

タイトル	動的載荷による地盤応答に関する基礎的研究
著者	上浦, 正樹; 董, 勤喜; 中山, 真吾
引用	北海学園大学工学部研究報告, 32: 203-220
発行日	2005-02-21

# 動的載荷による地盤応答に関する基礎的研究

上 浦 正 樹\*, 董 勤 喜\*\*, 中 山 真 吾\*\*\*

## A basic study on response of the roadbed using impact loads

Masaki KAMIURA\*, Kinki DON\*\*, Shingo NAKAYAMA\*\*\*

### 1 はじめに

道路建設に使用される路盤材料のなかで砕石などの粒状材料は全国に点在する砕石場から入手が容易でよく用いられている。また、近年の施工機械の発達で粒状材の締固めの施工精度が向上したことから概ね安定した路盤が仕上がり供用されている。この締固め施工で路盤の剛性を確保するために必要な最適含水比や締固め回数などは、現場で使用される砕石などの粒状体を室内試験をし、その結果に基づき散布水量と締固めローラの運転回数による締固め量を決めて現場施工をしている。その意味では現場での仕上がりは室内試験とは異なる性状を示す可能性を有していて、仕上がり検査で所定の密度が得られているか検査する必要がある。この検査には、コア採取などの破壊試験と平板載荷試験やFWDによる載荷たわみ測定試験などの非破壊試験がある。

平板載荷試験は載荷の反力にトラックなどの重量物が必要であり、載荷試験が自動化されていないなど多くの機材と労力を要する。このため、延長の長い道路建設においてスポット的にサンプリングを除き高頻度に密度測定を簡易な方法で推定する方法はなく、数100m<sup>2</sup>に1箇所などのように測点数に限りがあり施工管理には参考程度に利用されているのに過ぎない。一方FWD試験は車に搭載された試験機によって落下質量によって載荷し計測は自動化されていることから連続的に測定できる。このことから利用の拡大の余地は十分にあるが、日本に導入されている台数は20台弱でその活用は主にアスファルト舗装の表面に載荷する方法が主流となっ

---

\* 北海学園大学工学部 土木工学科

Department of civil engineering, Hokkai-Gakuen University

\*\* 中央大学理工学部 土木工学科

Department of civil engineering, Chuo University

\*\*\* 北海学園大学大学院 工学研究科

Graduate school of engineering, Hokkai-Gakuen University

ていて路盤の施工管理に使用されるケースは少ない。この原因としては、粒状路盤に載荷することによって得られるデータの解析方法は確立されていないことによる。では、どのような解析方法が望まれているか、ここで考察を加える。

粒状路盤で要求される性状として支持力があり、これを弾性体では弾性係数で評価する。この場合に必要な条件としては均一な剛性では弱い方の路盤に載荷応力が集中し部分的な破壊が進行するケースがよく見られ一定の基準内に収まることが重要である。以上のように考察を進めていくと、現状では確定した方法は見出せないまま、施工機械の発達でその精度よくできる点から現場技術者の経験を生かし、室内試験と施工機械の能力を勘案して施工した結果、仕上がり検査を省略しても大きな問題となっていないとの結論に到達する。

しかし、性能規定化によって供用期間の保証が求められていることを考えると、機械の性能や現場技術者の技術のみによって現場の検査データがないままで仕上がりの精度を保証できるか疑問がある。

このような背景を踏まえ、本研究では次の点に重点をおき、性能規定化の流れに沿った提案を試みる。

#### 1) 性能規定化に必要な技術的な視点の絞り込み

性能規定化は従来からの技術的な経験や室内試験や現場試験で蓄積された研究の成果に裏付けによって成り立つ。その意味で道路建設に対する性能規定化に必要な項目を検討する。この過程において施工の検査に必要なデータの項目を絞り込むことができると思われる。

#### 2) 現場施工の仕上がり状態を推定する手法の提案

現場試験で全体の仕上がりを検査するうえで求められるのは小規模で簡易に測定する方法が最もふさわしいと思われるが、これは今までに多くの研究者が今まで取り組んできた課題ともいえる。このため本研究において簡単に実用化できると考えてはいないが、本論文において基礎的な研究を組み合わせることで実用化に至る方向性を示すだけでも意味があることといえる。そこで、このプロセスを示すことを試みる。

## 2 性能規定化に必要な技術的な視点の絞り込み

性能規定化に必要な項目を整理すると以下の視点が考えられる。

#### 1) 弾性係数

路盤や地盤の支持力を評価する指標には平板載荷によるK値やCBR値があるが、前述したように測定方法はスポット的にサンプリングをするもので高頻度に密度測定を簡易な方法で推定する方法はない。そこでFWDを用いて推定する弾性係数Eに着目する。図1はFWD、小型FWDおよび室内試験のうち3軸せん断試験によって推定された弾性係数とせん断ひずみの関係<sup>1)</sup>である。この図では、S.Gは粒状材を示し、V.Cは火山性粘性土を表している。

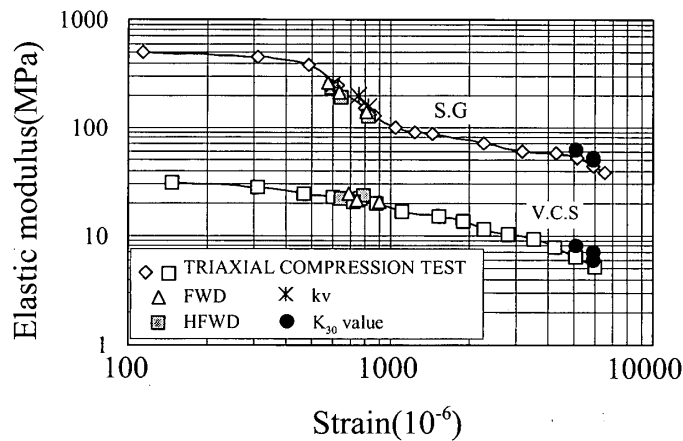


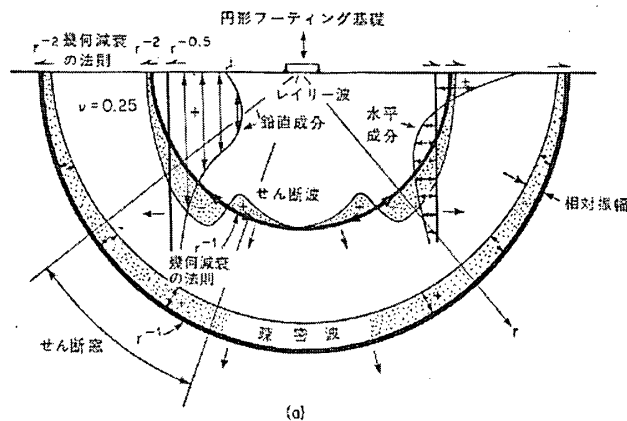
図1 弾性係数とせん断ひずみの関係

この図からひずみレベルによって弾性係数は影響をうけることが分かる。

2) 弾性波

弾性波を用いて測定する方法には2点間（距離L）とその間で荷重波形が到達するに要する時間（ $\Delta t$ ）の測定により弾性速度を推定しこれから弾性係数を求めるものである。

