タイトル	衝突現象の数理とその課題
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎
引用	北海学園大学工学部研究報告，32：117-131
発行日	2005-02-21

衝突現象の数理とその課題

世戸　憲治*　　　野中　泰二郎†

A Mathematical Analysis of a Collision Phenomenon and Its Problem

Kenji SETO and Taijiro NONAKA

超高層ビルを一本の弾性棒として扱い，そこに他の飛来物が衝突したときの振動を，波動方程式の立場で解析する．衝突したときの衝撃を表わす物理量として，力積 I_m を用い，衝突は，時間的にも空間的にも１点で起こるものとする．また，最後に，この解析の問題点を議論する．

0　はじめに

この論文では，超高層ビルに，他の飛来物が衝突したときの振動を波動方程式の立場で解析する．超高層ビルはモデル化し，１本の弾性棒として扱う．

一般論として，弾性棒の高さ s, 時刻 t において，横から単位長さあたり $f(s,t)$ の力が作用するとき，単位長さあたりのポテンシャルエネルギー U は，その点における変位を $V(s,t)$ としたとき，

$$U = -f(s,t)V(s,t) \tag{0.1}$$

で与えられる．この表式は，風による力の影響を解析する場合などは，そのまま使えるが，衝突による衝撃の解析に対しては，適当ではない．ここでの衝撃は，構造物全体から見ると，１点 s_0 で起こると考えて差し支えない．このときは，力 $f(s,t)$ の中から s 依存部分を Dirac のデルタ関数を用いて引き出し，

$$f(s,t) \quad \rightarrow \quad \left[\int f(s',t)ds'\right] \delta(s-s_0) \tag{0.2}$$

と置き直してもよいだろう．これは，実際にはある程度の広がりを持って作用する力を１点 s_0 に集中させることでもある．以下，ここに表れる $f(s',t)$ の s' 積分，すなわち，時刻 t に弾性棒に作用する力を $F(t)$ と書く．

さらに，この衝撃は，時刻 t_0 に，一瞬にして起こるものと考えると，時間的にもデルタ関数として，力 $F(t)$ を，

$$F(t) \ \rightarrow \ \left[\int F(t')dt'\right] \delta(t-t_0) \tag{0.3}$$

* 北海学園大学　工学部　建築学科
† 中部大学　総合工学研究所

と置くことも許されるであろう．ここで，力 $F(t)$ の時間積分は，弾性棒に与えられる力積であり，これを以後 I_m と記すことにすると，ポテンシャルエネルギー U は，

$$U = -I_m\delta(s-s_0)\delta(t-t_0)V(s,t) \tag{0.4}$$

と表わされる．弾性棒に与えられる力積 I_m は，飛来物が衝突したときの運動量の変化 ΔP の符号を替えたものであり，これは，飛来物の質量 m, 衝突速度 v_0, 反射速度 v_1 によって，$I_m = -\Delta P = m(v_0 - v_1)$ で与えられる．このように，デルタ関数を用いて表現したことによって，エネルギーを観測可能量のみで表示することができ，同時に，途中の計算過程を簡易化することができる．しかし，これは一種の理想化であり，もちろん，現実の衝撃ではそうはなっていない．この点については，この論文の最後で議論する．

1　波動方程式の導入

方程式の導入，および，途中の計算過程は，超高層ビルの地震振動を解析した前回の論文*1と類似的な方法をとる．この点で前回の論文と重複する部分もあるが，すべての過程を省略せずに記すことにする．

ここでは，超高層建築物を一本の弾性棒と考えるので，以下， Young 率 E , 剛性率 G, 密度 ρ 等の材料定数はもちろんのこと，断面積 A , 断面２次モーメント I 等も，高さによらず一定値をとるものとする．

振動がないときの棒の主軸にそって，s 軸をとる．振動しているとき，時刻 t, 点 s において主軸が傾いた角度を $\theta(s,t)$ とし，また主軸に垂直な面（床面）が傾いた角度を $\phi(s,t)$ とする．もし，剪断変形を考えないときは，$\theta = \phi$ であるが，ここでは剪断変形を取り入れるので一般に $\theta \neq \phi$ である．

横方向変位を $V(s,t)$ とすると，これと θ の関係は，

$$V(s,t) = \int_0^s \sin\theta\, ds. \tag{1.1}$$

以下，時間 t および高さ s に関する微分を，その添え字で表わすことにする．

単位長さあたりのエネルギーは

$$\left.\begin{aligned}
&T = \frac{1}{2}\rho A {V_t}^2 = \frac{1}{2}\rho A\left[\int_0^s (\sin\theta)_t ds\right]^2, && \text{横方向の振動エネルギー}\\
&U_1 = \frac{1}{2}EI\phi_s^2, \quad \text{曲げ変形によるエネルギー}, && \phi_s \text{ は曲率}\\
&U_2 = \frac{1}{2}GA\gamma^2, \quad \gamma = \theta - \phi, && \text{剪断変形によるエネルギー}\\
&U_3 = \rho A g\int_0^s \cos\theta ds, \quad \text{重力エネルギー}, && g \text{ は重力加速度}\\
&U_4 = -I_m\,\delta(t-t_0)\delta(s-s_0)\int_0^s \sin\theta ds, && \text{衝突によるエネルギー}, I_m \text{ は力積}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

