タイトル	パレート指数とその数学的含意
著者	木村，和範
引用	季刊北海学園大学経済論集，52(4)：51-65
発行日	2005-03-25

《論説》

パレート指数とその数学的含意

木　村　和　範

はじめに

ヴィルフレド・パレートは，その源泉を問わず家計に入る一切の収入を合計した世帯所得を「総合所得」(以下，所得）と言った。ここで，所得をxで表し，所得がx以上となる世帯数を$N(x)$で表す[1]。このとき，彼は，所得分布を関数

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \qquad (1)$$

Hとαはパラメータ。

で表すことができると考えた。この(1)式がいわゆるパレート法則（厳密にはパレートの第1法則）である。(1)式右辺のパラメータHとαは，データによってさまざまな値をとるが，とくに「べき」αは後にパレート指数と呼ばれるようになった。パレートは指数αによって，所得分布の時空的比較が可能であると考えて，その手始めに，イギリスの所得分布データ（1843年と1879—1880年）にコーシーの補間法を適用して，

$$\alpha_{1843}=-1.498$$
$$\alpha_{1879-80}=-1.353$$

ともとめた。一般に，パレート指数αは正の数で表され，パレートが上のようにαを負の数で表記しているのは，調べた限りでは，コーシーの補間法を簡単な数値によって例解した後でこの補間法をイギリスにおける所得分布データへ応用した論文[2]だけである。

本稿では，パレート指数の変動がどのような数理的な意味をもつか（パレート指数の数学的含意）について考察する。その際，慣例によってαを正の数として取り扱う。すでに早川三代治[3]や森田優三[4]が紹介している

1）人数でもよいが，以下では世帯数で統一する。

2）Pareto, Vilfredo, "Il modo di figurare i fenomeni economici (A proposito di un libro del dottor Fornasari)," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XII, 1896 ［以下 Pareto (1896)], pp.85ff.

3）早川三代治「我邦耕地の分配状態に就いて」『高岡熊雄教授在職三十五年記念論文集　農政と経済』1932年。ただし，引用は，早川『パレート法則による所得と財産の分布に関する研究』（早稲田大学に提出した学位請求論文）所載の「我邦耕地の分配状態」第5章（p.402f.）による。上記『研究』は1960年ころに刊行されたと考えられるが，刊行年月日が不詳のために，以下では，早川(＊)と略記する。

4）森田優三『国民所得の評価と分析』東洋経済新報社　1949年［以下，森田（1949)］, p.138f。

ように，αの解釈をめぐっては対立する2つの見解がある。ベニーニ説[5]（αの値が大きいほど，不平等度が弱まり，所得分布はより平等になる）が通説である。これによれば，イギリスでは不平等度が強まったことになる[6]。通説とは逆に，パレートはαの値が大きいほど不平等度が強まると考えた[7]。彼の解釈によれば，イギリスにおいては1843年に較べて1879—80年のほうでαが小さくなっている（1.498→1.353）ので，不平等度が弱まったことになるはずである。しかし，パレートは各国（各地域）のデータからαを計算し，その最低が1.24（バーゼル，1887年）で，最高が1.89（プロイセン，1852年）となったことにもとづいて，αが安定的であると主張した[8]。したがって，αの変動がイギリスに見られる程度の範囲に留まるのであれば，彼は，不平等度に著しい変化があったとは認めないであろう[9]。

本文で述べるように，パレート指数αの増大にたいする解釈としては通説が適切であるが，αの増大は，比較的高い所得を得る世帯の相対的減少（＝比較的低い所得を得る世帯の相対的増加）を随伴するとも言われている。このことは，パレート法則から演繹される1つの数学的帰結である。ただし，この帰結は一定の条件のもとでのみ成立する。この一定の条件については，寡聞のせいか，先行研究を見出すことができない。以下では，この条件が何であるかを考察し，パレート指数の含意を明らかにしたい。そのために，パレート指数の増大が所得分布の均等化傾向を意味するという通説を，旧聞に属すことではあるが，予備的考察もかねてあえて取り上げる。その後，上述の「条件」を検討して，パレート指数が所得分布の変化をどのように反映する指標であるかを考察する。叙述の順序は次のとおりである。

(1)　パレート指数の増大と所得格差の縮小

(2)　所得階級内世帯数の相対的増減とパ

5）①Benini, Rodolfo, “Di alcune curve descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XIV, 1897, p.178; ②ditto, “I diagrammi a scala logaritmica,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume XXX, 1905, p.227; ③ditto, “Principii di Statistica Metodologia,” *Biblioteca dell'Economista*, Volume XVIII, Dispensa 1ª, 1905, p.187f.

6）αの値が大きいほど，所得の不平等度が強まるという通説について，森田優三は，ブレシアーニ=チュッローニによる証明を紹介している（森田（1949），pp.142 ff); Bresciani-Turroni, Costantino, “On Pareto's Law,” *JRSS*, Vol.100, Pt. 3, 1937; ditto, “Annual Survey of Statistical Data: Pareto's Law and the Index of Inequality,” *Econometrica*, Vol.7, 1939)。

7）「h［パレート指数］の値の減少は，所得の不平等性が小さくなる傾向を示している」(Pareto, V., “La legge della domanda,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume X, 1895［以下Pareto（1895)］, p.61)。同様趣旨の主張はPareto, V., *Cours d'Économie Politique*, Tome Second, (Livre III. La répartition et la consommation), Lausanne 1897［以下Pareto（1897)］(Tome Premierは1896年刊行), p.312［イタリア語版は*Corso di Economia Politica*, (Libro Terzo. La ripartizione e il consume), Secondo Volume, Torino 1942［以下Pareto（1942)］(第1巻［Primo Volume］も刊行年は同じ), p. 344］にも見ることができる。なお，この点については次も参照。早川三代治「パレートの所得分配論」(早川(＊), pp.14ff)。

8）Pareto (1897), p.312［Pareto (1942), p.344].

