

タイトル	Generic Metropolis Algorithmを使用した収束に関する基礎的検討
著者	串山, 繁
引用	北海学園大学工学部研究報告, 32: 27-40
発行日	2005-02-21

Generic Metropolis Algorithmを使用した収束に関する基礎的検討

串 山 繁*

Basic Research on Convergence using a Generic Metropolis Algorithm

Shigeru KUSHIYAMA *

abstract

A subset MCMC (Markov Chain Monte Carlo simulation) method is recently presented for efficiently computing small failure probabilities encountered in seismic risk problems involving dynamic analysis by Au and Beck. The central idea of subset simulation is that the problem of simulating a rare failure is replaced by several problems that involve the conditional simulation of more frequent events. Markov chain Monte Carlo simulation is used to efficiently generate the conditional samples. Subset MCMC doesn't require a special knowledge such as sensitivity evaluation on parameters.

This paper shows the outline of subset MCMC method and some basic examples using a generic Metropolis algorithm proposed by Raftery and Lewis are presented to investigate the efficiency.

1. 序

荷重や構造物の特性を確率論的に捉えて、構造設計を合理的に評価しようとする信頼性設計に関して、種々の検討がなされている [1], [2]。ただし、信頼性設計を推進するためには、動的非線形応答解析などの手間のかかる計算でも多数回繰り返すことが容易となることが必要不可欠である。従来、静的非線形問題や動的問題に対しては一般に陽な破壊確率算定式の表現は困難であるため、この種の問題に対してはサンプルの偏りを減らしたりアルゴリズムを改良するなどの工夫を凝らしたMCS (モンテカルロシミュレーション) が用いられてきた [3], [4]。しかし、低損傷破壊確率を評価するためには多大な計算時間を必要とする難点がある。

* 北海学園大学工学部建築学科 教授
Department of Architecture, Hokkai-Gakuen University

ある。

最近上記とは異なる視点から、地震時リスク問題を考慮した低損傷破壊確率を効率的に計算するための部分空間シミュレーション法が提示された [5]。そのアイデアは、小さな破壊確率をそれより大きな条件付破壊確率の積として表現することにより、稀な破壊事象をシミュレートする問題をより頻繁な事象の条件付シミュレーションの問題に置き換えて計算負荷を大幅に軽減しようとするものである。その際、条件付サンプルを効率的に取り出すために、MCMC (マルコフチェーンモンテカルロシミュレーション) が使用される [6], [7]。この部分空間シミュレーション法によれば、確率変数に関する感度評価など特別な予備知識が無くても、破壊に至る部分空間を自動的に探索して解を求めることができる。

本論は、subset MCMC (部分空間マルコフチェーンモンテカルロシミュレーション) に関して、主として文献 [5] ~ [7] を参考にその概要をまとめ、Raftery-Lewisが提案したgeneric Metropolis algorithmシミュレーション [8] を考慮した基本例題の検討結果について記したものである。

2. 部分空間シミュレーション

複数の確率変数 θ で構成される全体集合の空間ベクトルを F_1 、その部分集合を F_i 、破壊領域を $F_m = F$ と置き、次式のように表せると仮定する。

$$F_1 \supset F_2 \cdots \supset F_m = F \quad (1)$$

$$F_k = \bigcap_{i=1}^k F_i, \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

このとき、条件付確率の定義により次式を得る。

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F_m) = P(\bigcap_{i=1}^m F_i) = P(F_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} F_i) P(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i) \\ &= P(F_m | F_{m-1}) P(\bigcap_{i=1}^{m-1} F_i) = \cdots = P(F_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(F_{i+1} | F_i) \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式は、破壊確率が一連の条件付確率 $\{P(F_{i+1} | F_i) : i = 1, \dots, m-1\}$ および $P(F_1)$ の積として表わされることを意味している。 $P(F_1)$ は標準MCSを用いて評価される。一方、条件付確率は、次式で表わされる条件付確率密度関数を目標分布 (target distribution) としたシミュレーションにより評価される。

$$q(\theta | F_i) = q(\theta) I_{F_i}(\theta) / P(F_i) \quad (4)$$

ただし、 $q(\theta | F_i) : F_i$ に存在しているとして与えられた θ の条件付確率密度関数

$I_{F_i}(\theta)$: 指標関数、 θ が F_i に含まれるなら1、そうでないならば0

その際、MCMCは条件付サンプルを効率的に取り出すために使用される。

3. MCMCシミュレーション

マルコフチェーンの定常性が満足されるならば、平衡方程式 (detailed balance equation) を満足する遷移確率 (transition probability) を介して提案分布 (proposal distribution) から取り出されるサンプルは、目標分布から取り出されたサンプルに等しくなる。

これを上記 (4) 式に当てはめると、次の様に言える。サンプルの分布はマルコフチェーンの長さが増大するにつれて条件付確率密度関数 $q(\theta | F_i)$ に近づく。即ち、 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ がマルコフチェーンサンプルであるとしたとき、 θ_n は $n \rightarrow \infty$ となるにつれて $q(\theta | F_i)$ と同じ分布に従う。

3.1 定常分布と平衡方程式

確率変数がマルコフ過程に従うと仮定すると、十分なチェーン長さの経過後期待される状態確率はスタート時の値とは独立になり、チェーンはある定常分布に到達する。マルコフチェーンが定常分布 π^* に到達し、任意の特定状態にある確率ベクトルが初期条件と独立であるとすれば、定常分布は次式を満足する。

$$\pi^* = \pi^* P \quad (5)$$

定常分布を有するための唯一の十分条件は、全ての j, k に対して次式で表現される平衡方程式を保持することである。

$$P(j \rightarrow k) \pi_j^* = P(k \rightarrow j) \pi_k^* \quad \text{または} \quad P(j, k) \pi_j^* = P(k, j) \pi_k^* \quad (6)$$

ただし、 $P(j \rightarrow k) = P(j, k) = P(\theta_{i+1} = s_k | \theta_i = s_j)$

：状態空間 s_j から単一ステップで状態空間 s_k へ移動する遷移確率

この条件は πP の j 番目の要素が次式で表わされるので、 $\pi = \pi P$ を意味する。

$$(\pi P)_j = \sum_i \pi_i P(i \rightarrow j) = \sum_i \pi_j P(j \rightarrow i) = \pi_j \sum_i P(j \rightarrow i) = \pi_j$$