地盤内に発生する弾性波について一般的に図2のような模式図が示されている<sup>2)</sup>。このように水面に発生した波は伝播するように外側に向かって固体内に伝播することが想像されている。その波の種類は疎密波、せん断波、レーリー波の弾性波で構成される。本研究ではFWDによる加速度センサを地盤表面にセットし、地盤のたわみを加速度測定によって推定する。この場合に波の進行方向に直角の方向に加速度計を設置し、荷重によって表面に発生するたわみを時間の関数として測定する。



波動の種類	全エネルギーに対するパーセント
レイリー波	67
せん断波	26
疎密波	7

図2 弾性波の伝播方法

### 3 試験

#### (1) 試験で使用した路盤

札幌郊外篠津付近の国道（236号）において拡幅工事に伴いD交通用舗装工事が施工された。その下層路盤（層厚55cm）の完成時にその施工精度を確認するため路盤表面に載荷板をセットしFWDや小型FWDによって動的載荷によるたわみ測定および加速度測定を行った。表1は下層路盤の物理的性質を示す。

表1 物理的性質

下層路盤	再生コンクリート碎石	40-0 mm
	含水比	9 %
	現場密度	2.01g/cm <sup>3</sup>

#### (2) 試験方法

本研究では2種類の測定方法を採用した。それはFWDおよび小型FWDを用いて動的載荷によって発生する表面のたわみを測定する方法と動的載荷によって発生する地盤内に発生する弾性波を測定するため、深さ20cmに埋め込んだ金属棒の先端の加速度を測定する方法である。検出位置を表2に示す。

表2 検出位置

FWD	載荷点直下 20, 30, 45, 60, 75, 90, 150, 200	各cm
小型FWD	30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190	各cm
金属棒	30, 50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190	各cm

図3は小型FWDを用いて地盤表面に加速度を測定している部外センサーと地盤内の弾性波を測定するために地盤内に打ち込んだ金属棒およびその上端にある加速度計を示している。

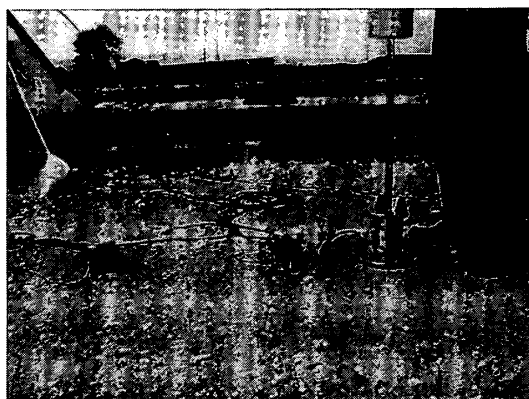


図3 小型FWDと部外センサー，金属棒と加速度計

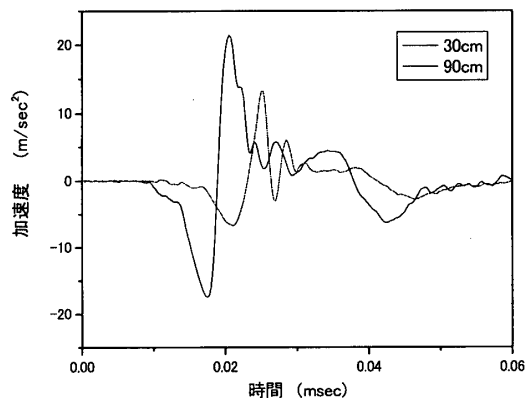


図4 FWDの加速度波形（30cm, 90cm）

## 4 試験結果

### (1) FWDの加速度波形

載荷点から30cmと90cmの位置での各加速度の時系列データを示す(図4)

この結果から全体として載荷点から離れるに従って振幅は小さくなり、振動の開始時間が遅くなる傾向が見られた。これは砕石材料であっても減衰に相当する粘性の効果があり、粘弾性モデルが適当であることを示している。

### (2) 小型FWDの加速度波形

載荷点から表面における30cmと110cmの位置での各加速度の時系列データを示す(図5)

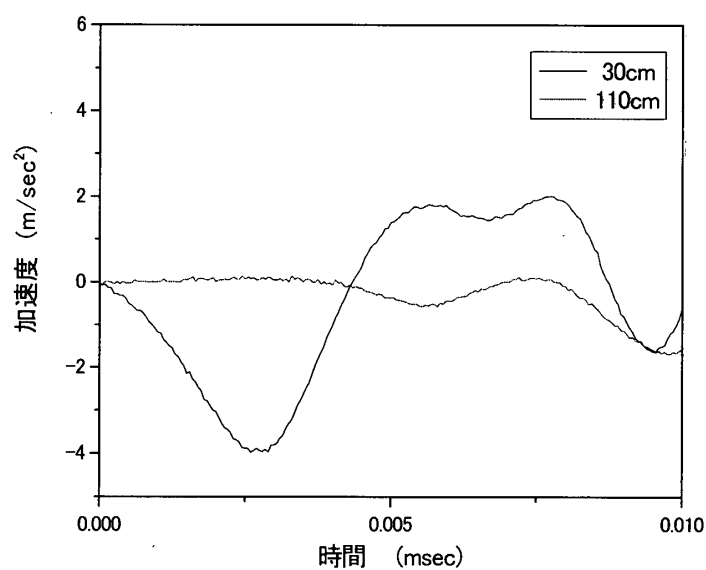


図5 小型FWDの加速度波形(30cm, 110cm)