9）指数αの増大が所得分布の不平等度の計測指標になるとパレートは考えたが，αを実測することによって，彼は，所得分布が時空を越えて，統計的安定性をもつとの結論に至った。パレートにとっては，αは所得分布の超歴史的安定性を根拠づけるものとして活用されたのである。しかも，パレートは所得分布が「人間の本性」に由来すると考えた。パレートが所得分布にかんするいわゆるパレート法則を考察していたころに論議されていた貧困化論争にたいする彼の解答はこれである（木村和範「所得分布とパレート指数」『開発論集』［北海学園大学］第75号　2005年)。

レート指数

1．パレート指数の増大と所得格差の縮小

(1) 図解

α が大きくなるにつれて，所得分布の不平等性が是正され，均等分布に近づくという通説を説明する仕方はひととおりではない[10]。ここでは視覚に訴える比較的理解しやすい方法でそれを解説する（図1）。パレート法則［(1)式］についてその対数をとれば

$$\log N(x)=\log H-\alpha \log x \tag{2}$$

となる（これもパレート法則と言われることがある)。これを両対数グラフで図示すれば，切片 $\log H$，勾配 $-\alpha$ の直線（パレート線）になる。このとき，パレート指数 α の値が大きくなり，その極限においてパレート線が横軸と直交するとしよう。この場合には，$\log N(x)$ の如何にかかわらず，$\log x$ は一定である（$\log x=\log x_e$)。どの世帯の所得も一様に x_e となるときに，このような現象が生じ，世帯間に所得格差は見られない。このことから，α が大きくなって，パレート線が $\log x$ 軸と直交するとき，その直線は所得均等直線に一致することが分かる。このために，パレート指数が大きければ，それだけ所得分布の平等度が強まるとするベニーニ説は正鵠を射ていると考えられる。

しかるに，パレートは，α が大きいほど不平等度が強まると主張した。このパレートの見解をコッラド・ジーニは次のように解釈している[11]。

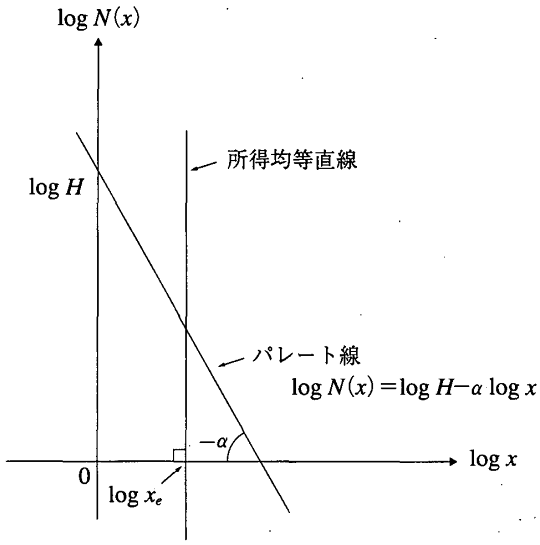


図1　パレート線と所得均等直線

注）α が大きくなるにつれて，パレート線は所得均等直線に近づき，所得分布がより均等になる。
参考）都留重人編『岩波小辞典　経済学』岩波書店 2002年　p.217。

> この根拠は，おそらく，特権をもつ者が少なくなるにつれて，富の不均衡がより強く感じられるという心理学的な考えであろう。

この引用文でジーニが指摘するように（また後述するように)，パレート法則という数理モデル（これに従う所得分布をとくにパレート分布という）からその数学的含意を析出すれば，α の増大は，一方で，比較優位の所得階級に属す世帯の相対的減少を伴うことが分かる。(ただし，ジーニの指摘が妥当するには一定の条件を必要とする。）また，これと同じことではあるが，他方では，α の増大が比較劣位の所得階級に属す世帯の相対的増加を伴う。しかも，この相対的増加は，劣位世帯がより狭い範囲の所得階級へと集中することを伴う。次に項を改めて，この集中化が α の増大（＝所得分布の均等化）とともに進行することを述べ，次節への予備的考察とする。

10）森田（1949)，pp.138ff.

11）Gini, Corrado, "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza," *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Vol.XXXVIII, 1909［以下 Gini (1909)], p.69.

(2) 所得分布を 2 等分する所得と階級間隔との関係

パレートは，指数 α の増大が（彼の意図には反して）所得分布の均等化を伴うということを考察するうえで示唆に富む論文を執筆した。彼の論文「需要法則」(1895 年)[12] がそれである。この論文はその翌年に刊行を控えた『政治経済学教程（*Cours d'Économie Politique*, Lausanne 1896-7)』（ただし，所得分布論を取り扱った下巻の刊行は 1897 年[13]）の予告という役割を果たし，パレートの所得分布モデル［(1)式］とともにパレート指数 α の計算結果（ザクセン，プロイセン，イギリスなど）があたえられている。以下では，この論文を参考にして，増大した α の数理的意味を解析的に考察する。なお，ここでの考察は，結果的には，その大筋において前項での結論（α の増大＝所得分布の均等化）と異なるものではないことを断っておく。その意味では，次節における考察の必要上とは言え，あえて本項に紙幅を割くことにたいしては，屋上屋を架するそしりをまぬがれえない。しかし，α の増大の数理的意味を解析的に考察することによって，図解では明らかにならない含意を陽表化することが期待される。

所得を x で，またその所得が x 以上である世帯数を $N(x)$ で表したとき，パレートの所得分布モデルが，

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \tag{1}$$

であることはすでに述べた[14]。

関数 $N(x)$ が連続量にかんする単調減少関数であるとすれば，所得が x から $x+\varDelta x$（ただし，$\varDelta x$ の大きさは十分微少であるとする）までの間にある世帯数は，

$$N(x)-N(x+\varDelta x)=-\{N(x+\varDelta x)-N(x)\} \tag{3}$$

である。

ここで，関数 $N(x)$ が微分可能であるとする。そして，十分微少な $\varDelta x$ について平均増加率

$$\frac{N(x+\varDelta x)-N(x)}{\varDelta x} \tag{4}$$

を考える。(4)式について $\varDelta x\to 0$ とすれば，(4)式は関数 $N(x)$ を x で微分したことと同義である。したがって，(4)式は次のように書くことができる。

$$\frac{N(x+dx)-N(x)}{dx}=N'(x) \tag{5}$$

(5)式の両辺に $-dx$ を掛けると，

$$-\{N(x+dx)-N(x)\}=-N'(x)\cdot dx$$
$$\therefore\quad N(x)-N(x+dx)=-N'(x)\cdot dx \tag{6}$$