上式最後のステップは、行要素の合計が 1 となることにより導かれる。離散状態マルコフチェーンの基本的な考えは、連続状態マルコフ過程に一般化される。

3.2 Metropolisアルゴリズム, Metropolis-Hastingsアルゴリズム

提案分布から一連のサンプルを取り出すアルゴリズムを以下に示す。

(a) Metropolisアルゴリズム

1. 任意の初期値 θ_0 を設定し、カウンターを $t = 0$ とする。
2. 現行の θ 値を使用して、任意の提案分布 $q(\theta_1, \theta_2)$ から候補点 θ^* をサンプリングする。

提案分布は、 θ_1 を与えて θ_2 の値を返す確率密度関数である。

Metropolisアルゴリズムの提案分布に関する制約は、それが対称なことである。

$$q(\theta_1, \theta_2) = q(\theta_2, \theta_1) \quad (7)$$

3. 候補点 θ^* を目標分布 $p(\theta)$ に代入して、候補点 θ^* と現行点 θ_{t-1} の比を計算する。

$$\alpha = p(\theta^*)/p(\theta_{t-1}) \quad (8)$$

4. 確率 α で候補点を採択 $\theta_t = \theta^*$ 、確率 $(1-\alpha)$ で不採択 $\theta_t = \theta_{t-1}$ とする。

故に、Metropolisアルゴリズムに従う採択率は次の様に表わされる。

$$\alpha = \min\left(\frac{p(\theta^*)}{p(\theta_{t-1})}, 1\right) \quad (9)$$

5. $t = t+1$ として、ステップ2に戻る。

確率 α での候補点の採択は、 θ_{t-1} から θ_t への遷移確率が $(\theta_0, \dots, \theta_{t-2})$ ではなく θ_{t-1} のみに依存するようなマルコフチェイン $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$ を生成する。十分なburn-in (チェインが定常状態に到達する前段階のステップ数 k)の後、ベクトル $(\theta_{k+1}, \dots, \theta_{k+n})$ からのサンプルは $p(\theta)$ からのサンプルに等しくなる。

(b) Metropolis-Hastingsアルゴリズム

Hastingsは、任意の提案分布 $q(\theta_1, \theta_2) = Pr(\theta_1 \rightarrow \theta_2)$ を使用してMetropolisアルゴリズムを一般化し、候補点に対する採択率を次式の様に置いた。提案分布が対称、即ち $q(x, y) = q(y, x)$ であると仮定すると、元のMetropolisアルゴリズムに一致する。

$$\alpha = \min\left(\frac{p(\theta^*)q(\theta^*, \theta_{t-1})}{p(\theta_{t-1})q(\theta_{t-1}, \theta^*)}, 1\right) \quad (10)$$

3.3 提案分布からのサンプリングと目標分布の関係

Metropolis-Hastings遷移確率と目標分布 $p(x)$ で表わされた平衡方程式が満足されるとき、提案分布からのMetropolis-Hastingsサンプリングが、結果として目標分布 $p(x)$ に等しいマルコフチェインを生成することを以下に示す。

Metropolis-Hastingsアルゴリズムの下では提案分布 $q(x, y)$ からサンプリングし、採択率 $\alpha(x, y)$ で移動を採択する。その結果、遷移確率は提案分布と α を用いて次式で与えられる。

$$\text{遷移確率: } P(x \rightarrow y) = q(x, y)\alpha(x, y) = q(x, y) \cdot \min\left(\frac{p(y)q(y, x)}{p(x)q(x, y)}, 1\right) \quad (11)$$

一方、平衡方程式はMetropolis-Hastings遷移確率が全ての x, y に対して次式となる。

$$\text{平衡方程式: } q(x, y)\alpha(x, y)p(x) = q(y, x)\alpha(y, x)p(y) \quad (12)$$

平衡方程式は定常状態であるための十分条件であり、このとき定常分布は次式で表わされる。

$$\text{定常状態: } p^* = p^*P \quad (13)$$

ただし、 $p^* = p(x) = p(y)$

$$P = q(x, y)\alpha(x, y) \text{ または } P = q(y, x)\alpha(y, x)$$

MCMCでは採択率の式は平衡方程式が成立するよう定式化されており、その結果通常十分

なチェーン長さ経過後定常分布となり、提案分布から取り出されたサンプルは目標分布のそれに等しくなる。これはMCMC適用の際、サンプルの時系列が定常分布を示唆するwell mixing（ホワイトノイズに似たランダムな波形形状）となっていることの確認が重要であることを意味している。

3.4 提案分布の選択

提案分布が対称ならばMetropolisアルゴリズムを採用でき、そうでない一般的な場合にはMetropolis-Hastingsを採用しなければならない。このとき、最適な提案分布を選択することが、mixingの良し悪し、必要チェーン長さに影響を及ぼし重要となる。

mixingの形状は、後述する様に提案分布の標準偏差値を調節する（これはチェーンの採択率に影響を及ぼす）ことにより調整可能である。例えば、正規分布、多変数正規分布の分散あるいは共分散マトリックスの固有値、一様分布の区間 $[-a, a]$ 、 χ^2 分布の自由度（分散は自由度と共に増大）などが調節対象となる。標準偏差値が大き過ぎると候補点の移動が大きくなるが、しばしば不採択となり長いチェーンを必要とするpoorly mixingにつながる。標準偏差値が小さ過ぎるならば候補点の移動は高い採択率で採択されるが、その移動量は非常に小さくなり、やはりpoorly mixingにつながる。

4. 収束診断

発生したサンプルが定常状態に到達したか否かを調べる方法として、Geweke z-score, Raftery-Lewis収束診断 [8], [9] などをはじめとする各種の診断法がある [10]。ここでは、比較的簡便に使用でき有益な結果を返してくれるRaftery-Lewisの収束診断法について記す。

Raftery-Lewisの収束診断では、確率変数 θ の関数 U の事後分布に関する特定累積確率量 q (quantile) の計算に際して、確率 s で $\pm r$ の誤差範囲で $P[U \leq u | y]$ を評価したい場合、 q, r, s をデータとして与える。推奨値として $q=0.025, r=0.005, s=0.95$ が掲げられている。診断の結果返される値は、thinningステップ数 k （間引き数：メモリの節約に有効）、burn-inステップ数 M 、所要の精度を確保するためにburn-in後更に必要なステップ数と M の和；Total(N)、発生したサンプルが独立であると仮定した場合の最小ステップ数；Nmin, Total(N)のNminに対する比；I-stat=Total(N)/Nminの5つである。I-statが5を越える場合には、サンプル発生の初期値やチェーンの採択率に影響を及ぼす提案分布の標準偏差値を変更するなどの対応が必要であるとしている。なお、Raftery-Lewisの収束診断については、フリーのソースプログラム“gibbsit”が提供されており、そのmatlabバージョンがLeSageにより提供されている [11]。