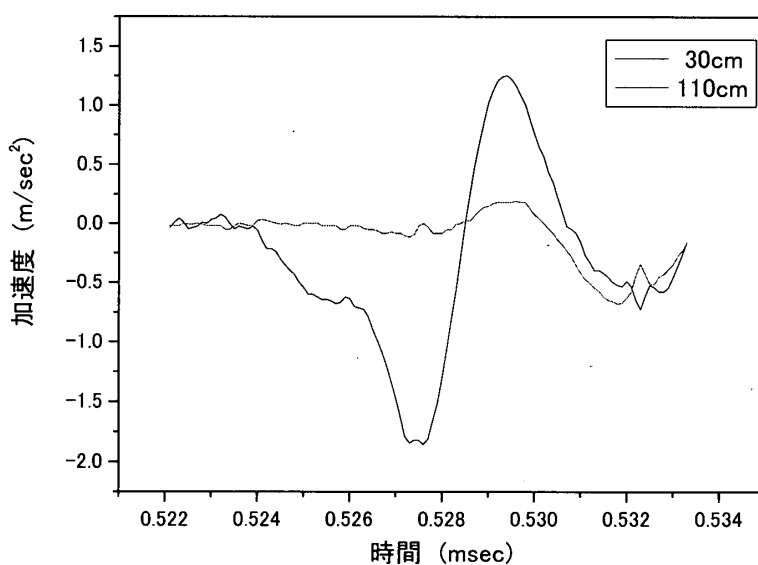


図6 金属棒先端(深さ20cm)の加速度波形(30cm, 110cm)

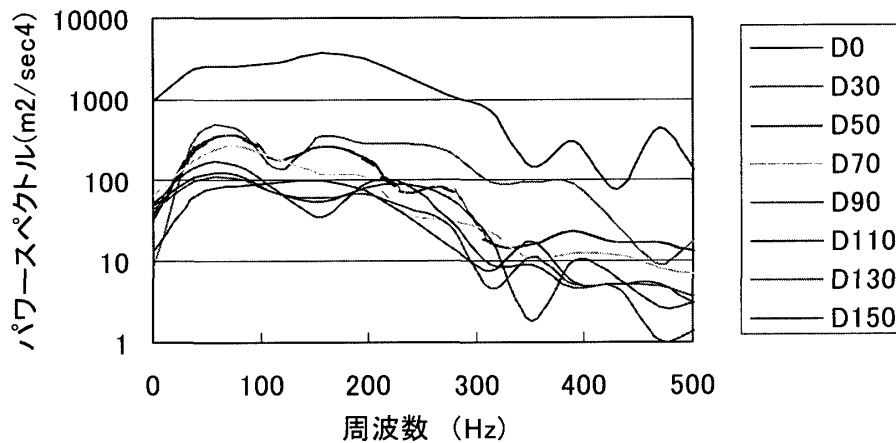


図7 FFT解析 (小型FWDの加速度波形)

この結果からFWDと小型FWDとは載荷荷重の違いによって加速度に差がありますが、ほぼ同じような波動の変化が見られる。

### (3) 金属棒

深さ20cmに打ち込んだ金属棒の先端で検知した加速度の30cmと110cmの位置での時系列データを示す (図6)

### (4) 小型FWDの加速度波形によるFFT解析

動的載荷によって発生する波形に基づきFFT解析を行った結果を図7に示す。この図から載荷点直下の加速度 (D0) で卓越した周波数 (80Hz付近と200Hz付近) が載荷点から弾性波として離れた地点でのたわみとなって現れても減衰してパワースペクトルの小さくなっているとはいえ、その卓越周波数はほぼ保存されて伝播していく傾向が見られる。

図8は金属棒によって測定された加速度波形のFFT解析結果である。この結果から図7と同

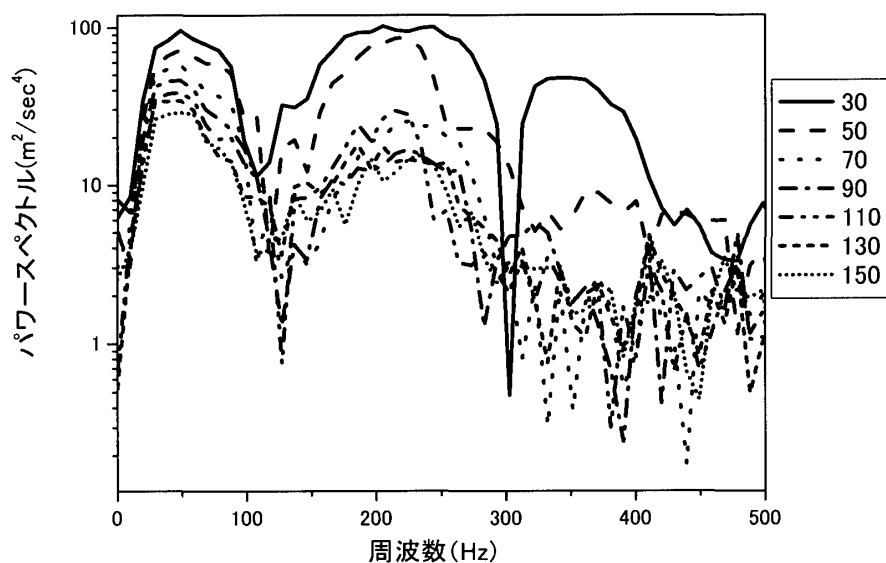


図8 FFT解析 (金属棒)

様の卓越周波数は100Hz付近と200Hz付近に見られる。

## 5 有限要素解析

本研究ではFWDの載荷によって発生する地盤の振動から地盤の剛性を推定する方法を確立することを目的としている。そこでこの理論解析では、従来から資源探査や火山の常微動調査などの物理探査で解明が進んでいる知見を導入して地盤上の弾性波を理論的にかつ視覚的に伝播の状況を見出すこととする。

本研究の対象としている現象は地盤上に動的に載荷した振動が減衰自由振動をしながら伝播していく現象である。この現象を理論的に把握する方法として有限要素モデル解析を使用する。舗装構造は多層構造であるのでこれを有限要素モデルに対応させるためには、自由度が非常に高くなる。そこで従来から載荷点と載荷点から20, 30, 40, 65, 80, 100, 120, 150などの各cmの位置にたわみセンサーを設置して載荷時のピークの荷重と変位のみを用いて準静的問題として解を得る方法が採られて来た。しかし、本研究ではこの章の冒頭に述べたように視覚的に伝播の状況を把握するためにはピークの値を用いる準静的問題では事象を明らかにできない。そこで載荷の開始からピークまでの荷重の時刻歴データと各センサーの時刻歴データを用いて解析を行う。

### 5.1 運動方程式

地盤表面に載荷した地盤は変位するとき、一般的に次のような運動方程式を示すことができる。

$$\begin{aligned} \{M\}\{\ddot{u}(t)\} + \{C\}\{\dot{u}(t)\} + \{K\}\{u(t)\} &= \{F(t)\} \\ u(0) = 0 \quad \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $M, C, K$ はそれぞれ $N \times N$ の質量、減衰、剛性マトリクス、そして $\ddot{u}(t), \dot{u}(t), u(t)$ は $N \times 1$ の加速度、速度、変位ベクトルである。また右辺の $F(t)$ は動的荷重ベクトルである。この数値解析にあたって本研究では減衰自由振動を対象としていることからモデルを簡単にするため始めに減衰マトリクス( $C$ )が質量マトリクス( $M$ )と剛性マトリクス( $K$ )に比例するレーリー減衰 (Rayleigh damping) を用いる<sup>3)</sup>。次に非比例減衰に対して解析を進めていく。