となる。

(6)式の左辺は，(3)式との形式的類似性から明らかなように，所得が x から $x+dx$ までの間にある世帯数である。dx は十分に小さいので，その数が $-N'(x)dx$ で表される世帯の所得は，どの世帯についてもすべて等しく x であると考えることができる。したがって，所得が x から $x+dx$ までの間にある全世帯の所得の合計は，一般に

$$x\cdot\{-N'(x)dx\}\,[=\text{所得}\times\text{世帯数}] \tag{7}$$

である。

ここに，

---

12) Pareto (1895).
13) Pareto (1897).
14) Pareto (1895), pp.63ff.　以下の数式展開における基本方針はパレートに準拠しているが，Pareto (1895) における論述の劈頭におかれた所得分布モデルは(1)式とは異なっているので，細部にわたってはパレートによる展開と同一ではない（補注参照)。

$$N(x)=\frac{H}{x^{\alpha}} \qquad (1)$$
$$=Hx^{-\alpha}$$

なので，(1)式を微分すると次式を得る。

$$N'(x)=-\alpha Hx^{-\alpha-1} \qquad (8)$$

(8)式を(7)式に代入すると，

$$x\cdot\{-N'(x)dx\}=x\cdot\{-(-\alpha Hx^{-\alpha-1})dx\}$$
$$=\alpha Hx^{-\alpha}dx$$

となる。

したがって，所得 x が任意の区間内にある全世帯の所得総額にかんする一般式は不定積分

$$\int\alpha Hx^{-\alpha}dx \qquad (9)$$

であたえられる。

ここで，x_0 が統計によって把捉できる最低所得であることを確認して，次に進む。所得が x_0 から任意の所得 x_1 までの間にある世帯の所得総額を $S_{x_0\sim x_1}$ とすると，(9)式により，$S_{x_0\sim x_1}$ は

$$S_{x_0\sim x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\alpha Hx^{-\alpha}dx$$
$$=\alpha H\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_{x_0}^{x_1}$$
$$=\frac{\alpha H}{1-\alpha}({x_1}^{1-\alpha}-{x_0}^{1-\alpha})$$
$$=\frac{\alpha H}{\alpha-1}({x_0}^{1-\alpha}-{x_1}^{1-\alpha})$$
$$=\frac{\alpha H}{\alpha-1}\left\{\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}\right\} \qquad (10)$$

である。

同様に，所得が x_1 から最高限度の所得 $x_{\max}$（理念的には無限大）までの世帯の合計所得 $S_{x_1\sim x_{\max}}$ は，次のようになる。

$$S_{x_1\sim x_{\max}}=\int_{x_1}^{\infty}\alpha Hx^{-\alpha}dx$$
$$=\frac{\alpha H}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1} \qquad (11)$$

かりに，最低所得 x_0 から任意の所得 x_1 までの所得階級に属する世帯の所得総額 $S_{x_0\sim x_1}$ が，任意の所得 x_1 以上の所得を有する世帯からなる所得階級の所得総額 $S_{x_1\sim x_{\max}}$ の k 倍になっているとする。すなわち，$S_{x_0\sim x_1}$ と $S_{x_1\sim x_{\max}}$ には

$$S_{x_0\sim x_1}=k\times S_{x_1\sim x_{\max}} \qquad (12)$$

という関係が成り立っているものとする。(12)式に(10)式と(11)式を代入して整理すると，

$$\frac{\alpha H}{\alpha-1}\left\{\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}\right\}=k\cdot\frac{\alpha H}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}=k\cdot\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-1}=(1+k)\cdot\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}$$
$$\frac{\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-1}}=1+k$$

となり，結局，次式が得られる。

$$\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\alpha-1}=1+k \qquad (13)$$

(13)式の両辺を $\frac{1}{\alpha-1}$ 乗すれば，次式を得る。

$$\frac{x_1}{x_0}=(1+k)^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad (14)$$

すでに述べたように，上式の k は，$S_{x_0\sim x_1}$（最低所得 x_0 から任意の所得 x_1 までの所得階級に属する世帯の所得総額）にたいする $S_{x_1\sim x_{\max}}$（任意の所得 x_1 以上の所得を有する世帯からなる所得階級の所得総額）の倍率であった［(12)式参照］。ここで，社会全体の所得総額が所得 x_1 で2等分され，$S_{x_0\sim x_1}$ と $S_{x_1\sim x_{\max}}$ とが等しいものとする。すなわち，

$$S_{x_0\sim x_1}=S_{x_1\sim x_{\max}} \qquad (12')$$

が成立しているとしよう。これは(12)式の k が1であること，すなわち

表　パレート指数 α と所得倍率 $\frac{x_1}{x_0}$

α	$\frac{x_1}{x_0}$
1.4	5.66
1.5	4.00
1.6	3.17

注）$S_{x_0\sim x_1}=S_{x_1\sim\max}$ のとき。

$$k=1 \tag{15}$$

を意味する。この(15)式を(14)式に代入すれば，

$$\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{16}$$

となる。

この(16)式を用いれば，パレート指数 α が所与の値をとるときに，社会全体の所得総額をちょうど 2 等分する所得 x_1 が，最低所得 x_0 の何倍であるか（所得倍率）を知ることができる。(16)式をグラフで示せば，α の値を特定しなくても，このことを一般的に論ずることはできるが（**補注**における参考図参照），数値的に特定することによって事柄をより明確にできると期待されるので，ここでは試みに α が 1.5±0.1 の範囲内にある場合を取り上げる（上表参照）。

この数値例から，社会全体の所得総額をちょうど 2 等分する所得 x_1 が，$\alpha=1.4$ のときには，最低所得 x_0 の 5.66 倍であったのにたいして，$\alpha=1.6$ のときには，その倍率が 3.17 となって，所得階級の範囲（$x_0\sim x_1$）がおよそ半分に圧縮されていることが分かる。換言すれば，α の増大に伴って，所得階級内の密度が高まり，それだけ所得格差が縮小する（すなわち，比較劣位の所得階級内の所得分布が均等化傾向にある）ことが分かる。

これまでは x_1 は社会全体の所得総額を 2 等分する所得であるとしてきたが，そうではなくて，x_1 が社会全体の所得総額を単に二分する所得であると規定しても，同様のことが言える。すなわち，α の増大とともに所得倍率 $\frac{x_1}{x_0}$ は縮小し，結局，所得分布の均等化がもたらされるのである。

以上，パレート指数 α の増大が所得分布の均等化を伴うという通説を，前項とは異なった解析的な仕方で解説した。これを予備的考察として，次に節を改めて，増大する α の数理的意味をさらに考察することにしよう。

2．所得階級内世帯数の相対的増減とパレート指数

ジーニの指摘[15]から明らかなように，パレート・モデルにおいては，所得分布を所得 x_1 で二分したとき，α の増大は，一方では，比較優位の所得階級に属す世帯数の相対的減少を意味する。（ここに言う「二分」は「2 等分」と考えてもよいが，必ずしもそうでなくてもよい。さしあたり以下では，「2 等分」を包含する，文字どおり 2 つに分けるという意味で用いることにする。）また，他方では，α の増大は，比較劣位の所得階級に属す世帯数の相対的増加を意味するとも言われている。これら 2 つの事柄は同一メダルの表裏と同じ関係にあるように思われるが，各々の場合を分けて考察することによってパレート・モデルの含意がより明確になる。この考察を通じて，ジーニの指摘が一定の条件のもとでのみ妥当することを明らかにしたい。