*1 「超高層ビルは地震に対して安全か？(1), (2)」北海学園大学工学部紀要，２００２，２００３

で与えられる．

ここで，棒の長さを L としたときの Lagrangian $\mathcal{L}$ を，

$$\mathcal{L} = \int_0^L (T - U_1 - U_2 - U_3 - U_4)\, ds \tag{1.3}$$

と定義し，この Lagrangian から作用積分

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L} dt \tag{1.4}$$

を作る．ここで，θ を独立変数として，$\mathcal{I}$ の変分をとると，

$$\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta \theta(s,t)} = 0$$

から

$$-\left[\int_s^L \rho A V_{tt}(s',t) ds'\right] \cos\theta + \left[\int_s^L \rho g A ds'\right] \sin\theta + I_m\, \delta(t-t_0)\theta(s_0-s)\cos\theta \\ - GA(\theta-\phi) = 0 \tag{1.5}$$

を得る．ここに，$\theta(s_0 - s)$ は，step 関数である．

この式の第１項目は，高さ s より上にある部分が受ける慣性力の軸に垂直な成分であり，第２項目は同じく高さ s より上にある部分が受ける重力の軸に垂直な成分である．また，第３項目は，s が s_0 より小さいとき，それより上の s_0 点に衝突した物体から受ける力の軸に垂直な成分である．したがって，この式はこれらの合計と，点 s において，それより下にある部分が上におよぼす剪断力との和がゼロであることを示す．

また，変分

$$\frac{\delta \mathcal{I}}{\delta \phi(s,t)} = 0$$

から

$$\left[EI\phi_s\right]_s + GA(\theta - \phi) = 0 \tag{1.6}$$

を得る．これは，距離 ds 間の曲げモーメント $EI\phi_s$ の差が剪断力になっていることを示す．

(1.1) から

$$V_s = \sin\ \theta \tag{1.7}$$

であるが，以下では線形近似をとって，$\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$ とする．また，ここまでは，E, G, ρ, A, I 等の各係数は高さ依存性を持つ場合でも扱える式であるが，以下では，これら係数はすべて一定値をとるものとして扱う．

この近似で，方程式 (1.5) (1.6) は

$$-\rho A \int_s^L V_{tt}(s',t) ds' + \rho g A(L-s)V_s - GA(V_s - \phi) + I_m \delta(t-t_0)\theta(s_0-s) = 0 \tag{1.8}$$

および

$$EI\phi_{ss} + GA(V_s - \phi) = 0 \tag{1.9}$$

となり，またこれら２式の和をとると

$$-\rho A\int_s^L V_{tt}(s',t)ds' + \rho gA(L-s)V_s + EI\phi_{ss} + I_m\delta(t-t_0)\theta(s_0-s) = 0 \qquad (1.10)$$

となる．

(1.8) から ϕ を求め (1.9) に代入しさらに微分すると，横方向変位 V だけの方程式

$$\rho A\left(1-\frac{EI}{GA}\partial_s^2\right)V_{tt} = -EIV_{ssss} - \rho gA\left(1-\frac{EI}{GA}\partial_s^2\right)\left[(L-s)V_s\right]_s + I_m\left(1-\frac{EI}{GA}\partial_s^2\right)\delta(t-t_0)\delta(s-s_0) \qquad (1.11)$$

を得，同様に，(1.9) から V_s を求め２度微分した (1.10) に代入すると ϕ のみの方程式

$$\rho A\left(1-\frac{EI}{GA}\partial_s^2\right)\phi_{tt} = -EI\phi_{ssss} - \rho gA\left[(L-s)\left(1-\frac{EI}{GA}\partial_s^2\right)\phi\right]_{ss} + I_m\delta(t-t_0)\delta_s(s-s_0) \qquad (1.12)$$

を得る．ここで，デルタ関数の微分はそのまま残して記すことにする．

この方程式に，境界条件を付加しよう．まず，(1.1) から与えられる条件，建物基底部は動かないものとして，

$$V(0,t) = 0 \qquad (1.13)$$

とする．また，基底部は埋め込みになっていて，床面の傾きはないものとすると，

$$\phi(0,t) = 0 \qquad (1.14)$$

となる．

建物最上部では，曲げモーメントがない，言い換えると曲率がゼロとなることから，

$$\phi_s(L,t) = 0 \qquad (1.15)$$

となり，もう１つ，方程式 (1.10) で $s=L$ と置くと

$$\phi_{ss}(L,t) = 0 \qquad (1.16)$$

となる．これは，建物最上部では剪断力がないことを意味する．

初期条件の方は，衝突が始まる前は完全に静止していたという条件

$$V(s,0) = 0, \qquad \phi(s,0) = 0 \qquad (1.17)$$

$$V_t(s,0) = 0, \qquad \phi_t(s,0) = 0 \qquad (1.18)$$

を付加する．

2 方程式の解法

前節で導いた方程式の解法を考える．以下では，衝突のない状態，すなわち，方程式 (1.8) (1.10) において I_m を含む項をすべて除いた，斉次部分の方程式についてその固有関数を求める．

まず，高さ方向の固有関数を求めるために，この方程式の角振動数 ω の振動部分だけを取り出して

$$V(s,t) = L\Delta(\omega,s)T(\omega,t), \qquad \phi(s,t) = \Phi(\omega,s)T(\omega,t) \tag{2.1}$$