### 5.2 リッツベクトルのアルゴリズム

有限要素解析のように多くの要素を持ちかつ時刻歴データを取り扱うケースでは全体のマトリクスを小さくして解を求めることは最も有効な方法である。この目的のためリッツベクトルを固有ベクトルとして導入する方法は従来から動的問題を扱う構造解析に多く用いられてきた。しかし今までの方法は大きなマトリクスでは固有値が煩雑になるとして精度を犠牲にしているだけで少ない固有値で対処する傾向が見られた。そこで本研究ではリッツベクトルを固有ベクトルとして限定せずに直交ベクトルだけを条件として用いる方法<sup>4)</sup>を採用することとし



た。

ここで本研究に用いたリッツベクトルのアルゴリズムを示す。

(1) 質量マトリクス $[M]$ , 剛性マトリクス $[K]$ , 荷重マトリクス $[f]$ を与えておく

(2) 剛性マトリクス $[K]$ を対角線より上を0とする三角形マトリクスに変換する

$$[K]=[L]^T[D][L]$$

(3) 必要な各Ritzベクトルに対し1個の荷重ベクトルを解くことが必要である。

荷重ベクトルから最初のRitzベクトルを以下によって求める。

$$[K][X]_1^*=[f] \quad \text{よって} \quad [X]_1^*=\frac{[f]}{[K]} \quad (2)$$

また 次の式により質量マトリクス $[M]$ を正規化する。

$$[X]_1^T[M][X]_1=1 \quad (3)$$

このような値となる $[M]$ と $[K]$ に関して最小のリッツベクトルからなる $[X]_1$ を求める。

ここで例をあげる。

$$[M]=\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} \quad [X]_1=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{とすると (3) より} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$$

よって これを満足する $[X]_1=(a_1, a_2, a_3)$ の様々な組み合わせ, 例えば $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ などが可能である。

(4) 引き続き $i=2 \cdots N$ に対し以下によりRitzベクトルについて解を求める。

(3)と同様に $[X]_i^T[M][X]_i=1$ より $[X]_1$ とは異なる(または同じ) $[X]_i$ を定める。

$$\text{次に} \quad [K][X]_i^*=[M][X]_{i-1} \quad (4)$$

により $[X]_i^*$ が求まる。

(5) 質量ベクトルに直交するRitzベクトル $[X]_i^*$ の生成

$$C_j=[X]_j^T[M][X]_i^* \quad \text{とする} \quad (j=1, \dots, i-1)$$

以上から次式が求まる

$$[X]_i^{**}=[X]_i^* - \sum_{j=1}^{i-1} c_j [X]_j$$

### 5.3 リッツベクトル

本研究ではリッツベクトルを用い, 縮小した運動方程式を1階微分方程式に変換し, これに固有値問題として固有ベクトル解析を行うこととする。

(1) リッツベクトルに変換した運動方程式

有限要素の接点数 $(N \times N)$ のある点 $(Z_i(t))$ に対しリッツベクトル $\{r_i\}$ を用いた座標変換を行う(式(5))

$$\{\dot{u}_i\}=\{r_i\}z_i(t) \quad (6)$$

同様に全体としては位置ベクトル $\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\}$ についてリッツベクトルを用いた座標変換によりL個の位置ベクトル $\{\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_L(t)\}$ へ近似する。

$$\{\tilde{u}_1(t)\} = \sum_{i=1}^L \{r_i\} Z_i(t) = \{R\} \{Z(t)\} \quad (7)$$

ここでリッツベクトル $\{R\} = \{\{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_L\}\}$  (8) とする

次に速度と加速度についても位置の場合と同様の方法でリッツベクトルを用い座標変換しL個の速度と加速度のベクトル $\{\dot{\tilde{u}}_1(t)\}$ へ近似する。

$$\{\dot{\tilde{u}}_1(t)\} = \sum_{i=1}^L \{r_i\} \dot{Z}_i(t) = \{R\} \{\dot{Z}(t)\} \quad (9) \quad \{\ddot{\tilde{u}}_1(t)\} = \sum_{i=1}^L \{r_i\} \ddot{Z}_i(t) = \{R\} \{\ddot{Z}(t)\} \quad (10)$$

以上から、式(1)へ近似式(8)～(10)を代入する。

$$\{M\} \{R\} \{\ddot{Z}(t)\} + \{C\} \{R\} \{\dot{Z}(t)\} + \{K\} \{R\} \{Z(t)\} = \{F(s, t)\} \quad (11)$$

この式に $\{R\}^T$ を掛ける。

$$\{R\}^T \{M\} \{R\} \{\ddot{Z}(t)\} + \{R\}^T \{C\} \{R\} \{\dot{Z}(t)\} + \{R\}^T \{K\} \{R\} \{Z(t)\} = \{R\}^T \{f\} g(t)$$

ここで式 $\{M^*\} = \{R\}^T \{M\} \{R\}, \{C^*\} = \{R\}^T \{C\} \{R\}, \{K^*\}$

$= \{R\}^T \{K\} \{R\}, \{f^*\} = \{R\}^T \{f\}$ とすると(12)を導くことができる。

$$\{M^*\} \{\ddot{Z}(t)\} + \{C^*\} \{\dot{Z}(t)\} + \{K^*\} \{Z(t)\} = \{f^*\} g(t) \quad (12)$$

ここでベクトルの要素数は $\{R\} = (N \times L)$ であるので $\{R\}^T = (L \times N)$ より $\{M^*\} = (L \times L)$ となる。

(2) Newmark  $\beta$ 法による解法<sup>5)</sup>

一般的に有限要素により離散化された運動方程式は次式となる。

$$\{M\} \{\ddot{u}(t)\} + \{C\} \{\dot{u}(t)\} + \{K\} \{u(t)\} = \{f\} \quad (13)$$

ここで $\{M\}, \{C\}, \{K\}$ はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリクスを示し、 $\{\}$ はそれぞれ相対加速度、相対速度、相対変位、外力に対するベクトルを示す。この $\{u\}$ の2階微分方程式から $\{u\}$ を求めるために以下の近似を行う。