(1)　パレート指数の増大と優位世帯率の減少

パレート法則［(1)式］において，最低所得 x_0 以上の世帯数を $N(x_0)$ とおき，所得が x_1（$x_0<x_1$）以上の世帯数を $N(x_1)$ とおくと，

$$N(x_0)=\frac{H}{x_0^{\alpha}} \tag{1'}$$

$$N(x_1)=\frac{H}{x_1^{\alpha}} \tag{1''}$$

15）Gini (1909), p.69.　脚注 11 参照。

となる。x_0を最低所得としたので，x_0以上の所得を有する世帯数$N(x_0)$は，捕捉された世帯の全数である。したがって，比率$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$は，特定の大きさの所得x_1以上の世帯［すなわち，比較優位の所得階級に属す世帯であり，その数は$N(x_1)$］が全世帯のなかに占める割合（以下，優位世帯率）を意味する。この優位世帯率は，(1′)式と(1″)式から

$$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\frac{\frac{H}{x_1^{\alpha}}}{\frac{H}{x_0^{\alpha}}}=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha} \tag{17}$$

となる。$0<x_0<x_1$であるから，明らかに$0<\frac{x_0}{x_1}<1$である。このとき，少なくとも$\frac{x_0}{x_1}=\text{const.}$であれば，$\alpha\,(>0)$[16]が大きくなるにつれて，$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}$は小さくなり，したがって，(17)式の左辺$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$（優位世帯率）も小さくなる。

ところが，(17)式の含意を考察してみると，言われるようにαの増大が優位世帯率の減少をもたらすには，x_0が一定の条件を満たさなければならないことが分かる。以下では，このことを考察してみよう。

(17)式から明らかなように，その左辺$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$の値の変動に影響を与えるのは，αと$\frac{x_0}{x_1}$である。しかしながら，たとえば，αの値が2から4へと増加した場合に，x_1は不変であるが，x_0の値を大きくとったことによって，$\frac{x_0}{x_1}$が$\frac{1}{4}$から$\frac{2}{4}\left(=\frac{1}{2}\right)$へと増大するときには，(17)式右辺の値は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2[\alpha=2\text{ の場合}]=\left(\frac{1}{2}\right)^4[\alpha=4\text{ の場合}]$$

となって，左辺の値には変化がない。このように，αの増大が，つねに優位世帯率$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$の減少を伴うとは限らない。

このことを一般的に示すために，(17)式の両辺の対数をとる。すなわち，

$$\log\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\log\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}=\alpha\log\frac{x_0}{x_1} \tag{17′}$$

(17′)式において，

$$0<\frac{N(x_1)}{N(x_0)}<1 \quad かつ \quad 0<\frac{x_0}{x_1}<1$$

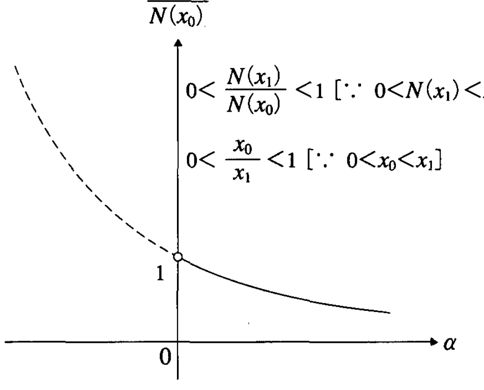
なので，

$$\log\frac{N(x_1)}{N(x_0)}<0 \quad かつ \quad \log\frac{x_0}{x_1}<0$$

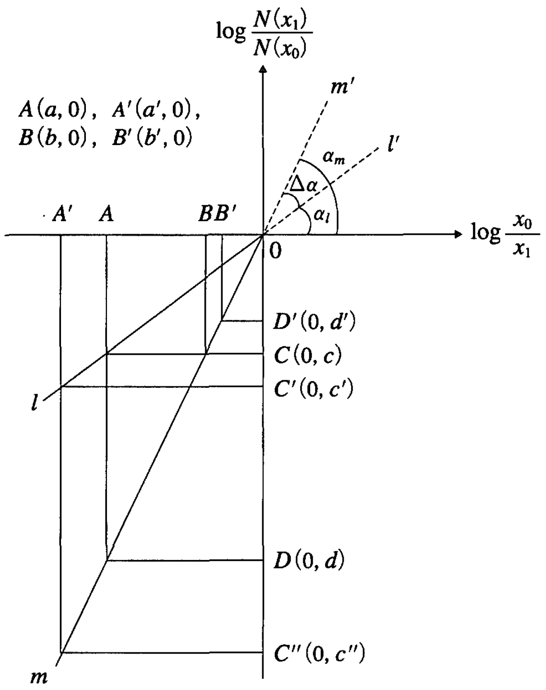
となり，このため，(17′)式で示される描線を両対数グラフに描けば，それは第3象限における直線になる（図2）。

この図2において，直線ll'は$\alpha=\alpha_l$の場合を示している。また，直線mm'はαが$\Delta\alpha$だけ大きくなって，$\alpha=\alpha_m(=\alpha_l+\Delta\alpha)$になった場合を示している。

16) $\alpha>0$となることは，(17)式をグラフで表示した次の参考図から明らかである。変数αは実線で示した曲線上の値をとる。



参考図　$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}=\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\alpha}$



ll' : $\log\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}=\alpha_l\log\dfrac{x_0}{x_1}$

mm': $\log\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}=\alpha_m\log\dfrac{x_0}{x_1}$

図 2　α の増大と優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$

直線 ll' において，優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の対数 $\log\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ を一意的に決定する $\log\dfrac{x_0}{x_1}$ の位置を点 A で示した。そして，その座標を $(a,0)$ とする。図 2 では，点 A に対応した優位世帯率の対数を縦軸上の点 $C(0,c)$ で示した。