また、文献 [9] には自動的に提案分布の標準偏差値を変更し（提案分布が正規分布の場合

にはサンプルの標準偏差値の2.3倍を更新後の標準偏差値とする), 次回の予測Total(N)が実行ステップ数を下回るまで複数回シミュレーションを繰り返す提案分布の標準偏差値を最適化するgeneric Metropolis algorithmシミュレーションが提示されている。

5. 解析例

以下の解析例は, generic Metropolis algorithmを組み込んだ自作のプログラムに, “gibbsit”のmatlabバージョンをリンクして得たものである。

5.1 Exaple 1

この例は, 目標分布を $N(\mu, \sigma) = N(0, 1)$, 初回のシミュレーション結果が意図的にpoorly mixingとなる様提案分布を $q(\cdot | X) = N(X, 0.1)$, $q(\cdot | X) = N(X, 10.0)$ と設定した例である。なお, 初回のステップ総数は600回, 2回目以降は $q = 0.025$, $r = 0.0125$, $s = 0.95$ として与えたRaftery-Lewisの収束診断に基づくステップ総数を実行した。

図-1は, 提案分布を $q(\cdot | X) = N(X, 0.1)$ とし標準偏差値が小さ過ぎて候補点の移動が小さ

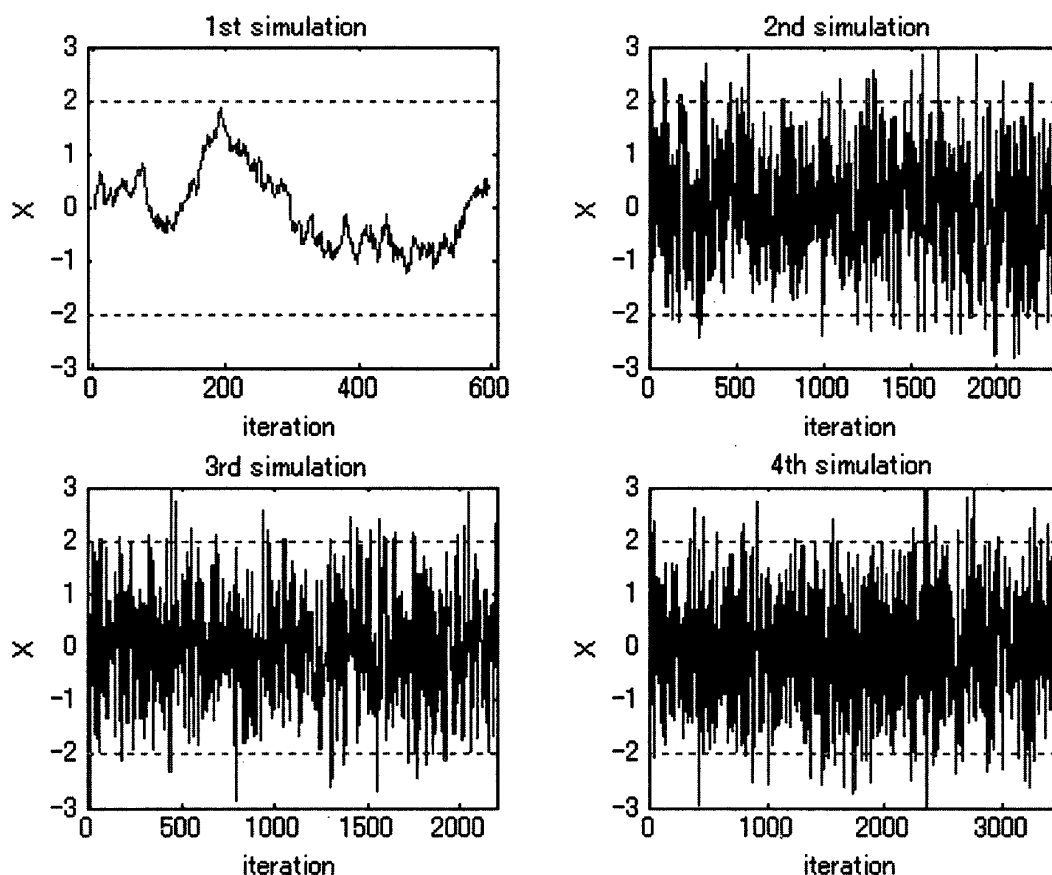


図-1 case-1 : 提案分布 $q(\cdot | X) = N(X, 0.1)$

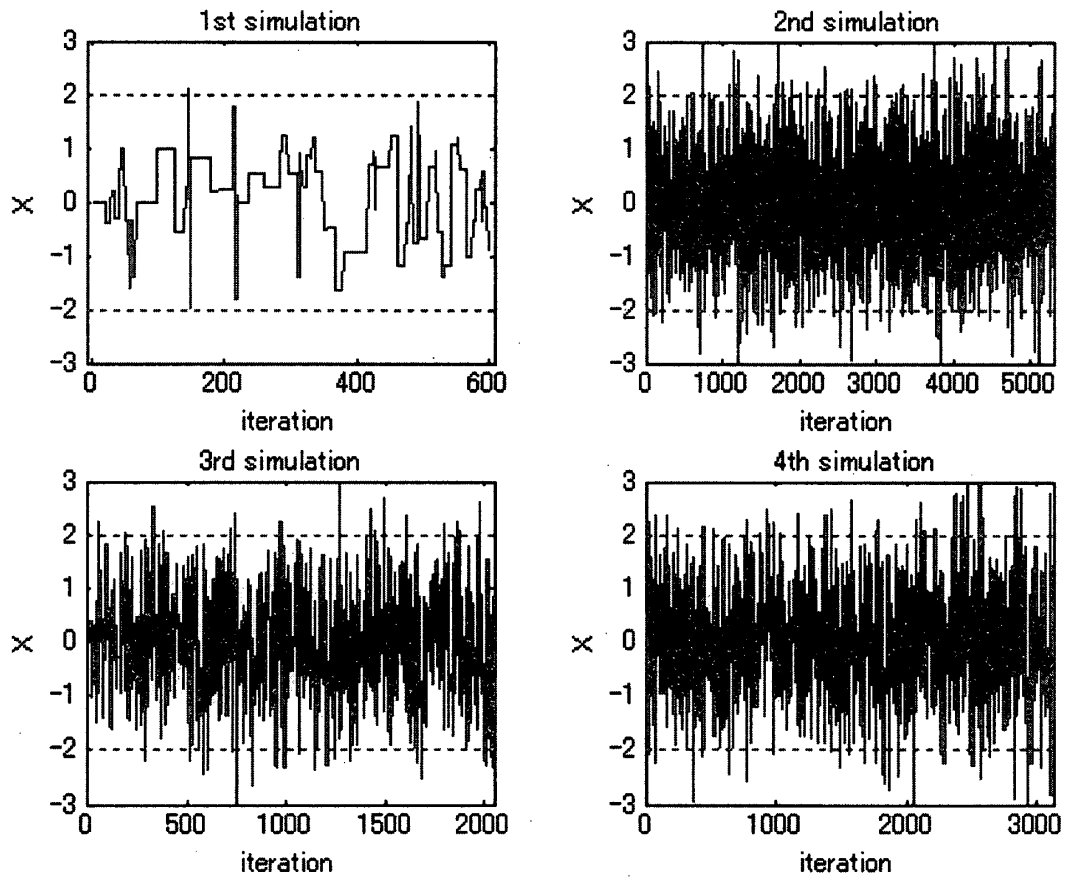


図-2 case-2 : 提案分布 $q(.|X) = N(X, 10.0)$

表-1 Raftery-Lewis Convergence Diagnostics (for $q=0.025, r=0.0125, s=0.95$)

(a) case-1

simulation no.	Thin	Burn	Total (N)	Nmin	I-stat	sample σ
1 st	1	14	2340	600	3.900	0.6978
2 nd	1	13	2190	600	3.650	1.0170
3 rd	1	20	3454	600	5.757	0.9759
4 th	1	12	2035	600	3.392	0.9592

(b) case-2

simulation no.	Thin	Burn	Total (N)	Nmin	I-stat	sample σ
1 st	1	30	5282	600	8.803	0.7745
2 nd	1	12	2041	600	3.402	1.0056