と変数分離する．ここに，時間部分 $T(\omega,t)$ は，当分の間，

$$T(\omega,t) = e^{i\omega t} \tag{2.2}$$

と定義しておく．

以下，この変数分離を用いて，Δ, Φ が満たすべき方程式を導入するが，その前に変数の無次元化をしておこう．まず，長さ s を無次元化して，

$$x = s/L \tag{2.3}$$

とする．また，時間の次元を持つ 1 個の定数 τ を

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}, \tag{2.4}$$

および，2 個の無次元定数 μ, ν を

$$\mu = \sqrt{\frac{\rho g A L^3}{EI}}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{\rho g L}{G}} \tag{2.5}$$

と定義しておく．時定数 τ は，高さ L から物体を落下させたときの時間を $\sqrt{2}$ で割ったものである．また，無次元量 μ, ν は，曲げ変形効果，剪断変形効果に対応するもので，それぞれ，曲げやすさ，潰れやすさを表わす量と見なされる．

これを方程式 (1.9) および (1.10) に適用すると，

$$\nu^2\Phi_{xx} + \mu^2(\Delta_x - \Phi) = 0 \tag{2.6}$$

および

$$(\mu\tau\omega)^2\int_x^1 \Delta(x')dx' + \mu^2(1-x)\Delta_x + \Phi_{xx} = 0 \tag{2.7}$$

を得る．

(2.6) と (2.7) から Δ_x を消去し，1 階微分すると，式

$$(\mu\tau\omega)^2\Delta = \Big[(1-x)\big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\Phi\Big]_x + \Phi_{xxx} \tag{2.8}$$

を得る．また，この式をもう 1 度微分してから (2.6) と再び Δ_x を消去すると Φ のみが満たす式

$$-(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)(\tau\omega)^2\Phi + \Big[(1-x)\big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\Phi\Big]_{xx} + \Phi_{xxxx} = 0 \tag{2.9}$$

が得られる．

同様に，(2.6) と (2.7) とから Φ_{xx} を消去した式を作り，その式から Φ を求め，(2.6) に代入すると，Δ が満たすべき方程式

$$-(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)(\tau\omega)^2\Delta + \big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\big[(1-x)\Delta_x\big]_x + \Delta_{xxxx} = 0 \tag{2.10}$$

を得る．もちろんこれらの式は (1.11) (1.12) から直接導くこともできる．

ここでは，境界条件がより簡単な形をしている Φ の方から解いていこう．(1.14) から (1.16) までの条件は Φ で表わすと

$$\Phi(0) = 0, \tag{2.11}$$

および

$$\Phi_x(1) = 0, \qquad \Phi_{xx}(1) = 0 \tag{2.12}$$

となる．

もう 1 つの条件である (1.13) については，Δ の条件になっているので，(2.8) 式を用いてこれを Φ の条件に変換しなければならない．結果は，

$$(\mu\tau\omega)^2\Delta(0) = \mu^2\Phi_x(0) + \nu^2\Phi_{xx}(0) + \left(1-\nu^2\right)\Phi_{xxx}(0) = 0 \tag{2.13}$$

となる．(2.8) から直接導いたときは中辺に $-\mu^2\Phi(0)$ が付くが，この項は (2.11) の条件によって除かれることに注意する．

これらの条件の基に方程式 (2.9) を解くわけであるが，これにうまく当てはまるような特殊関数などは見当たらないようである．ここではこの方程式を級数展開の方法で解くことにしよう．

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (1-x)^k \tag{2.14}$$

と置き，(2.9) に代入すると係数 C_k の関係式

$$\begin{aligned}(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)\,C_{k+4} &- \nu^2(k+3)(k+2)^2(k+1)\,C_{k+3} \\ &+ (\nu\tau\omega)^2(k+2)(k+1)\,C_{k+2} + \mu^2(k+2)(k+1)\,C_{k+1} - (\mu\tau\omega)^2\,C_k = 0, \\ &k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\end{aligned} \tag{2.15}$$

を得る．この式から，C_0，C_1，C_2，C_3 の 4 個を初期値として，他のすべての C_k を原理的に決定できる．

ここで境界条件 (2.12) を考慮すると，これら 4 個の初期値のうち，

$$C_1 = C_2 = 0 \tag{2.16}$$

でなければならない．残る C_0，C_3 は自由であるが，

$$C_0 = 1, \qquad C_3 = 0 \tag{2.17}$$

と取った系列と

$$C_0 = 0, \qquad C_3 = 1 \tag{2.18}$$

としたものの 2 つの系列があり得る．以下，(2.17) の系列から求めた $\Phi(x)$ を $F(x)$，(2.18) の系列から求めたものを $G(x)$ と記すことにする．一般の $\Phi(x)$ はこの 2 つの $F(x)$，$G(x)$ の線形結合であり，

$$\Phi(x) = A\,F(x) + B\,G(x) \tag{2.19}$$

と書ける．さらに，(2.11) の境界条件を満たすためには，全体にかかる係数は別として，A, B の比がきまるので

$$\Phi(x) = G(0)F(x) - F(0)G(x) \tag{2.20}$$

と書ける．

最後に，この Φ を残る条件 (2.13) に代入して，

$$\begin{aligned}(\mu\tau\omega)^2\Delta(0) = G(0)\Big[\mu^2 F_x(0) + \nu^2 F_{xx}(0) + \big(1-\nu^2\big)F_{xxx}(0)\Big] \\ - F(0)\Big[\mu^2 G_x(0) + \nu^2 G_{xx}(0) + \big(1-\nu^2\big)G_{xxx}(0)\Big] = 0\end{aligned} \tag{2.21}$$