ここで，α の値が $\Delta\alpha$ だけ大きくなって，$\alpha=\alpha_m$ となったとしよう。このとき，(17′)式の直線は mm' となる。この直線において，$\log\dfrac{x_0}{x_1}$ の値が変わらずに，$A(0,a)$ のままであったとすれば，$\log\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ は，点 C から点 D へと移動し，その座標は $(0,d)$ となる。図 2 より明らかに $c>d$ であり，この場合には，α の増大によって，$\log\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ が小さくなり，したがって，$\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ も減少することになる。すなわち，所得分布を二分する所得 x_1 が不変であり，かつ最低所得 x_0 も同一のまま（$\dfrac{x_0}{x_1}$ が不変）であれば，α が $\Delta\alpha$ だけ増大して，α_l から α_m へと変化した場合には，優位世帯率が減少する。α の増大が比較優位の所得階級に属す世帯の相対的減少を伴うとパレートが考えたのはこのような状況である。これをジーニは少数の豊かな者が目立つ状態と見なし，不平等度の強化が意識されるようになると指摘したことはすでに紹介した。

では，$x_1=\text{const.}$ という条件のもとで，基準時点における x_0 が比較時点では x_0' に変化するとき，優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ はどのような変化を示すであろうか。このことについては，α の値が変化しないか，増大するかに応じて，次の 4 つの場合に分けて考察する必要がある。

(i)　α が不変で x_0 が小さくなる場合 ($x_0'<x_0$)
(ii)　α が不変で x_0 が大きくなる場合 ($x_0'\geqq x_0$)
(iii)　α が増大して x_0 が小さくなる場合 ($x_0'<x_0$)
(iv)　α が増大して x_0 が大きくなる場合 ($x_0'\geqq x_0$)

いずれの場合においても，比較時点における $\dfrac{x_0}{x_1}$ を $\dfrac{x_0'}{x_1}$ とおく。$x_0'<x_0$ の場合には，$\dfrac{x_0'}{x_1}<\dfrac{x_0}{x_1}$ となって，縦軸で示される優位世帯率の対数を特定する横座標 $\log\dfrac{x_0}{x_1}$ の値は小さくなり，点 A は左方に移動する。これにたいして，$x_0'\geqq x_0$ の場合には，$\dfrac{x_0'}{x_1}\geqq\dfrac{x_0}{x_1}$ となり，点 A は同じ位置に留まるか，あるいは，右方に移動する。このことを確認しておいて，以下，順に考察することにしよう。

i．α が不変で x_0 が小さくなる場合

$(x_0' < x_0)$ ［直線 ll'］

x_1 が不変であったとしても，x_0 がそれよりも小さな x_0' となったとき（すなわち点 A から点 A' へと移動したとき）には，優位世帯率の対数 $\log\frac{N(x_1)}{N(x_0')}$ を示す点が C' となり，その位置は点 C よりも下方に移動する。すなわち，α の値が変わらなくても最低所得 x_0 を小さくすれば，優位世帯率 $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ は小さくなる。

ii. α が不変で x_0 が大きくなる場合 $(x_0' \geqq x_0)$ ［直線 ll'］

このときは直線 ll' において $\log\frac{x_0}{x_1}$ が点 A の位置に留まるか，あるいはそれよりも右方に移動し，それに伴って優位世帯率の対数を示す縦軸上の点は C のままか，それよりも上方に位置することになる。すなわち，α が不変のままであっても，比較時点で最低所得 x_0 を以前よりも大きくとって $(x_0' > x_0)$，優位世帯率を測定すれば，その値は大きくなる。

iii. α が増大して x_0 が小さくなる場合 $(x_0' < x_0)$ ［直線 mm'］

図2では横軸上の位置が点 A' となり，縦軸上の位置が C'' となるような場合がこれである。$\alpha = \alpha_l$ のときに，優位世帯率の対数を示す縦軸上の点は C であったのに較べてみて，$\alpha = \alpha_m$ のときにはそれよりも下方の点 C'' になって，α の増大が優位世帯率の減少を伴っているかのようにみえる。しかし，上の i で述べたように，$\alpha = \alpha_l$ のときに，x_0 を小さな値にすれば，それだけで，優位世帯率の対数を示す縦軸上の位置が C' となって，優位世帯率は減少してしまう。したがって，α の増大と x_0 の減少とが一緒に起こるときには，優位世帯率の減少は，α の増大と x_0 の減少の両方の作用によると考えられ，優位世帯率の減少が α の増大だけによってもたらされたとは言い難い。

iv. α が増大して x_0 が大きくなる場合 $(x_0' \geqq x_0)$ ［直線 mm'］

α の増大と $\log\frac{x_0'}{x_1} \geqq \log\frac{x_0}{x_1}$ がともに起こる場合がこれである。これはさらに次の3つの場合に分かれる。

① $\log\frac{x_0'}{x_1}$ が点 A から点 B までの範囲にある場合（ただし，端点 A を含むが，B を含まない）：このときは，優位世帯率 $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の対数を示す縦軸上の位置は点 C から点 D までの区間内にある。すなわち，α の増大は優位世帯率の減少を伴う。ただし，x_0 の増大とともに，優位世帯率の減少幅は小さくなる。

② $\log\frac{x_0'}{x_1}$ が点 B の位置にある場合：このときは，優位世帯率 $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の対数は縦軸上の点 C にあって，α が増大する前（$\alpha = \alpha_l$ のとき）と優位世帯率は同一になり，たとえ，α が $\Delta\alpha$ だけ増大しても，優位世帯率の減少を検出することはできない。

③ $\log\frac{x_0'}{x_1}$ が点 B を越えて原点に近づく場合：図2における横軸の位置が B' になる場合がこれである。このとき，優位世帯率 $\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の対数は縦軸上の点 D' となり，図2から明らかに優位世帯率は増加を示すことになる。

以上を要約すれば，x_1 は一定であり，かつ，$\frac{x_0}{x_1}$ が一定不変（すなわち，x_0 も不変）

のときには，α の増大が優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の減少を伴うと言うことができる。あるいは，たとえ x_0 が増加して x_0' になったとしても，少なくとも $\log\dfrac{x_0'}{x_1}$ が点 B を越えて原点に近づかない（そして，点 B の位置に留まることもない）という条件が満たされてはじめて，α の増大は優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の減少を伴うと言うこともできる。

しかも，これまでの考察(ｉとiii)から x_0 が小さくなる場合（$x_0'<x_0$）には，それだけで（すなわち，α が増大しなくても）優位世帯率が減少するので，α の増大と優位世帯率の減少とが結びつくには，$x_0'\geqq x_0$ でなければならない。その値が固定された x_1 は所得であるから，正である。したがって，$x_0'\geqq x_0$ は $\dfrac{x_0'}{x_1}\geqq\dfrac{x_0}{x_1}$ とすることができる。このように，x_0' の変動は α の増大と優位世帯率 $\dfrac{N(x_1)}{N(x_0)}$ の関係を規制する条件の１つであるが，このことは，後にも触れる。