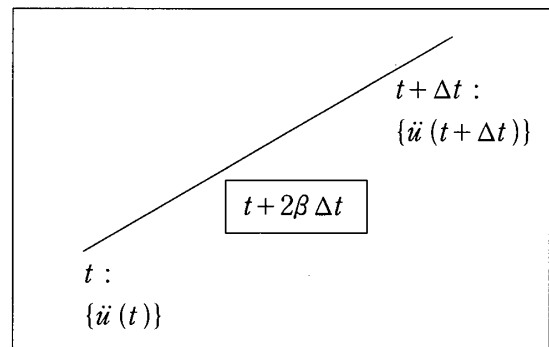
外力ベクトルを時刻 $t=0$ から時間間隔 $\Delta t$ で入力される場合に、 $\{\ddot{u}(t)\}, \{\dot{u}(t)\}, \{u(t)\}$ が与えられて段階でテーラー展開を用いて $\{u(t+\Delta t)\} = \{u(t)\} + \{\Delta u\}$ を推定する。

$$\{u(t+\Delta t)\} = \{u(t)\} + \frac{\Delta t}{1!} \{\dot{u}(t)\} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \{\ddot{u}(t)\} + \dots \quad (14)$$

ここで式(14)の右辺の4項目以上は高次微小項として無視する。

増分 $\Delta t$ までの間の内分点 $2\beta\Delta t$  (ただし $0 \leq \beta \leq 0.5$ )を代表値とするとこの時間での加速度は次の式となる。

$$\{\ddot{u}(t+2\beta t)\} = (1-2\beta)\{\ddot{u}(t)\} + 2\beta\{\ddot{u}(t+\Delta t)\} \quad (15)$$



そこで式 (14) の 3 項目  $\{\ddot{u}(t)\}$  の代わりに式 (15) に右辺を用いる。

$$\{u(t+\Delta t)\} = \{u(t)\} + \Delta t \{\dot{u}(t)\} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\ddot{u}(t)\} + \beta (\Delta t)^3 \frac{\{\ddot{u}(t+\Delta t)\} - \{\ddot{u}(t)\}}{\Delta t} \quad (16)$$

ここで  $\Delta t$  について整理をすると

$$\{u(t+\Delta t)\} = \{u(t)\} + \{\dot{u}(t)\} \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}(t)\} + \beta \{\ddot{u}(t+\Delta t)\} \right) (\Delta t)^2 \quad (17)$$

ここで  $\{\Delta u\} = \{u(t+\Delta t)\} - \{u(t)\}$ ,  $\{\Delta \ddot{u}\} = \{\ddot{u}(t+\Delta t)\} - \{\ddot{u}(t)\}$  とすると式 (17) から次式となる

$$\{\Delta \ddot{u}\} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left( \{\Delta u\} - \{\dot{u}(t)\} \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}(t)\} \right) \quad (18)$$

次に時間積分によって速度の増分  $\{\dot{u}(t+\Delta t)\}$  を求める。この場合でも  $2\beta$  を導入したのと同じ方法で  $\delta$  を導入する。この速度の増分は  $t$  から  $t+\Delta t$  の間での代表的な加速度と  $\Delta t$  との積である。そこで  $t$  から  $t+\Delta t$  の間で、この按分比を  $\delta : (1-\delta)$  とするとこの時間での速度は  $(1-\delta)\{\dot{u}(t)\} + \delta\{\dot{u}(t+\Delta t)\}$  となる。

$$\{\dot{u}(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}(t)\} + [(1-\delta)\{\ddot{u}(t)\} + \delta\{\ddot{u}(t+\Delta t)\}] \Delta t \quad (19)$$

$\{\Delta u\} = \{u(t+\Delta t)\} - \{u(t)\}$  と  $\{\Delta \ddot{u}\} = \{\ddot{u}(t+\Delta t)\} - \{\ddot{u}(t)\}$  を用いることで式 (19) は次式に変形できる。

$$\{\Delta \dot{u}\} = [\{\dot{u}(t)\} + \delta\{\Delta \ddot{u}\}] \Delta t \quad (20)$$

(18) と (20) から次式が導ける。

$$\{\Delta \dot{u}\} = [\{\dot{u}(t)\} + \delta\{\Delta \ddot{u}\}] \Delta t = \left[ \{\dot{u}(t)\} + \delta \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left( \{\Delta u\} - \{\dot{u}(t)\} \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}(t)\} \right) \right) \right] \Delta t \quad (21)$$

以上の準備を経て式 (\*) をベクトルの増分の式に変形する。

$$[M]\{\Delta \ddot{u}\} + [C]\{\Delta \dot{u}\} + [K]\{\Delta u\} = \{\Delta f\}$$

これに式 (18), (21) を代入することで時間  $t$  段階での既知データ  $\{\ddot{u}(t)\}$  と  $\{\dot{u}(t)\}$  を用いて荷重の変化  $\{\Delta f\}$  に対応した  $\{\Delta u\}$  を式 (22) から推定することができる。

$$\left[ [K] + \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\beta \Delta t} [C] \right] \{\Delta u\} = \{\Delta f\} + [M] \cdot \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{u}(t)\} + \frac{1}{2\beta} \{\ddot{u}(t)\} \right] + [C] \cdot \left[ \frac{\delta}{\beta} \{\dot{u}(t)\} + \left( \frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \{\ddot{u}(t)\} \right] \quad (22)$$

(3) リッツベクトルを用いた縮小運動方程式による解法<sup>6)</sup>

減衰マトリクス  $\{C\}$  が Rayleigh 型でないときには式 (12) を一般解で解くことはかなり煩雑となるので本研究では次の 2 段階により解を導きだすこととする。

- ① 2 階微分方程式を 1 階微分方程式に書き換えて解く
- ② この解を用いてさらに 1 階微分方程式として取扱う

そこで①として式 (23) を導入する。

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{z}(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \quad \{ff(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{f^*\}g(t) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

この式を用いて式 (12) を 1 階微分方程式 (式 24) に書き換える。

$$\{A\}\{\dot{y}(t)\} + \{B\}\{y(t)\} = \{f(t)\} \tag{24}$$

$$\text{ここで}\{A\} = \begin{bmatrix} 0 & \{M^*\} \\ \{M^*\} & \{C^*\} \end{bmatrix}, \{B\} = \begin{bmatrix} -\{M^*\} & 0 \\ 0 & \{K^*\} \end{bmatrix} \tag{24-1}$$

式 (24) において  $s$  次の限定して微分方程式の特殊解を求める。

$$\{A\}\{\dot{y}_s(t)\} + \{B\}\{y_s(t)\} = 0 \tag{25}$$

次に対象としているのが衝撃荷重によって地盤内に発生する減衰振動現象であることから、 $\{y_s\} = \{V_s\}e^{\lambda_s t}$  として式 (25) に代入する。この場合の  $\lambda_s$  は円振動数に相当する。

$$(\lambda_s \{A\} + \{B\})\{V_s\} = 0 \tag{26}$$

この式は固有値問題を表している。固有値問題では、 $\lambda_s$  に相当する固有値から固有ベクトルを導き、この固有ベクトルが直交する性質を有していることが知られている。その結果、直交するベクトルは互いに独立した非連結であり、解を求めることができる。