となる．これを満たすための任意定数はもはや存在せず，方程式に含まれる固有角振動数 ω を決めるための固有値方程式となる．この方程式から，離散的な無限個の ω の値が（正しくは $\tau\omega$ の値が），２つのパラメータ μ, ν に依存した形で決定される．

以下，この固有値 ω を小さい方から ω_i ($i = 1$, 2, 3, $\cdots$) と記すことにしよう．それに対応して，固有関数の方も，$\Phi(\omega_i, x)$ と記す．

3 固有関数の直交性

固有値とは限らない２つの角振動数 ω, ω' と，それらに対応して方程式 (2.9) を満たす２つの関数 $\Phi(\omega, x)$, $\Phi(\omega', x)$ を考える．以下，記号簡略化のため

$$\Phi = \Phi(\omega, x), \qquad \Phi' = \Phi(\omega', x) \tag{3.1}$$

のように記す．また，数式簡略化のためつぎの量 $K(\omega, x)$ を

$$K(\omega, x) = (1-x)\big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\Phi + \Phi_{xx} \tag{3.2}$$

と定義し，以下，(3.1) と同じように

$$K = K(\omega, x), \qquad K' = K(\omega', x) \tag{3.3}$$

と記す．

これを用いて (2.8) (2.9) を

$$(\mu\tau\omega)^2\Delta = K_x \tag{3.4}$$

$$-(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)(\tau\omega)^2\Phi + K_{xx} = 0 \tag{3.5}$$

と書き直しておく．

方程式 (3.5) を用いると容易に次の式

$$\begin{aligned}&\partial_x\big(\omega^2 KK'_x - \omega'^2 K'K_x\big) \\ &= \big(\omega^2 - \omega'^2\big)K_x K'_x + (\tau\omega\omega')^2\Big[K\cdot\big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\Phi' - K'\cdot\big(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2\big)\Phi\Big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

が証明できる．右辺の２項目は K の定義 (3.2) を用いるとより簡単化され，

$$\partial_x\big(\omega^2 KK'_x - \omega'^2 K'K_x\big) = \big(\omega^2 - \omega'^2\big)K_x K'_x - (\mu\tau\omega\omega')^2\partial_x(\Phi\Phi'_x - \Phi'\Phi_x) \tag{3.7}$$

となり，さらに，(3.4) を用いて K_x を Δ で表わすと

$$\partial_x\big(K\Delta' - K'\Delta\big) = (\mu\tau)^2(\omega^2 - \omega'^2)\Delta\Delta' - \partial_x\big(\Phi\Phi'_x - \Phi'\Phi_x\big) \tag{3.8}$$

となる．

ここまでは ω, ω' が固有値であるなしにかかわらず成立する式であった．ここで，ω, ω' が固有値である場合を考えよう．まず，Φ, Φ' が (2.11) (2.12) の条件を満たすものとしよう．このとき，(3.8) 式を 0 から 1 まで積分すると，$K(1) = 0$ に注意して，

$$\int_0^1 \Delta\Delta' dx = -\frac{K(0)\Delta'(0) - K'(0)\Delta(0)}{(\mu\tau)^2(\omega^2 - \omega'^2)} \tag{3.9}$$

となる．

さらに，ここで２つの角振動数 ω, ω' が固有値方程式 (2.21) を満たす相異なる固有値 ω_i, ω_j とするとこの式の右辺はゼロとなり，固有関数の直交性がでる．同じ固有値をとるときは，まず先に $\omega' = \omega_i$ とおき，その後で，$\omega \to \omega_i$ の極限をとる．この結果，最終的な直交式

$$\int_0^1 \Delta(\omega_i, x)\Delta(\omega_j, x)dx = \frac{K(\omega_i, 0)}{2(\mu\tau)^2\omega_i}\big[\partial_\omega\Delta(\omega, 0)\big]_{\omega=\omega_i}\delta_{i,j} \tag{3.10}$$

を得る．

ここで，固有関数 $\Delta(\omega_i, x)$ が完備であるとすると，関係式，

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(\mu\tau)^2\omega_i}{K(\omega_i, 0)\big[\partial_\omega\Delta(\omega, 0)\big]_{\omega=\omega_i}}\Delta(\omega_i, x)\Delta(\omega_i, x') = \delta(x - x') \tag{3.11}$$

が成立する．また，この式で x を x_0 とおいてから，x' で，x から 1 まで積分する．このとき，(3.4) から導かれる積分式

$$\int_x^1 \Delta(\omega_i, x')dx' = -\frac{K(\omega_i, x)}{(\mu\tau\omega_i)^2} \tag{3.12}$$

を利用して，

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\Delta(\omega_i, x_0)K(\omega_i, x)}{\omega_i K(\omega_i, 0)\big[\partial_\omega\Delta(\omega, 0)\big]_{\omega=\omega_i}} = \theta(x_0 - x) \tag{3.13}$$