以上要するに，α の値が $\Delta\alpha$ だけ増加して，α_l から α_m になるとき，パレートが考えたように（また，ジーニがその考えを解釈したように），比較優位の所得階級に属する世帯数が相対的に減少するには，所得分布を二分する任意の所得 x_1 が変わらないとしても，x_0（最低所得）のとりうる範囲は一定の制約を受けることになる。以下ではこの制約がいかなるものであるかをさらに考察する。

図２において題意に整合的な（すなわち，α の増大が優位世帯率の減少を伴うような）c と d の大小関係は

$$c=\alpha_l\log\frac{x_0}{x_1}$$

$$d=\alpha_m\log\frac{x_0'}{x_1}$$

について

$$c>d$$

である。

ゆえに

$$\alpha_l\log\frac{x_0}{x_1}>\alpha_m\log\frac{x_0'}{x_1} \qquad (18)$$

ここで

$$0<\alpha_l<\alpha_m,$$

$$0<\frac{x_0}{x_1}<1,\quad \therefore\quad \log\frac{x_0}{x_1}<0,$$

$$0<\frac{x_0'}{x_1}<1,\quad \therefore\quad \log\frac{x_0'}{x_1}<0$$

なので，(18)式を整理すると

$$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}<\frac{\log\dfrac{x_0'}{x_1}}{\log\dfrac{x_0}{x_1}}$$

底の交換公式により，

$$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}<\log_{\frac{x_0}{x_1}}\frac{x_0'}{x_1} \qquad (19)$$

この式の底 $\dfrac{x_0}{x_1}$ は $0<\dfrac{x_0}{x_1}<1$ なので，(19)式で規定される領域の境界線 $\dfrac{\alpha_l}{\alpha_m}=\log_{\frac{x_0}{x_1}}\dfrac{x_0'}{x_1}$ は下に凸である。また，

$$0<\frac{\alpha_l}{\alpha_m}<1 \quad かつ \quad 0<\frac{x_0'}{x_1}<1$$

であり，しかも前述のｉ～ivで明らかにしたように，α が増大しても $c>d$ となるのは $\dfrac{x_0'}{x_1}\geqq\dfrac{x_0}{x_1}$ のときであるから，(19)式を満たす領域は図３の斜線部分となる。なお，対数の数学的性質から，$\dfrac{\alpha_l}{\alpha_m}=1$ のときには境界線 $\dfrac{\alpha_l}{\alpha_m}=\log_{\frac{x_0}{x_1}}\dfrac{x_0'}{x_1}$ の横座標の値は，その境界線を示す式の右辺の底 $\dfrac{x_0}{x_1}$ に等しいので，図ではそれも表示した。

すでに述べたように，$c>d$ であるためには，$\dfrac{x_0'}{x_1}\geqq\dfrac{x_0}{x_1}$ でなければならないが，図３を

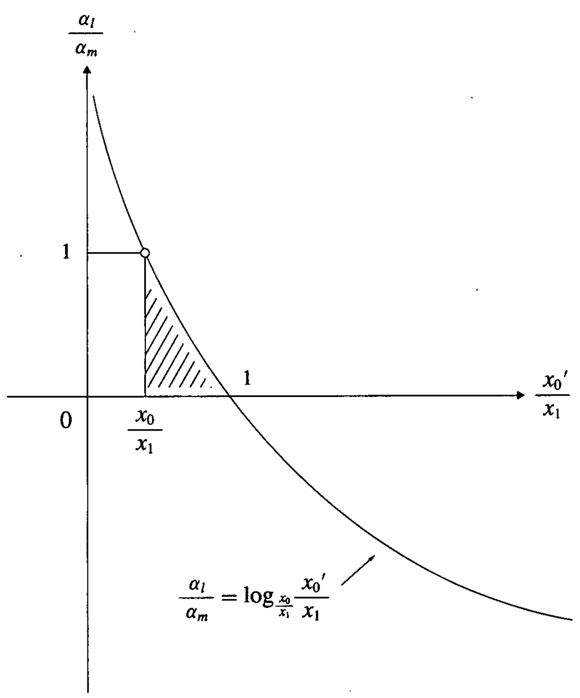


図3　$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}$ と $\frac{x_0'}{x_1}$

見れば，$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}$ の値によって $\frac{x_0'}{x_1}$ がとりうる値の範囲はさらに制約を受けることが分かる。すなわち，$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}$ が小さければ小さいほど（α の増大が大きければ大きいほど），$\frac{x_0'}{x_1}$ の値は限りなく1に近づいても，(19)式が満たされる。x_0' の値は x_1 に近い値をとることができるのである。他方で，$\frac{\alpha_l}{\alpha_m}$ が大きくなればなるほど（α の増大が小さければ小さいほど），$\frac{x_0'}{x_1}$ がとりうる値は $\frac{x_0}{x_1}$ に近い値でなければならない。換言すれば，α の増加が軽微なときには，それだけ x_0' の値を x_0 に近づけるようにしなければ，α の増大と優位世帯率の減少とは並立しないことになる。

以上の検討により，(19)式を満たす領域内で所得限界 x_0' を定めなければ，パレート指数 α の増大が優位世帯率の減少を伴わないことが分かる。x_1 の値は所与であり，しかも，所得統計を用いて計算すれば，α_l と α_m が定まる。したがって，(19)式を満たす x_0' を見出すことはさほど困難ではない。ここでは，α の増大が，一定の条件のもとで比較優位の所得階級に属す世帯数の相対的な減少を伴うことを確認して，次項に進みたい。

(2)　パレート指数の増大と劣位世帯率の増加

$\frac{N(x_1)}{N(x_0)}$ は，世帯総数のなかに占める所得が x_1 以上となる世帯の割合（優位世帯率）である。このとき，所得が最低所得 x_0 から（それ以上の）任意の所得額 x_1 までの間にある世帯が，全世帯のなかに占める割合（以下，劣位世帯率）は

$$1-\frac{N(x_1)}{N(x_0)} \tag{20}$$

である。

前項で述べたように，一定の制約のもとで α の増大は優位世帯率の減少を伴うが，そのとき，それは(20)式の値（劣位世帯率）の増大として現象する。α の増大と劣位世帯率の増大が並んで発現するための条件は，前項で述べたことと異なるところがない。劣位世帯率にかんしても，最低所得 x_0 の変動が所定の条件を満たしてはじめて，α の増大が劣位世帯率の増大を伴うと言うことができる。