よって  $y_s(t)$  の 2 つのベクトル変数 ( $\{\dot{Z}(t)\}, \{Z(t)\}$ ) が非連結であることを導くこととする。

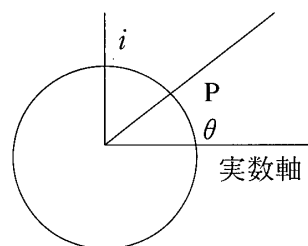
最初に  $y_s(t)$  が速度モードと変位モードのベクトルから構成されていることに着目し、 $\{y_s\} = \{V_s\}e^{\lambda_s t}$  が成立つので固有ベクトルは式 (27) と仮定することができる。

$$\{V_s\} = \begin{Bmatrix} \lambda_s \{u_s\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} \tag{27}$$

ここで  $\{u_s\}$  は  $s$  次の変位モードのベクトルを示す。固有ベクトルの成分  $\lambda_s, \{u_s\}, \{u_s\}$  はそれぞれ非連結となる。

$\{A\}$  と  $\{B\}$  は実マトリクスであるので固有値と固有ベクトルは減衰振動現象を対象とするので複素数空間を用いそこでは共役になっている。

ここで図 に示すように円振動数の半径を  $\omega_s (|\lambda_s|)$  とし実数軸から  $\theta$  の位置での  $\cos \theta = \xi_s$  とする。図の点 P は共役の + の分を採用すると式 (28) で表すことができる。



$$\lambda_s = \omega_s (\xi_s + i\sqrt{1-\xi_s^2}) \tag{28}$$

以下はこの  $\omega_s$  と  $\xi_s$  を求める方法を記す。

式 (26) は  $(\lambda_s \{A\} + \{B\})$  と  $\{V_s\}$  の積は 0 であることから直交していることを意味している。そこで  $s$  次モードと  $r$  次モードについて次の関係がある。

$$\{V_r^T\}\{A\}\{V_s\} = \begin{cases} A_s : r = S \\ 0 : r \neq S \end{cases}$$

$$\{V_r^T\}\{B\}\{V_s\} = \begin{cases} B_s : r = S \\ 0 : r \neq S \end{cases}$$

ここで  $r \neq s$  について上の式を (27) を用いて整理をする。

$$(\lambda_r + \lambda_s)\{u_r^T\}\{M^*\}\{u_s\} + \{u_r^T\}\{C^*\}\{u_s\} = 0 \quad (29)$$

$$\lambda_r \lambda_s \{u_r^T\}\{M^*\}\{u_s\} - \{u_r^T\}\{K\}\{u_s\} = 0 \quad (30)$$

$\lambda_r, \{u_r\}$ がそれぞれ $\lambda_s, \{u_s\}$ と共役とすると $\lambda_r = \bar{\lambda}_s, \{u_r\} = \{\bar{u}_s\}$ となる。これを式 (29), (30) へ代入する。

$$\omega_s^2 = \frac{\{\bar{u}_s^T\}\{K^*\}\{u_s\}}{\{\bar{u}_s^T\}\{M^*\}\{u_s\}} \quad (31)$$

$$\xi_s = \frac{1}{2\omega_s} \frac{\{\bar{u}_s\}\{C^*\}\{u_s\}}{\{\bar{u}_s^T\}\{M^*\}\{u_s\}} \quad (32)$$

次に外力による応答を計算する。

式 (23) から $y(t)$ は $s = 2L$ 個の固有ベクトル $\{V_s\}$ を有していることが明らかなので式 (33) で表現することができる。ここで $r_s$ は時間領域の関数を代表している。

$$\{y(t)\} = \sum_{s=1}^{2L} \{V_s\} \cdot r_s(t) \quad (33)$$

この式を式 (24) に代入する。

$$\{A\} \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{\dot{V}_s\} \cdot \dot{r}_s(t) \right\} + \{B\} \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{V_s\} \cdot r_s(t) \right\} = \{f(t)\} \quad (34)$$

この式に前から $\{V_s^T\}$ をかける。

$$\begin{aligned} \{V_s^T\}\{A\} \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{\dot{V}_s\} \cdot \dot{r}_s(t) \right\} + \{V_s^T\}\{B\} \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{V_s\} \cdot r_s(t) \right\} &= \{V_s^T\}\{f(t)\} \\ \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{V_s^T\}\{A\}\{\dot{V}_s\} \cdot \dot{r}_s(t) \right\} + \left\{ \sum_{s=1}^{2L} \{V_s^T\}\{B\}\{V_s\} \cdot r_s(t) \right\} &= \{V_s^T\}\{f(t)\} \end{aligned}$$

式 (24-1) と式 (27) より

$$\{V_s^T\}\{A\}\{V_s\} = (\lambda_s \{u_s\}^T, \{u_s\}) \begin{bmatrix} 0 & \{M^*\} \\ \{M^*\} & \{C^*\} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_s \{u_s\} \\ \{u_s\} \end{pmatrix} = 2\lambda_s \{u_s\}^T \{M_s^*\} \{u_s\} + \{u_s\}^T \{C^*\} \{u_s\} \quad (35)$$

$$\text{ここで 式 (35) } = A_s \text{ とする} \quad (36)$$

式 (34) の第2項と第3項についても同様に導くと次式となる。

$$B_s = \{V_s^T\}\{B\}\{V_s\} = \lambda_s^2 \{u_s^T\}\{M^*\}\{u_s\} + \{u_s^T\}\{K^*\}\{u_s\} \quad (37)$$

$$g_s(t) = \{V_s^T\}\{f(t)\} = \{u_s^T\}\{f^*\}g(t) \quad (38)$$

以上から式 (39) が導くことができる。

$$A_s \dot{r}_s(t) + B_s r_s(t) = g_s(t) \quad (39)$$

次に式 (26) に前から $\{V_s^T\}$ を掛けると式 (35), (36) から $\lambda_s \{V_s^T\}\{A\}\{V_s\} = \lambda_s A_s$ となる。同様に式 (37) から式 (40) が導ける。

$$\lambda_s A_s + B_s = 0 \quad (40)$$

式 (40) から $B_s = -\lambda_s A_s$ これを式 (39) へ代入すると次式が得られる。

$$\dot{r}_s(t) - \lambda_s r_s(t) = \frac{g_s(t)}{A_s} \quad (41)$$

この微分方程式を  $t_0$  から  $t$  まで積分する。

$$r_s(t) = \frac{e^{\lambda_s t}}{A_s} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} g_s(\tau) d\tau + c_s e^{\lambda_s t} \quad (42)$$