となる．

これらの式 (3.11) (3.12) (3.13) はつぎの節で使う．

4 初期値問題

ここで，非斉次方程式 (1.11) に戻って，この方程式の初期値問題を解く．(2.3) (2.4) (2.5) を用いて，この方程式を無次元化すると，

$$(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)\tau^2 V_{tt} = -V_{xxxx} - (\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)\big[(1-x)V_x\big]_x + L\tau_0(\mu^2 - \nu^2\partial_x^2)\delta(t - t_0)\delta(x - x_0) \tag{4.1}$$

ここで，時間の次元を持つ 1 個の定数 τ_0 を

$$\tau_0 = \frac{I_m}{P}, \qquad P = \rho g A L \tag{4.2}$$

と定義した．なお，この方程式は，Green の方程式であり，これを解くことは，Green 関数を求める方法が使える．ここでの解法もこれに習う．

この方程式を解くために，変位 $V(x,t)$ を，固有関数 $\Delta(\omega_i,x)$ で

$$V(x,t) = L\sum_{i=1}^{\infty}\Delta(\omega_i,x)T(\omega_i,t) \tag{4.3}$$

と展開する．固有関数は方程式 (2.10) を満たすので，これを (4.1) に代入すると，

$$\tau^2\sum_{i=1}^{\infty}(\partial_t^2+\omega_i^2)T(\omega_i,t)\Delta(\omega_i,x) = \tau_0\delta(t-t_0)\delta(x-x_0) \tag{4.4}$$

ここで，両辺に付く，$(\mu^2-\nu^2\partial_x^2)$ をはずした．この操作は，以下に得られる解が，すべての条件を満たす正しい解であることによって，正当化される．

ここでさらに，右辺の $\delta(x-x_0)$ に (3.11) の完備性の式を用い，固有関数の独立性を用いると，$T(\omega_i,t)$ に関する方程式

$$(\partial_t^2+\omega_i^2)T(\omega_i,t) = \frac{2\tau_0\mu^2\omega_i\Delta(\omega_i,x_0)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\delta(t-t_0) \tag{4.5}$$

を得る．この方程式は簡単に解け，初期条件 $T(\omega_i,0)=0$，$T_t(\omega_i,0)=0$ を満たす解は，

$$T(\omega_i,t) = \frac{2\tau_0\mu^2\Delta(\omega_i,x_0)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\sin\left[\omega_i(t-t_0)\right]\theta(t-t_0), \tag{4.6}$$

したがって，最終的な解は，

$$V(x,t) = L\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\tau_0\mu^2\Delta(\omega_i,x_0)\Delta(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\sin\left[\omega_i(t-t_0)\right]\theta(t-t_0) \tag{4.7}$$

となる．

横方向変位 $V(x,t)$ が求まったので，床面の角度 $\phi(x,t)$ をつぎのように求める．まず，(4.3) (2.6) (4.5) から，V_s および，V_{tt} を求める．

$$V_s(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\Delta_x(\omega_i,x)T(\omega_i,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\Phi(\omega_i,x)-(\nu/\mu)^2\Phi_{xx}(\omega_i,x)\right]T(\omega_i,t) \tag{4.8}$$

$$V_{tt}(x,t) = L\sum_{i=1}^{\infty}\Delta(\omega_i,x)\left[\frac{2\tau_0\mu^2\omega_i\Delta(\omega_i,x_0)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\delta(t-t_0)-\omega_i^2T(\omega_i,t)\right] \tag{4.9}$$

(4.9) 式を x について積分すると，(3.12) から，

$$\int_x^1 V_{tt}(x',t)/L\,dx' = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{K(\omega_i,x)}{(\mu\tau\omega_i)^2}\left[\frac{2\tau_0\mu^2\omega_i\Delta(\omega_i,x_0)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\delta(t-t_0)-\omega_i^2T(\omega_i,t)\right] \tag{4.10}$$

となるが，(3.13) 式を利用すると，この式は，

$$\int_x^1 V_{tt}(x',t)/L\,dx' = \frac{1}{(\mu\tau)^2}\left[\tau_0\mu^2\theta(x_0-x)\delta(t-t_0)+\sum_{i=1}^{\infty}K(\omega_i,x)T(\omega_i,t)\right] \tag{4.11}$$

他に，(1.8) 式を無次元化した式,

$$-(\nu\tau)^2\int_x^1 V_{tt}(x',t)/L\,dx' + \nu^2(1-x)V_s - V_s + \phi + \tau_0\nu^2\delta(t-t_0)\theta(x_0-x) = 0 \qquad (4.12)$$

を用意し，これに，(4.8) (4.11) を代入すると，$K(\omega,x)$ の定義 (3.2) を用いて，$\phi(x,t)$ が

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\omega_i,x)T(\omega_i,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\tau_0\mu^2\Delta(\omega_i,x_0)\Phi(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\sin\left[\omega_i(t-t_0)\right]\theta(t-t_0) \quad (4.13)$$

と求まる．(4.11) と (4.12) に含まれる $\theta(x_0-x)\delta(t-t_0)$ の項はうまくキャンセルする．もっとも，この形になることは (2.1) 式の初めから仮定されていることではあるが，ここですべてが矛盾なく，求まっていることを確かめた．