これまでの考察から，x_0 の変動が一定の範囲内にある限りにおいて，パレート指数 α が大きくなれば，上位の所得階級の相対的減少（下位の所得階級の相対的増加）という現象が見られるようになる。また，このことから，パレートの見解では，ある特定の所得 x_1 を基準にして，その基準以上の所得階級が増えるか減るかで，所得分布が統計的に計測されていることが分かる[17]。

17）パレートは「『(金額) x 以下の所得人員が x 以上の所得人員に較べて減少したときに所得の不

このことにかんして，森田優三は次のように述べている[18]。

> ……パレート常数 α の値は所得分布の不平等に反比例して変化することは明らかである。もっともパレート自身の α 説明は不平等の意味に関してパレートの定義の仕方をとる限り誤[り]でないことは前に述べた通りである。唯問題は定義の仕方が現実の問題に対する解答に適しているかどうかということである。もし所得額の変化の範囲が限定されているならばパレートのような定義の仕方でも差支えはない。例えば同一国民所得について家族所得の分布と個人所得の分布を比較する場合の如きである。しかし多くの比較において所得分布の範囲は同一ではなく，特にその上限界は同一ではない。故にパレートのように一定所得額を分界点としてその上下の所得人員の大小変化を比較する考え方では所得分布の不平等性は正確に把握できないのである。

む　す　び

これまでの考察にもとづけば，パレート・モデルの適合性を問わない限りにおいて，パレート理論を次のように要約することができる。

i．パレートは，所得分布を二分する所得 x_1 を基準にして，所得格差（平等度・不平等度）を判定しようとした。パレート指数 α は，このための指標になると考えられた。

ii．パレート・モデルを数学的に展開すれば，一定の条件のもとで，パレート指数 α の増大が，一方では優位世帯率の減少を意味し，他方では劣位世帯率の増加を意味することが分かる。比較劣位の所得階級に属す世帯が相対的に増加するということは，より貧しい生活を余儀なくされる人々が増加しているということである。パレートは，このことが α の増大で示されるならば，増大した α は，所得分布の不平等度の高まりを意味すると考えた。このパレートの見解を解釈して，ジーニは豊かな生活を謳歌する者の数が減少することによって，それらの少数の人々が目立ち，不平等感が募るからであろうと述べた。

iii．パレート指数 α の増大が不平等度の強化を意味すると考えたパレートの解釈は不適切である。α の増大は，通説（ベニーニ）のように，所得分布が均等化に向かっていることを示すと考えられる。

iv．一定の条件のもとでのみ，α の増大と劣位世帯率の増加とは並行して生ずる（上記 ii 参照）。その条件とは，最低限度の所得 x_0 の変動が一定の範囲内に納まっていることである。パレートは x_0 を基準時点と比較時点とのいずれにおいても同一と見なしているように思われ，その限りでは，パレートが考えたように（またジーニが解釈したように），α の増大は劣位世帯率の増大を伴って表出する。しかし，x_0 が数学的に規定される所定の範囲を逸脱して増加するときには，α の増大は，比較劣位の所得階級に属する世帯の相対的減少（比較優位の所得階級に属す世帯の相対的増加）を伴うことになる。しかも，α の増大によってパレート線は一般に所得均等直線に近づくので，このような場合には，所得分布の均等化とともに，優位世帯率が増大することになる。

平等が減じた』と考えるのである。」(森田(1949)，p.139)。

18) 森田（1949），p.147.

v．パレート指数αは，ベニーニ（通説）の意味で所得分布の平等度・不平等度（所得格差）の検出機能をはたす。それとともに，αは，最低所得x_0を基準時点と比較時点の両方で，同一の値に固定する（あるいはx_0の変動を少なくとも所定の範囲内に留めている）という条件のもとで，比較劣位の所得階級に属す世帯の相対的増減（貧困化・富裕化の度合い）を検出する機能を果たす。言うまでもなく，物価水準や賃金水準など社会経済的条件の変化によって，x_0が限度を越えて増大する場合には，その限りではない。

αの増大にたいするパレートによる解釈の是非はおくとしても，彼の意図は，基準所得x_1を定め，それ以上の所得階級に属する構成員の相対的増減を判断の根拠として，不平等度を計測することにあった。そこにパレートの所得分布論の特質がある。すでに指摘されていることではあるが，これは，パレートの所得分布モデルが社会全体の所得分布を概観して導き出されたにもかかわらず，特定の所得階級だけに着目して，所得分布の不平等度を計測しようとする試みであったことを意味する。このため，パレートの分析方法には社会全体の所得分布の総体的認識にかんしては不十分であることを否めない。

それだけではなく，（いわゆるパレート法則の現実説明力を不問に付すとしても）パレート指数が言われるような機能を果たすには，最低所得x_0のとりうる値には制約がある。その制約を越えてx_0が変動するときには，たとえ実際に劣位世帯率が上昇したとしても，パレート指数では，劣位世帯率の増大を検出することはできない。最低所得x_0のとりうる値にたいするこのような制約のために，パレート指数で所得分布の時空的比較を試みようとすれば，場合によっては，最低所得x_0の値を比較の前後で同一に固定せざるを得ない事態も想定される。$\frac{x_0}{x_1}$が基準時点と比較時点で同一の場合には，αの増大が直截的に優位世帯率の減少に作用するが，限度を越えて$\frac{x_0}{x_1}$が増大すれば，αの増大による優位世帯率の減少が減殺されるからである。これは，所得分布の時空的比較において所得階級の限界値を固定させることにつながる。このように考えるとき，所得階級を固定させて所得分布を考察しようとした論者の1人としてパレートの名を挙げて，論難したローレンツ[19]の指摘は含蓄が深いと言えよう。

パレート法則は現実の所得分布を数理モデル化した。当初からパレートは彼のモデルが上位と下位の所得階層で適合的ではなく，その説明力が脆弱であることを自覚しており，この弱点については古くから論議されている。数理モデルによる所得分布研究は，その後どのような展開を示したのであろうか。この点についての検討は今後の課題である。

19) Lorenz, Max O., "Methods of Measuring the Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, No.70, 1905.
cf. 木村和範「ローレンツ曲線の形成」『経済論集』（北海学園大学）第51巻第3・4号　2004年。

[補注]

本文は，Pareto (1895), pp.60ff. の叙述とは異なっている。パレートがその論文において立論の出発点に措定した所得分布関数は

$$N=\frac{H}{x^{\alpha}} \qquad ①$$

である。この左辺のNは，本文で述べてきた「パ

レート法則」とは違い，所得が x となる世帯数であって，所得を x 以上とする世帯数ではないことに注意を要する。N をこのように捉えるほうが数学的には簡単であるが，そうなれば，そのときに措定された所得分布関数がいわゆる「パレート法則」ではないために，以下に紹介するパレートによる数式展開には，論理的一貫性の点で無理があるように思われる。以上の理由から，本文では，あえてパレートみずからの数式展開をそのまま引用するのではなくて，その基本理念だけを生かすように努め，彼の見解はこの補注で紹介することにした。