3 rd	1	17	3113	600	5.188	0.9840
4 th	1	14	2605	600	4.342	1.0238

く初回のシミュレーションの効率が悪い場合であり、図-2は同様に $q(.|X) = N(X, 10.0)$ とし標準偏差値が大き過ぎて不採択の割合が多くなり候補点があまり移動しない、やはり初回のシ

ミュレーションの効率が悪い場合である。同図より、初回がpoorly mixingなので2回目の総ステップ数が多くなるが、提案分布の標準偏差値を最適化する手続きを考慮することにより、収束完了までにpoorly mixingがwell mixingに改善されることが分かる。表-1は収束診断結果の一覧である。表に示した収束完了時のサンプル標準偏差値は、目標分布の標準偏差値1.0と良い一致を示すことが分かる。

5.2 Example 2

この例は、目標分布、提案分布を以下に示す式とした場合である。

$$\text{目標分布: } \pi(x) = 0.2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x+4)^2\right) + 0.8 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-4)^2\right) \quad (14)$$

$$\text{提案分布: } N(\mu, \sigma) = N(0, \sqrt{2}) \quad (15)$$

図-3によれば、初回のシミュレーション結果が著しいpoorly mixingであるにも拘らず、僅か3回で収束が完了している。図-3末尾の図は、収束完了時のサンプルを基にウィンドウ幅1のParzenウィンドウ処理をかけて平滑化した確率密度関数の分布形状を示したものである。同図から、サンプルから得た確率密度曲線は、概ね目標分布を表わす滑らかなbimodal形状に一致していることが分かる。

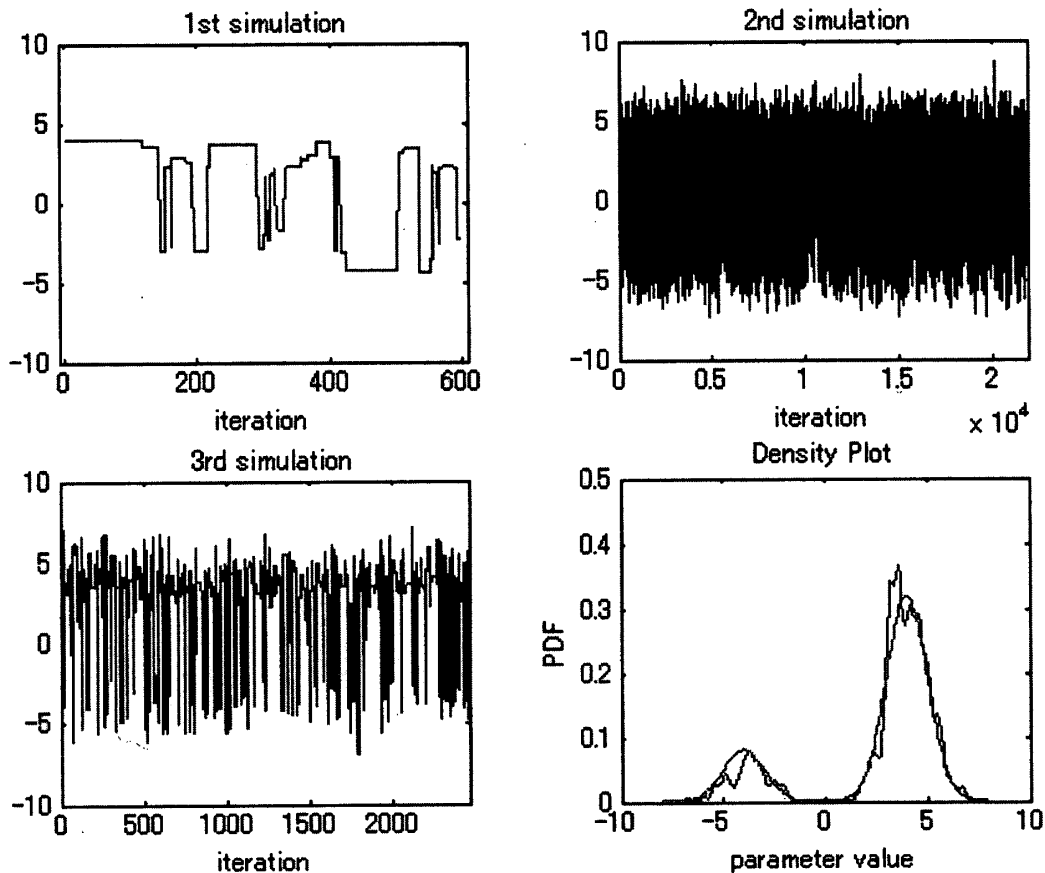


図-3 Bimodal Normal Mixture and Probability Density

表-2 Raftery-Lewis Convergence Diagnostics (for $q=0.025$, $r=0.0125$, $s=0.95$)

simulation no.	Thin	Burn	Total (N)	Nmin	I-stat	sample σ
1 st	1	111	21830	600	36.383	3.2242
2 nd	1	14	2465	600	4.108	3.3986
3 rd	1	14	2499	600	4.082	3.3378