ここまでの結果は，衝撃が，時空間の 1 点 (s_0,t_0) で起こるものとして求めてきた．ここで，衝撃が時間的にも空間的にも分布している場合の解を求めておく．(4.1) 式，最後の項の δ 関数を,

$$\tau_0\delta(x-x_0)\delta(t-t_0) \quad\to\quad \hat{f}(x,t) = \iint \hat{f}(x',t')\delta(x-x')\delta(t-t')\,dx'dt' \qquad (4.14)$$

と無次元の分布関数 $\hat{f}$ で置き換える．この置き換えは, (x_0,t_0) を (x',t') に, τ_0 を $\hat{f}(x',t')dx'dt'$ に置き換えて重ね合わせる，つまり積分することになるので，結果は,

$$V(x,t) = L\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\mu^2\Delta(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\int_0^1\int_0^t \hat{f}(x',t')\Delta(\omega_i,x')\sin\left[\omega_i(t-t')\right]dx'dt'$$

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\mu^2\Phi(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\int_0^1\int_0^t \hat{f}(x',t')\Delta(\omega_i,x')\sin\left[\omega_i(t-t')\right]dx'dt' \qquad (4.15)$$

となる．なお，ここで，(4.14) の置き換えからして，分布関数 $\hat{f}$ は,

$$\iint \hat{f}(x,t)dxdt = \tau_0 \qquad (4.16)$$

と規格化されていなければならない．

5 エネルギー計算

(1.2) 式において，それぞれの単位長さあたりのエネルギーを示した．このうち，衝撃によるエネルギーを除いた他の 4 個のエネルギーについて，その総和 E

$$E = \int_0^L (T+U_1+U_2+U_3)ds - \int_0^L \rho gAsds \qquad (5.1)$$

がどうなるかを計算してみる．ただし，右辺の 2 項目は，エネルギーを測る基準として，初めから存在する位置エネルギーの分を引くことを意味する．これは，具体的に,

$$E = \int_0^L\left[\frac{1}{2}\rho A{V_t}^2 + \frac{1}{2}EI\phi_s^2 + \frac{1}{2}GA(V_s-\phi)^2 - \rho Ag\int_0^s(1-\cos\theta')ds'\right]ds \qquad (5.2)$$

となり，この被積分の中の最後の項は，線形近似で，

$$1-\cos\theta' \simeq \frac{1}{2}\theta'^2 = \frac{1}{2}V_s'^2 \tag{5.3}$$

となり，この最後の項で積分順序の変更をすると，

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho A V_t{}^2 + EI\phi_s^2 + GA(V_s-\phi)^2 - \rho Ag(L-s)V_s^2\right]ds \tag{5.4}$$

と書ける．

このエネルギー E は，衝突後，時間に依存しない一定値になっているはずである．この衝突後というのは，時間 t が，衝突時間 t_0 から無限小時間 ϵ だけ経過した $t_0+\epsilon$ よりも大きい，すなわち，$t \geq t_0+\epsilon$ を満たすところという意味である．この領域では，(1.8)～(1.12) に含まれる I_m が付く項はすべて寄与しない．そこで，(5.4) を時間で微分して，

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \left[\rho A V_t V_{tt} + EI\phi_s\phi_{st} + GA(V_s-\phi)(V_{st}-\phi_t) - \rho Ag(L-s)V_sV_{st}\right]ds \tag{5.5}$$

ここで，(1.10) を s で微分した

$$\rho A V_{tt} + \rho gA\big[(L-s)V_s\big]_s + EI\phi_{sss} = 0 \tag{5.6}$$

と (1.9) を用いると，(5.5) は，

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = -\rho gA\int_0^L &\Big\{V_t\big[(L-s)V_s\big]_s + V_{st}(L-s)V_s\Big\}ds \\ &- EI\int_0^L \big[V_t\phi_{sss} + V_{st}\phi_{ss}\big]ds + EI\int_0^L \big[\phi_s\phi_{st} + \phi_{ss}\phi_t\big]ds\end{aligned} \tag{5.7}$$

この結果はすべての項が積分できて，

$$\frac{dE}{dt} = \Big[-\rho gAV_t(L-s)V_s - EIV_t\phi_{ss} + EI\phi_s\phi_t\Big]_0^L \tag{5.8}$$

これらの項は，境界条件 (1.13)～(1.16) によって，すべて消え，

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{5.9}$$

が証明される．つまり，(5.4) で定義されるエネルギー E は時間に依らない定数なので，どの時間で見積もってもよい．

そこで，衝突直後，すなわち，$t=t_0+\epsilon$，で見積もることにすると，解 (4.7) (4.13) 中の $\sin(\omega_i\epsilon)$ はゼロとみなされるので，積分 (5.4) のうち，ϕ，ϕ_s，V_s を含む項はすべて消え，残るのは V_t を含む運動エネルギーの項のみとなる．つまり，衝突直後は，その衝撃が速度に変化しているが，まだ歪みにはなっていないということである．したがって，

$$E = \frac{\rho A}{2}\int_0^L V_t{}^2\,ds \tag{5.10}$$

ここで，(4.7) (3.11) から，

$$V_t(x,t_0+\epsilon) = L\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\tau_0\mu^2\omega_i\Delta(\omega_i,x_0)\Delta(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\big[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\big]_{\omega=\omega_i}} = \frac{L\tau_0}{\tau^2}\delta(x-x_0) \tag{5.11}$$