所得分布関数が①式のとき，所得が x である N 世帯の所得総額は

$$N \times x$$

である。

ここで，関数 $N=\frac{H}{x^{\alpha}}$ (①式) が積分可能であるとする。そして，統計によって捕捉できる最低所得を x_0 とおき，所得が最低所得 x_0 から任意の所得 x_1 までの間にある世帯の所得総額を $S_{x_0\sim x_1}$ とすると，$S_{x_0\sim x_1}$ は

$$\begin{aligned} S_{x_0\sim x_1} &= \int_{x_0}^{x_1} N\times x\, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{Hx}{x^{\alpha}}\, dx \qquad \text{(①式による)} \\ &= H\int_{x_0}^{x_1} x^{1-\alpha}\, dx \\ &= \frac{H}{2-\alpha}\left[x^{2-\alpha}\right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{H}{2-\alpha}\left({x_1}^{2-\alpha}-{x_0}^{2-\alpha}\right) \\ &= \frac{H}{\alpha-2}\left({x_0}^{2-\alpha}-{x_1}^{2-\alpha}\right) \\ &= \frac{H}{\alpha-2}\left\{\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-2}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-2}\right\} \qquad ② \end{aligned}$$

である。

他方で，所得が x_1 以上 (理念的には x_1 から無限大まで) の所得を有する世帯の所得総額 $S_{x_1\sim\max}$ は，同様にして，

$$S_{x_1\sim\max}=\frac{H}{\alpha-2}\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-2} \qquad ③$$

である。

ここで，最低所得 x_0 から任意の所得 x_1 までの所得階級に属する世帯の所得総額 $S_{x_0\sim x_1}$ が，任意の所得 x_1 以上の所得を有する全世帯の所得総額 $S_{x_1\sim\max}$ の m 倍になっているとする。すなわち，$S_{x_0\sim x_1}$ と $S_{x_1\sim\max}$ には

$$S_{x_0\sim x_1}=m\times S_{x_1\sim\max} \qquad ④$$

という関係が成り立っているものとする。④式に②式と③式を代入して整理すると，

$$\left(\frac{1}{x_0}\right)^{\alpha-2}-\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-2}=m\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\alpha-2} \qquad ⑤$$

となる。本文で⒁式を誘導したときと同様にすれば，⑤式は

$$\frac{x_1}{x_0}=(1+m)^{\frac{1}{\alpha-2}} \qquad ⑥$$

となる。

ここで，社会全体の所得総額が任意の所得額 x_1 で 2 等分されているとしよう。すなわち，

$$S_{x_0\sim x_1}=S_{x_1\sim\max}$$

であるとしよう。このときは，④式において

$$m=1 \qquad ⑦$$

である。この⑦式を⑥式に代入すれば，

$$\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-2}} \qquad ⑧$$

となる。

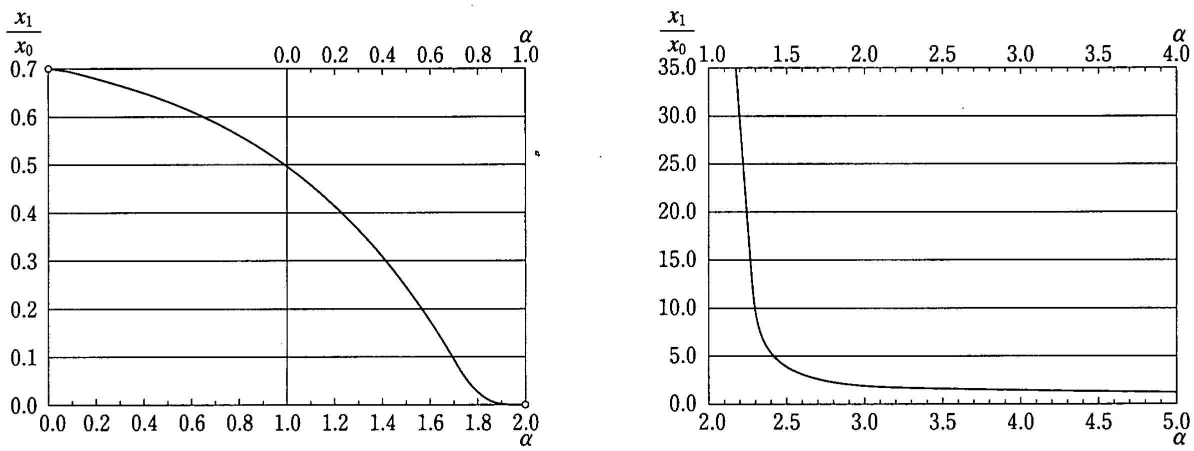
この⑧式を用いて，パレートは参考表に示すような計算を行い，いわゆるパレート指数 α の値が 2.4〜2.6 のときに，社会全体の所得総額を 2 等分する所得 x_1 が，最低所得 x_0 の何倍であるか (所得倍率) を示した。

なお，⑧式について $\frac{x_1}{x_0}$ が変化する α とどのように対応するかを示す目的で参考図を作成した。本文における⒃式 $\left[\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-1}}\right]$ は⑧式を横軸の方向に −1 平行移動させただけであるので，⒃式にかんする横軸の値を上方に記し，併せて参考に供した。

参考表　パレート指数 α と所得倍率 $\frac{x_1}{x_0}$

α	$\frac{x_1}{x_0}$
2.4	5.66
2.5	4.00
2.6	3.17

注) $S_{x_0\sim x_1}=S_{x_1\sim\max}$ のとき。
(出所) Pareto, V., “La legge della domanda,” *Giornale degli Economisti*, Serie Seconda, Volume X, 1895, p.63 の叙述から作成。



参考図　$\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-2}}$ [⑧式] と $\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-1}}$ [(16)式]

注1．左右の参考図とも下方の横軸上の α は $\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-2}}$ [⑧式] に対応する。

2．左右の参考図とも上方の横軸上の α は $\frac{x_1}{x_0}=2^{\frac{1}{\alpha-1}}$ [(16)式] に対応する。

3．両式のいずれにおいても $\alpha>0$ であるが，⑧式にあっては $\alpha\neq 2$，(16)式にあっては $\alpha\neq 1$ である。

4．両式のいずれにおいても α の増大とともに所得倍率 $\frac{x_1}{x_0}$ は減衰する。