ここで  $t_0$  のとき  $r_s(t_0)$  とすると積分定数  $c_s$  は式 (43) となる。

$$c_s = r_s(t_0) e^{-\lambda_s t_0} \quad (43)$$

式 (42) と (43) から次式が求まる。

$$r_s(t) = \frac{1}{A_s} \int_{t_0}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} g_s(\tau) d\tau + r_s(t_0) e^{\lambda_s(t-t_0)} \quad (44)$$

ここで  $g_s$  が右図に示すように線形の関係にあると仮定すると  $t_n$  と  $t_{n+1}$  の間 ( $\Delta t$ ) にある  $\tau$  では図からも分かるように式 (45) を満たす。

$$g_s(\tau) = \frac{g_s(t_{n+1}) - g_s(t_n)}{\Delta t} (\tau - t_n) + g_s(t_n) \quad (45)$$

ここで  $\tau' = \tau - t_n$  とすると式 (45) は次式となる。

$$g_s(\tau' + t_n) = \frac{g_s(t_{n+1}) - g_s(t_n)}{\Delta t} \tau' + g_s(t_n) \quad (46)$$

この関係から  $\tau'$  を含んで次式が成り立つ。

$$r_s(t_{n+1}) = \frac{1}{A_s} \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_s(t_{n+1}-\tau')} g_s(\tau') d\tau' + r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} \quad (47)$$

これを積分すると式 (48) を導くことができる。

$$r_s(t) = r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{A_s \lambda_s} \left( e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_n) - \frac{1}{A_s \lambda_s} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_{n+1}) \quad (48)$$

この結果は時間領域空間での解を示している。以上から式 (33) を次式に書き換え、一般の形式に拡大する (式49))。

$$\{y_s(t_{n+1})\} = \sum_{s=1}^{2L} \{V_s\} r_s(t_{n+1}) \quad (49)$$

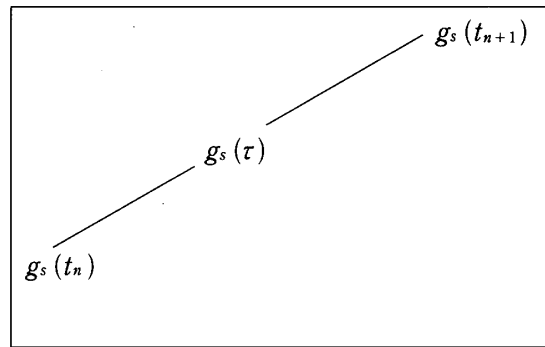
以上から式 (24) の解を以下のように求めることができる。

$$\{Z(t)\} = \sum_{s=1}^{2L} \{u_s\} r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re} [\{u_s\} r_s(t)] \quad (50)$$

$$\{\dot{Z}(t)\} = \sum_{s=1}^{2L} \lambda_s \{u_s\} r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re} [\lambda_s \{u_s\} r_s(t)] \quad (51)$$

$$\{\ddot{z}(t)\} = \{f^*\} g(t) - \{C^*\} \{\dot{Z}(t)\} - \{K^*\} \{Z(t)\} \quad (52)$$

これで①のステップが完了した。②ステップでは式 (50), (51), (52) の積分をして解を導



くことができる。

## 6 解析手順

有限要素解析で用いた方法は次の手順による。

- ①小型FWDの載荷板とセンサー位置で細かく有限要素のメッシュを切り，その他は効率的計算できるように大まかにきった。
  - ②実験で得られた時刻歴によるデータ（載荷荷重，各センサー位置でのたわみ）を入力して動的逆解析により地盤の弾性係数を推定する。
  - ③得られた弾性係数を使用して載荷荷重の時刻歴データを入力し，地盤の挙動を動的順解析によってメッシュ各点で計算し，Z軸方向（鉛直方向）での加速度，速度，変位を推定する。
- この解析結果から地盤表面で測定した各センサーによる加速度，速度，変位の各波形と表面から20cmの深さにおける金属棒の加速度波形との比較が可能となる。

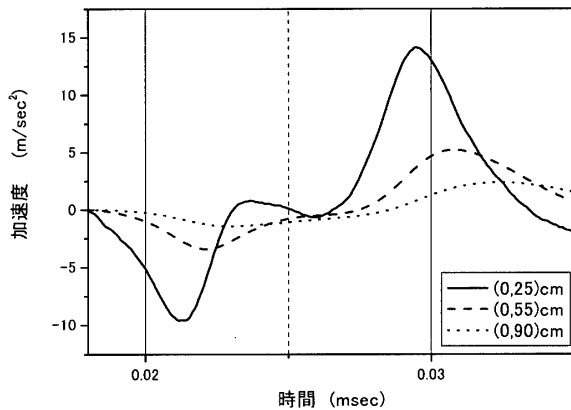


図9 加速度波形(載荷点直下 深さ25, 55, 90cm)

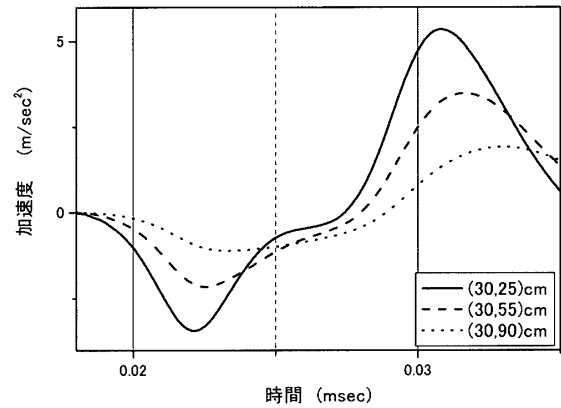


図10 加速度波形(X=30cm 深さ25, 55, 90cm)

## 7 解析結果

### (1) 加速度波形

図9は載荷点直下で深さ25, 55, 90cmの各点における加速度波形を示し，図10は載荷点直下から水平距離で30cm (X=30cm) で深さ25, 55, 90cmにおける加速度波形を示す。

この結果から深さ方向と水平方向に減衰の影響が現れていることが分かる。この減衰の状況は現場データでも確認され，FFT周波数解析で卓越周波数が存在していることが認められている。そこで有限要素解析結果でこの傾向を確認するためにFFT解析をおこなった(図11)。この結果から減衰傾向が見られることと卓越周波数は80Hz付近と150Hz付近に見られることが観察された。これは実験データとほぼ同じ傾向である。実際に入力が載荷荷重の時刻歴データによっているにも関わらず加速度の解析結果で卓越周波数がほぼ同じであることは本研究で使用した有限要素解析の方法が地盤条件を反映していることが確認された。