となるので，エネルギー式 (5.10) に代入すると，

$$E = \frac{\rho A L^3 \tau_0^2}{2\tau^4}\int_0^1 \delta(x-x_0)^2 dx = \frac{\rho A L^3 \tau_0^2}{2\tau^4}\delta(0) = \frac{{I_m}^2}{2\rho A L}\delta(0) \tag{5.12}$$

となって，無限大になってしまう．これは，衝突による衝撃を 1 点に集中させたために起こるものと考えられる．

無限大を避ける方法

そこでこれを救うために，衝撃が時空間に分布した (4.15) 式の結果を用いることにしよう．このとき，変位速度は，

$$V_t(x,t) = L\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\,\omega_i\mu^2\Delta(\omega_i,x)}{K(\omega_i,0)\left[\partial_\omega\Delta(\omega,0)\right]_{\omega=\omega_i}}\int_0^1\int_0^t \hat{f}(x',t')\Delta(\omega_i,x')\cos\left[\omega_i(t-t')\right]dx'dt' \tag{5.13}$$

となる．ここで，分布関数 $\hat{f}(x,t)$ は，時間 t が，区間 $[t_0,t_1]$ でのみ値を持つものとし，エネルギーを見積もる時間 t を衝突直後の $t=t_1$ とし，かつ，区間 $[t_0,t_1]$ が微小区間で，$\cos[\omega_i(t_1-t')] \cong 1$ とみなせるものと仮定する．このとき，完備性の式 (3.11) によって，ω_i の和がとれ，

$$V_t(x,t_1) = \frac{L}{\tau^2}\int_{t_0}^{t_1}\hat{f}(x,t')dt' \tag{5.14}$$

となる．さらに，ここで，

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\tau_0}\int_{t_0}^{t_1}\hat{f}(x,t')dt' \tag{5.15}$$

と定義してやると (4.16) から，

$$\int_0^1 \hat{F}(x)dx = 1 \tag{5.16}$$

となるので，この規格化された $\hat{F}(x)$ を用いて，(5.14) は，

$$V_t(x,t_1) = \frac{L\tau_0}{\tau^2}\hat{F}(x) \tag{5.17}$$

と表わされる．後は，この式を (5.10) に代入すると，全エネルギー E は，

$$E = \frac{\rho A L^3\tau_0^2}{2\tau^4}\int_0^1 \hat{F}^2(x)dx = \frac{{I_m}^2}{2\rho A L}\int_0^1 \hat{F}^2(x)dx \tag{5.18}$$

となり，発散が抑えられる．ただし，その値は形状関数 $\hat{F}$ の形に依存して決まることになる．すなわち，建築物が衝突によって，獲得するエネルギーは，力積 I_m の 2 乗に比例し，全質量 ρAL に逆比例する．ここで，形状関数である $\hat{F}(x)$ は (5.16) のように規格化されているので，その 2 乗の積分値は，$\hat{F}(x)$ が δ-関数のときに，最大の無限大になり，なだらかになるほど，その値は小さくなる．つまり，同じ力積なら衝撃が広がっているほど与えるエネルギーは小さく，1 点に集中するほど，大きくなることがわかる．

ここでの計算は，衝撃に空間的広がりを持たせて，エネルギーの発散を除くことにしたが，このとき，時間の方は δ 関数的なものであってもかまわない．しかし，この逆に，時間の方に広が

りを持たせて，空間を δ 関数にした場合は，少なくともここでの解法にはそぐわないものになってしまうことは確かである．すなわち，その場合は，衝突に時間がかかるので，運動エネルギーのみならず，曲げや剪断の歪みエネルギーも考慮しなければならない．また，(5.13) 式において，x' の積分はできても，$\cos[\omega_i(t-t')] \cong 1$ とはみなせなくなるために，ω_i の和はとれなくなるなど，もし，計算を強行したとしてもそれは膨大なものになってしまうであろう．

6 おわりに

この論文では，高層建築物に他の飛来物体が衝突した場合の振動を，建築物を 1 本の弾性棒として扱うことによって，数学的な解析を展開した．ここでは，衝突の際に，飛来物から受ける力積を与えられたものとして解析したが，飛来物から受けるエネルギーは，もし衝突が 1 点で δ 関数的に起こるとすると，無限大となり，これを避けるには形状関数という，いわば不明のものに依存させなければならないという悲惨な結果になった．このようなことは，予想していなかっただけに，意外なものであった．これは，おそらく，実際には厚さのある弾性棒を全くの 1 次元的なものとして扱うモデル自体の欠陥と考えられる．もし，棒に厚さを持たせた 3 次元的な解析が可能ならばこうはならないであろう．(5.11) 式で示したように，変位速度が衝突点で δ 関数となったとしても，実際には，その奥行き方向の点まで δ 関数になるわけではないからである．このような解析は，まだ未解決であり，次回の論文のテーマとして残しておく．

付録　パラメータ μ, ν について

ここで，(2.5) 式で定義されるパラメータ μ, ν

$$\mu = \sqrt{\frac{\rho g A L^3}{EI}}, \qquad \nu = \sqrt{\frac{\rho g L}{G}} \tag{A0}$$