5.3 Example 3

この例題では、文献 [12] に掲載されている直線式の限界状態を参照して与条件を同一とし、generic Metropolis algorithmシミュレーションの有効性を確認する。文献 [12] に示されている条件は、次の通りである。

確率変数 $x_1 : N(\mu, \sigma) = N(5, \sqrt{0.5})$, 確率変数 $x_2 : N(\mu, \sigma) = N(9, \sqrt{0.5})$

限界状態関数： $z = x_2 - x_1$ (16)

上式より z の分布形： $= N(\mu, \sigma) = N(4, 1)$

目標分布： $pdf(u | F_i) = \frac{I_{(0,1)}(u) I_{F_i}(u)}{P(F_i)}$ (17)

提案分布： $q(u' | u_k) = \frac{1}{2\alpha}; u_k - \alpha \leq u' \leq u_k + \alpha$
 $= 0; \text{otherwise}$ (18)

なお、subset法による破壊確率の算定式は、次式となる。

$$P(z < 0) = \left(\frac{n_s}{n_t}\right)^m \frac{n_f}{n_t} \quad (19)$$

ただし、 n_t ：部分空間 F_i におけるサンプル発生総数

n_s ：条件付破壊確率 $\{P(F_{i+1} | F_i) : i = 1, \dots, m-1\}$ に対応するサンプル数

この例では、 $n_s = 0.1n_t$

n_f ：最終チェーンレベルの $z < 0$ を満たすサンプル数、 $n_t > n_f > n_s$

m ：マルコフチェーンのレベル数

図-4～図-7は、 $n_t = 200$ 、(18)式に示した一様分布の提案分布定義区間規定パラメータを $a = 0.05$ とした場合の計算結果の一例である。図-4は、部分空間の境界線（図中の破線直線）が次第に(16)式の限界状態関数に近づく様子を示している。図-5は、限界状態関数 z に対応する累積分布の値について各チェーンレベルのサンプルに基づく結果と理論曲線を併記したものである。図-6は、確率変数 x_1 について各チェーンレベル毎に変化の推移を表示した結果、図-7は自己相関関数を用いて確率変数 x_1 の周期性の有無を調べた結果である。

図-6からチェーンレベルの進行に伴い x_1 の期待値が次第に増大すること、初回を除きいずれのチェーンレベルもpoorly mixingで $n_s = 20$ ステップ毎に同じ形状の波形が繰り返される様子が窺われる。後者については、図-7に示した自己相関関数のグラフから容易に確認できる。このような周期性が生じたのは、次のチェーンレベルに進む際に n_s 個に相当するサンプルのみ

