{}^t\sigma+{}^0\sigma}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{{}^tk_i}{{}^tN}-\frac{{}^0k_i}{{}^0N}\right)\left\{\frac{(\overline{{}^tx_i}-\overline{\overline{{}^tx}})^2+(\overline{{}^0x_i}-\overline{\overline{{}^0x}})^2}{2}\right\}\right]$

$$
=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i\left(\frac{\sum_{j=1}^{{}^0ki}{}^0x_{ij}}{{}^0k_i}\right)^2-2\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}
+{}^0N\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}}{{}^0N}\right)^2
$$

$$
=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0ki}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0k_i}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}={}^0V_A \tag{6}
$$

2．p.149，表 3　級間変動の ${}^0V_A$ のための計算表（⑹式）

階級	変量	個数	階級別合計		
1	${}^0x_{11}\ \ {}^0x_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots {}^0x_{1{}^0k_1}$	${}^0k_1$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_1}{}^0x_{1j}\right)^2}{k_1}$
2	${}^0x_{21}\ \ {}^0x_{22}\ \ \cdots\cdots\ {}^0x_{2{}^0k_2}$	${}^0k_2$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_2}{}^0x_{2j}\right)^2}{k_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	${}^0x_{i1}\ \ {}^0x_{i2}\cdots\cdots\cdots {}^0x_{i{}^0k_i}$	${}^0k_i$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2}{k_i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	${}^0x_{m1}\ \ {}^0x_{m2}\cdots\cdots\cdots {}^0x_{m{}^0k_m}$	${}^0k_m$	$\sum_{j=1}^{{}^0k_m}{}^0x_{mj}$	$\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_m}{}^0x_{mj}\right)^2$	$\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_{im}}{}^0x_{mj}\right)^2}{k_m}$
総合計	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}$	${}^0N=\sum_{i=1}^{m}{}^0k_i$			$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2}{k_i}$
	$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2$				
	$\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}{}^0x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$				
${}^0V_A$	$\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2}{k_i}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}x_{ij}\right)^2}{{}^0N}$		参考* ${}^0V_I$	${}^0V_T-{}^0V_A$	
参考 $\dfrac{{}^0V_A}{{}^0N}$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{{}^0k_i}{}^0x_{ij}\right)^2}{k_i}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{{}^0k_1,{}^0k_2,\cdots,{}^0k_m}x_{ij}\right)^2}{{}^0N}}{{}^0N}$		参考* $\dfrac{{}^0V_I}{{}^0N}$	$\dfrac{{}^0V_T}{{}^0N}-\dfrac{{}^0V_A}{{}^0N}$	

＊${}^0V_T$ は表 2 でもとめた。

（注記）⑹式の訂正（②）に伴い，関連箇所を訂正した（網かけ部分）。