について，エネルギーとの関係を明確にしておく．

μ について

初めに，μ は曲げに対する重力の強さを表わすパラメータである．もし，静的で，かつ剪断のない純曲げの状態で考えると，主軸と床面の傾き角は同じになり，$\phi = V_s$ となるので，(5.4) のエネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \left[EI{\phi_s}^2 - \rho A g(L-s)\phi^2\right]ds \tag{A1}$$

となる．この式の被積分関数のうち，1 項目は曲げエネルギー，2 項目は重力エネルギーを表わしている．弾性棒は，重力が弱いときは真っ直ぐ立っているが，重力が大きくなる，あるいは EI の値が小さくなると，曲がることによって全体のエネルギーを低くしようとする，いわゆる分岐現象を起こす．その分岐が起こる境目が，曲げエネルギーと重力エネルギーの損失分が釣り合うところで，

$$\frac{1}{2}\int_0^L EI{\phi_s}^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A g(L-s)\phi^2 ds \tag{A2}$$

がその条件となる．この式を見積もるためには，実際に曲がったときの角度 $\phi(s)$ がどうなるかを知らなければならない．

方程式 (1.10) から，静的で，かつ剪断がないとき，角度 ϕ は，方程式

$$EI\phi_{ss} + \rho gA(L-s)\phi = 0 \tag{A3}$$

を満たす．この方程式は前回の論文で示したように，弾性棒の上端で曲率がゼロ $\phi_s(L) = 0$ という条件のもとに，$-1/3$ 次 Bessel 関数を用いて解かれ，その解は，A を任意定数として，

$$\phi(s) = A\sqrt{1-s/L}\, J_{-1/3}\Big(\frac{2}{3}\mu(1-s/L)^{3/2}\Big) \tag{A4}$$

と書ける．この解をエネルギー条件式 (A2) に代入して，確かめてもよいが，実際はその必要がない．ここで，方程式 (A3) の両辺に ϕ を掛け積分すると

$$EI\big[\phi_s\phi\big]_0^L - EI\int_0^L {\phi_s}^2 ds + \rho gA\int_0^L (L-s)\phi^2 ds = 0 \tag{A5}$$

となるので，解 (A4) がエネルギー式 (A2) を満たすためには，$\phi(0) = 0$, つまり，下端が埋め込みになっているという条件が必要で，具体的には，

$$J_{-1/3}\Big(\frac{2}{3}\mu\Big) = 0 \tag{A6}$$

すなわち，$2\mu/3$ は Bessel 関数 $J_{-1/3}$ のゼロ点でなければならない．このゼロ点のうち，最も小さい値は，

$$\frac{2}{3}\mu = 1.866\cdots \tag{A7}$$

である．μ がこの値以上になると，曲がることによってエネルギーを下げようとし，系は不安定となり，倒壊が起こる．これは，曲げによる座屈現象といえる．

ν について

つぎに，ν は剪断に対する重力の強さを表わすパラメータである．同じように，静的で，かつ曲げのない純剪断の状態で考えると，床面の傾き角 ϕ は常にゼロとなるので，(5.4) のエネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \Big[GAV_s^2 - \rho Ag(L-s)V_s^2\Big] ds \tag{A8}$$

となる．この被積分関数の1項目は剪断歪みエネルギーを表わす．重力が小さいうちは剪断なしで真っ直ぐ立っているが，重力が強くなる，あるいは，GA の値が小さくなると，弾性棒の下の方から剪断変形を起こし，よりエネルギーが小さい方に移行しようとする，分岐現象が起きる．この分岐が起こる境目は，剪断エネルギーと重力エネルギー減少分が釣り合うところで，

$$\frac{1}{2}\int_0^L GAV_s^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^L \rho Ag(L-s)V_s^2 ds \tag{A9}$$

がその条件となる．いま，弾性棒の下から s_0 までのところが剪断角 γ の剪断変形を起こし，それより上は剪断なしで真っ直ぐ立っているものとして，

$$V_s = \begin{cases} \gamma, & \text{for} \quad 0 \le s \le s_0 \\ 0, & \text{for} \quad s_0 < s \le L \end{cases} \tag{A10}$$

としてこの式を見積もると，

$$\nu^2 = \frac{\rho g L}{G} = \frac{2L}{2L - s_0} \tag{A11}$$

を得る．これから，$s_0 = 0$，$\nu = 1$ で，下から剪断が始まり，$s_0 = L$，$\nu = \sqrt{2}$ では上まで剪断変形が起こるという分岐現象に対応していることがわかる．いったん剪断が始まると系は不安定となり，どんどん剪断角は増えて，壊滅が起こる．これは，剪断による座屈現象である．

ここまで，パラメータ μ, ν とエネルギーの関わりを見てきたが，ここでこれらの値がある限界値を超えると分岐現象が起こることが理解できた．実際の方程式を解いたときには，μ, ν の値が, それぞれ (A7), (A11) の値を超えると，固有振動数 ω は虚数となり，そのとき，三角関数 sin が，双曲線関数 sinh に変化して，振動は不安定となり，急激に振幅が増大して倒壊する．これらの現象は，動的座屈現象として理解される．