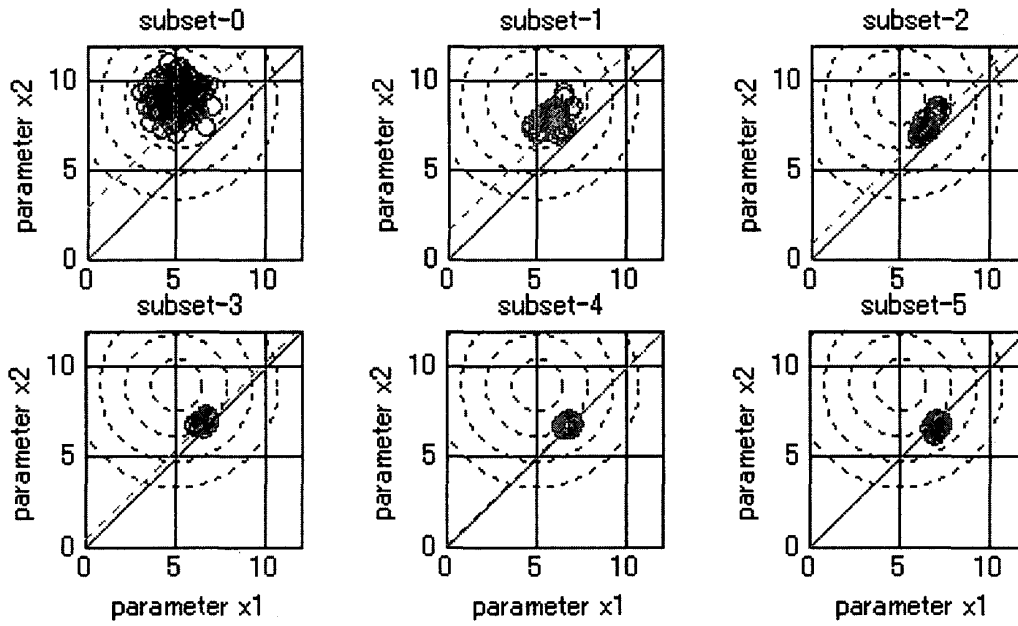


図-4 Transition of Subset

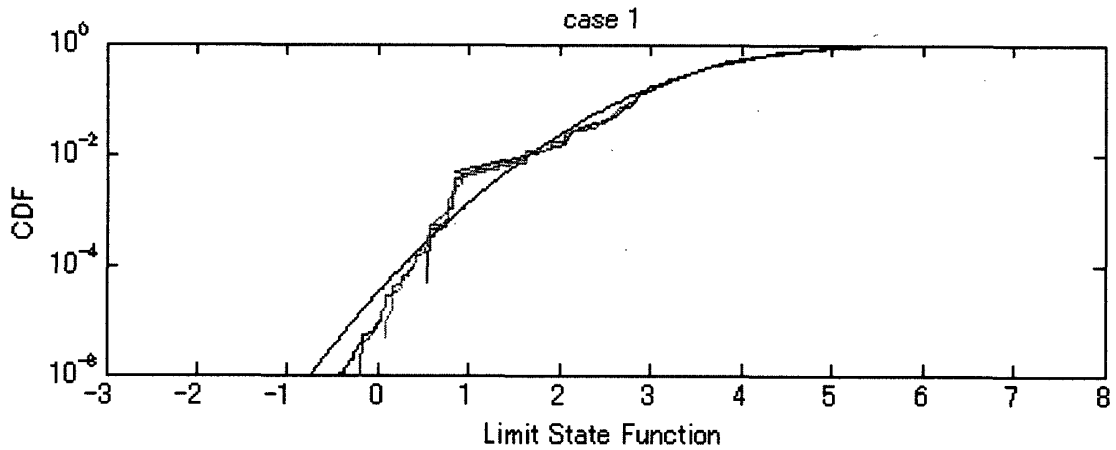


図-5 Limit State Function vs. Cumulative Distribution Function

をseedとして、seedの n_s 個に加えてMetropolisアルゴリズムによって $(n_t - n_s)$ 個のサンプルを発生させていることに起因する。

次に、generic Metropolis algorithmシミュレーションを考慮する際の本例題での取り扱いについて記す。上記で述べた様に n_s ステップ毎に周期性が現れるので、データ個数は非常に少ないが n_s 個のサンプルを基に提案分布の定義区間規定パラメータ a を更新して、これを次の n_s 個のサンプルに対して適用する。この操作を部分空間のサンプル総数が n_t になるまで繰り返すこととした。なお、この例では提案分布が一様分布であるので、更新後の a はサンプル標準偏差の $\sqrt{3}$ 倍とした。

図-8～図-13は、提案分布の定義区間規定パラメータ初期値を $a = 0.05$ とし、上記の取り

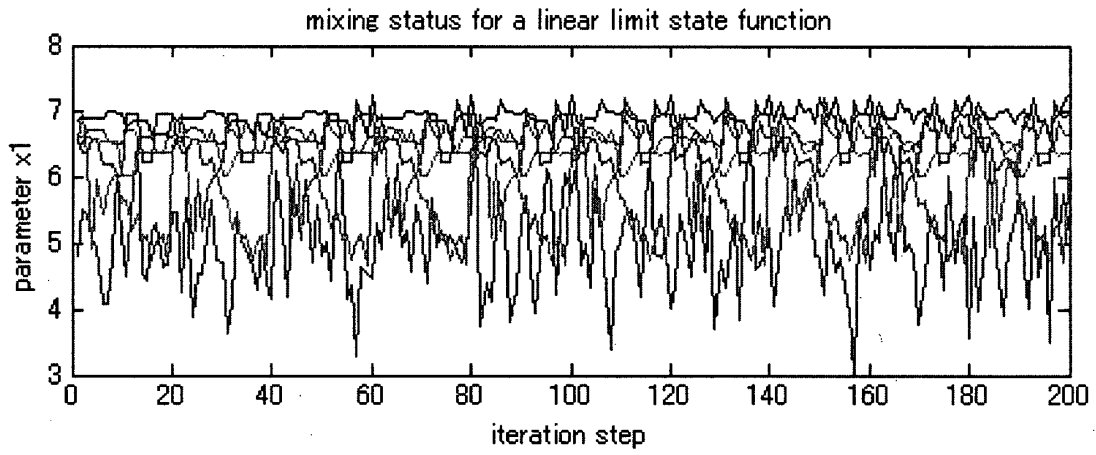


図-6 Transition of Variable x_1

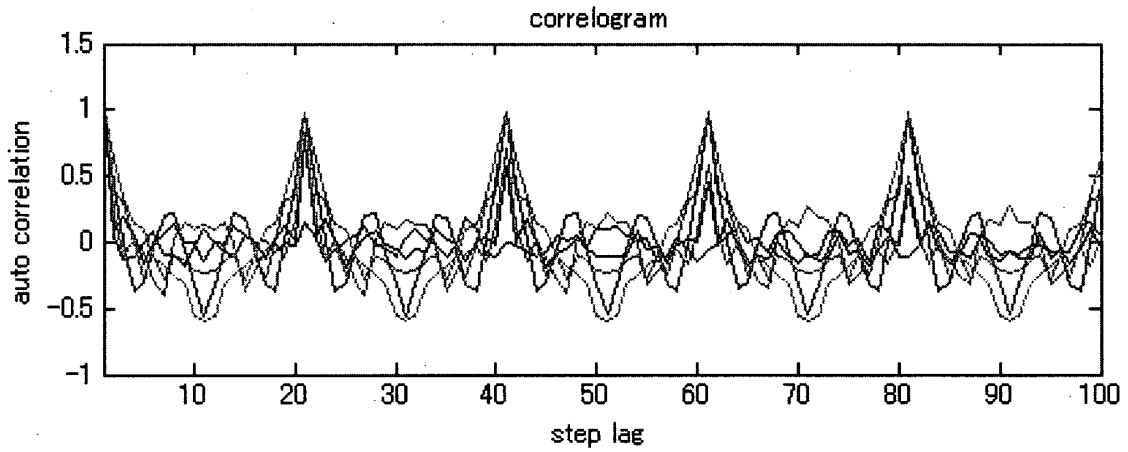


図-7 Auto Correlation on Variable x_1

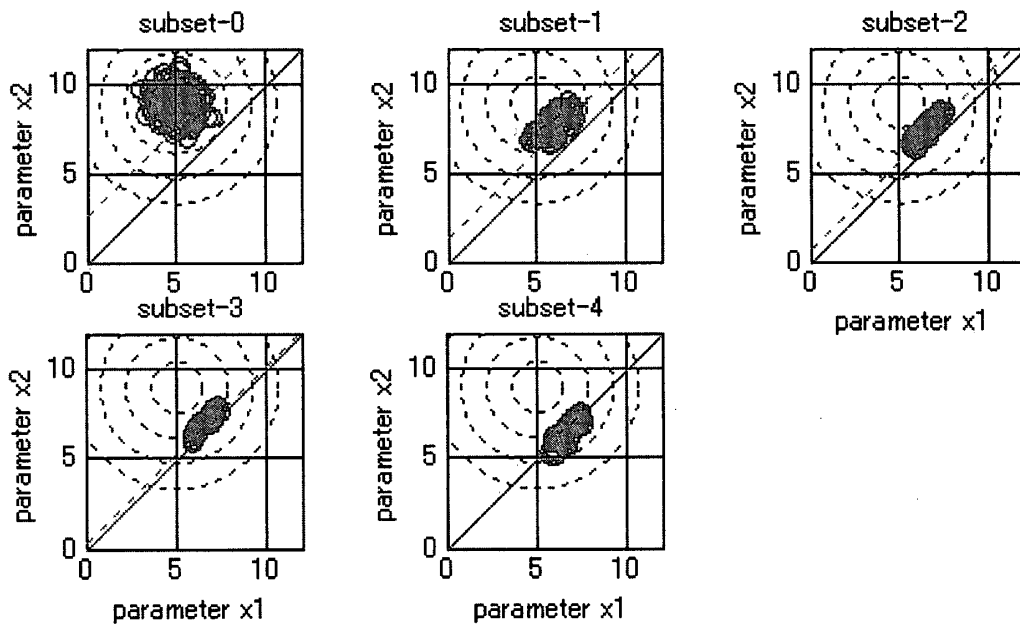


図-8 Transition of Subset

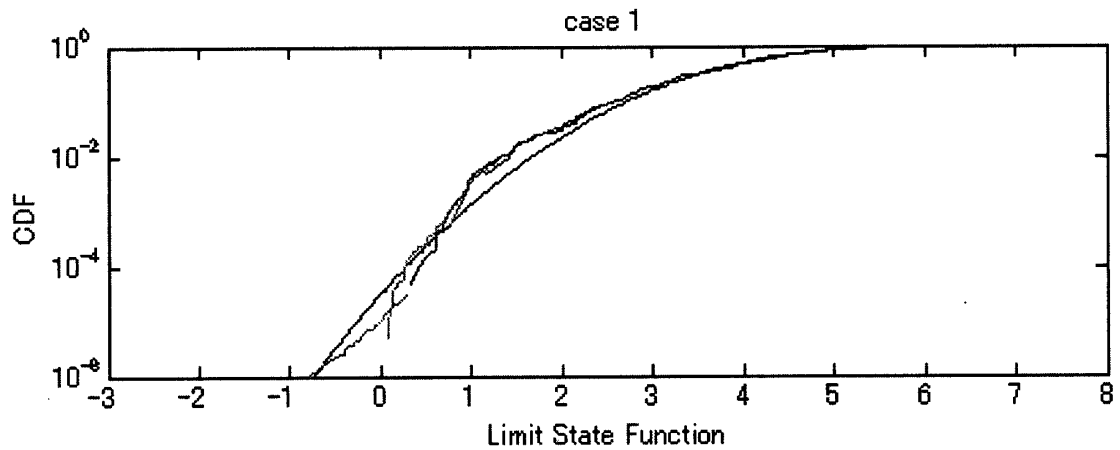


図-9 Limit State Function vs. Cumulative Distribution Function

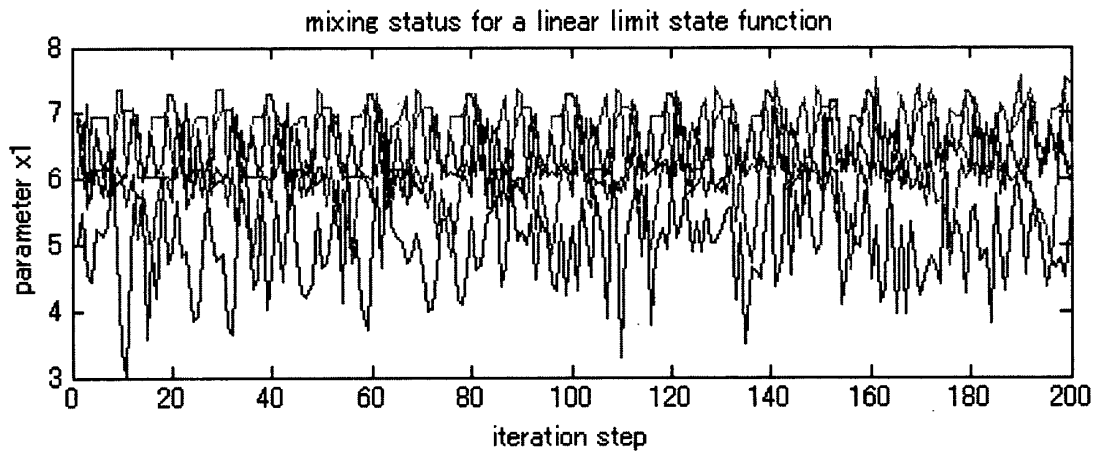


図-10 Transition of Variable x_1

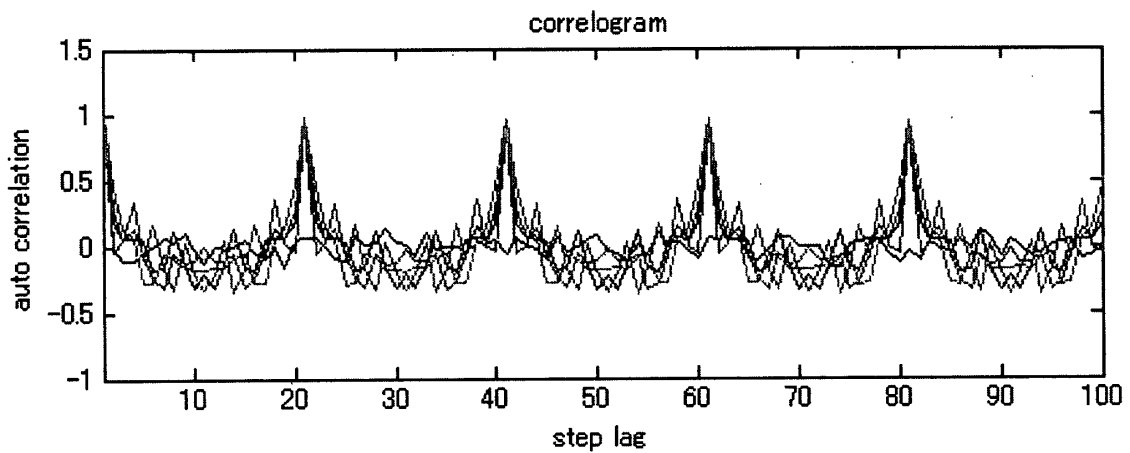


図-11 Auto Correlation on Variable x_1

扱いを行った計算結果の一例である。区間幅を規定する a の値を n_s ステップ毎に更新したため、図-10に示す様に見て明らかなpoorly mixingは解消されたが、図-11に示す自己相関関数の図上では、20ステップ間隔での周期性は残り、完全に解消するには至っていない。ただ

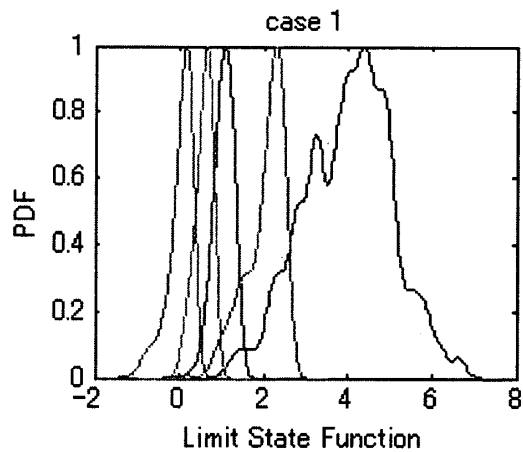
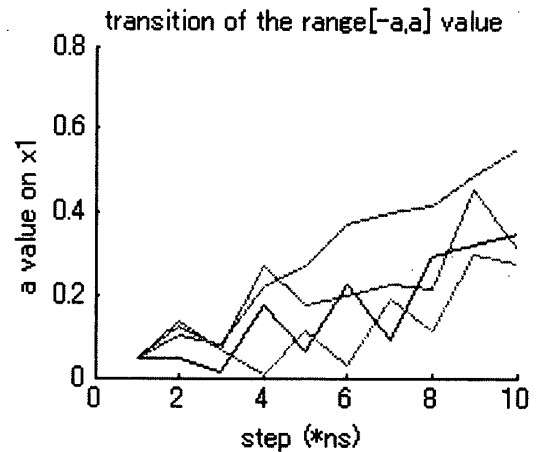


図-12 PDF at Each Chain Level

図-13 Transition of Parameter a 表-3 Raftery-Lewis Convergence Diagnostics (for $q=0.025$, $r=0.0125$, $s=0.95$)(a) constant parameter $a=0.05$

chain level	Thin	Burn	Total (N)	Nmin	I-stat
subset 0	1	2	574	600	0.957
subset 1	1	3	779	600	1.298
subset 2	1	3	1136	600	1.893
subset 3	2	8	3572	600	5.953
subset 4	1	4	2151	600	3.585
subset 5	1	3	876	600	1.460

(b) update parameter using a generic Metropolis algorithm

chain level	Thin	Burn	Total (N)	Nmin	I-stat
subset 0	1	5	871	600	1.452
subset 1	1	3	779	600	1.298
subset 2	1	2	574	600	0.957
subset 3	1	2	574	600	0.957
subset 4	1	2	678	600	1.130

し、図-7と比較すると、大きな自己相関関数値のステップ数が若干減少し、改善の傾向がみられる。

図-12は文献 [12] と同様の方法で求めた各チェーンレベルの基準化された確率密度関数、図-13は x_1 に関する提案分布の定義区間規定パラメータ a の推移を示したものである。図-13に示した n_s 個毎のステップの進行に伴う a の増大は、候補点の移動量増大につながる。

表-3は、各チェーンレベルのRaftery-Lewis収束診断結果である。同表 (a), (b) より、generic Metropolis algorithmシミュレーションを考慮することにより、ある一定精度を保障する最低必要繰り返し計算回数：Total(N)値がかなり低減することが分かる。

6. まとめ

Raftery, Lewisが提案したgeneric Metropolis algorithmをMCMC (Markov Chain Monte Carlo simulation) およびsubset MCMCの基本例題に適用し, 以下の結論を得た。

- (1) 例題1, 2のMCMCの検討については, 比較的少ないシミュレーション回数でRaftery, Lewisの収束判定基準を満たし, 目標分布を概ね近似する良好な結果が得られた。
- (2) 例題3のsubset MCMCの検討については, 次のチェインレベルに進む際に一定割合のサンプル数 n_s のみをseedとして新たな部分空間のサンプルを発生させている都合上, n_s ステップ毎の確率変数の周期性解消は, generic Metropolis algorithmを考慮しても限界があった。しかし, ある一定精度を保障する最低必要繰り返し計算回数はかなり低減されることが分かった。

MCMCを扱う上で主要な問題点は, シミュレーションが収束したか否か, 収束した定常状態から取り出されたサンプルが目標分布から取り出されたサンプルであると本当に見做すことが出来るか否かをどの様に判断するかである。今後は, これらについて検討を重ねると共に, 具体的な構造物の安全性評価にsubset MCMCを適用したいと考えている。

参 考 文 献

- [1] C. A. Cornell: "Presentation at SAC-2 Reliability Framework Meeting", San Francisco, April 3, 1997.
- [2] K. R. Collins, Y. K. Wen and D. A. Foutch: "Dual-Level Design: A Reliability-Based Methodology", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.25, No.12, 1996, pp.1433-1467.
- [3] Howard H. M. Hwang and Jing-Wen Jaw: "Probabilistic Damage Analysis of Structures", Journal of Structural Engineering, Vol.116, No.7, ASCE, July, 1990, pp.1992-2007.
- [4] F. Yamazaki, M. Shinozuka: "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1988, 114(8), pp.1335-1354.
- [5] S. K. Au and J. L. Beck: "Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamics Analysis", Journal of Engineering Mechanics, 2003, pp.901-917.
- [6] W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter: "Markov Chain Monte Carlo in Practice", Chapman & Hall, 1996.
- [7] B. Walsh: "Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling", Lecture note for EEB 596z, 2002.
- [8] A. E. Raftery and S. M. Lewis: "How Many Iterations in the Gibbs Sampler?", In Bayesian Statistics 4, Oxford: University Press, pp.763-773. <http://www.stat.washington.edu/www/research/online/>
- [9] A. E. Raftery and S. M. Lewis: "The Number of Iterations, Convergence Diagnostics and Generic Metropolis Algorithms", <http://www.stat.washington.edu/www/research/online/>
- [10] M. K. Cowles and B. P. Carlin: "Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review", Journal of American Stat. Assoc., 91, 1996, pp.883-904.
- [11] download URL of matlab source program written by James P. LeSage, <http://www.spatial-econometrics.com/>
- [12] 吉田郁政, 鈴木修一: "MCMCを用いた低損傷確率の算定法", 第10回信頼性設計技術ワークショップ報告書, 2003年8月, pp.99-106.