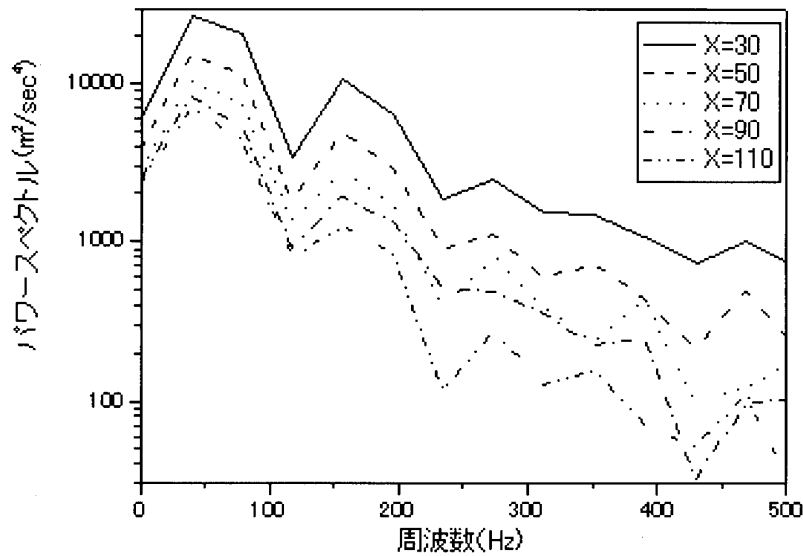


図11 FFT周波数解析 (有限要素解析結果)

(2) 波形の比較

①小型FWDのセンサー

図12は載荷点から30cm (X=30) の地点での変位について有限要素解析 (FEM) の結果と小型FWD (PFWD) のセンサー結果と比較したものである。この結果O-P時間 (開始からピークまでの時間) はほぼ同じであり、ピークまではかなりの精度で一致していることがわかる。

次に同様にX=30cmの地点での鉛直方向の速度について有限要素解析 (FEM) の結果と小型FWD (PFWD) の変位を微分した結果を比較した (図13)。

この結果から速度波形の始点はほぼ同じとするとピークの大きさや位置にずれが認められるが速度が0の位置が同じでその前後の波形の符号が同じなど全体の傾向をよく表している。

また、鉛直方向の加速度波形についてもX=30cmの地点で比較した (図14)。この結果、小型FWDの波形と有限要素法による波形とでは、変位や速度ほどには目立った関係を見出せなかった。

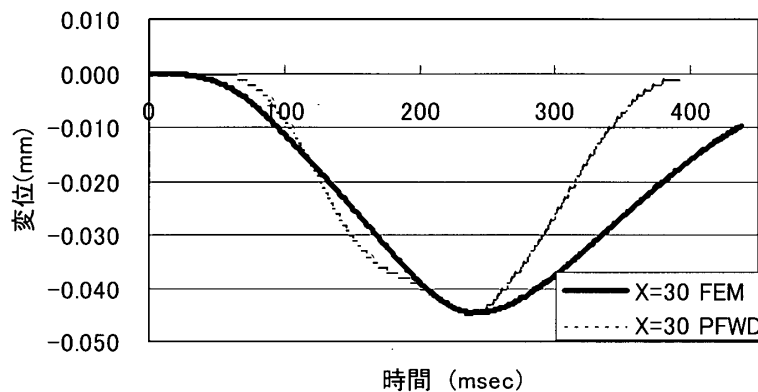


図12 変位波形の比較 (FEMとPFWD)



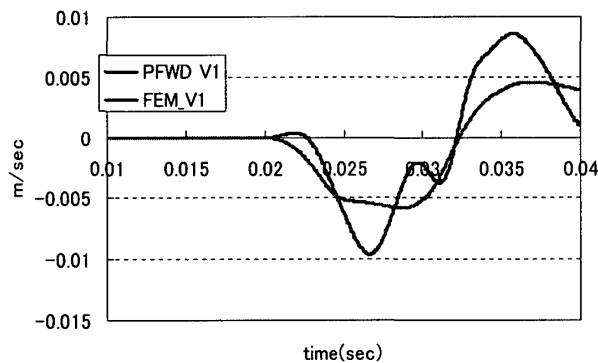


図13 速度波形の比較 (FEMとPFWD)

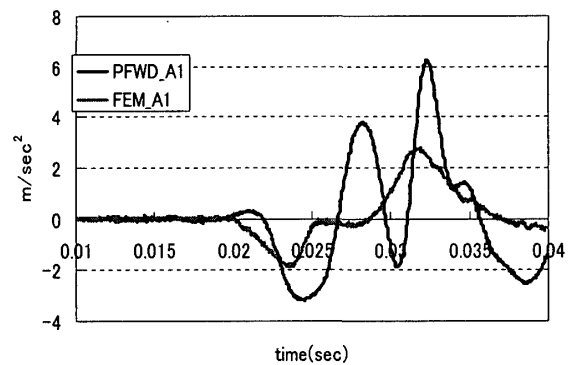


図14 加速度波形の比較 (FEMとPFWD)

以上の結果は加速度計の精度の影響と粒状路盤の影響があるものと推測される。つまり加速度計測は非常に細かい振動の影響を検出することから、本研究の加速度測定の結果は粒状路盤の粒度の不均一さなど影響して均一地盤を仮定している理論値であるFEMの結果とはあまりあわない傾向が見られると推定している。

### ③金属棒

地盤の中に深さ20cmの金属棒を埋め込み先端の加速度を測定した結果と限要素解析(FEM)の結果と比較した。

図15は速度波形の比較である。この結果は表面で測定している小型FWDの結果よりも更に理論で得られた結果に近い傾向を示している。図16は加速度の比較である。これは速度に比べてトレンドは似ているが細部ではあまり一致しているとはいえない。

速度に関して金属棒が小型FWDよりも理論波形により近い傾向が得られたのは、境界条件の違いによるものと推定している。

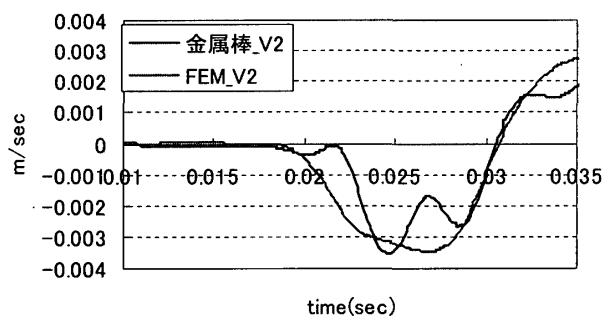


図15 速度波形の比較 (金属棒とPFWD)

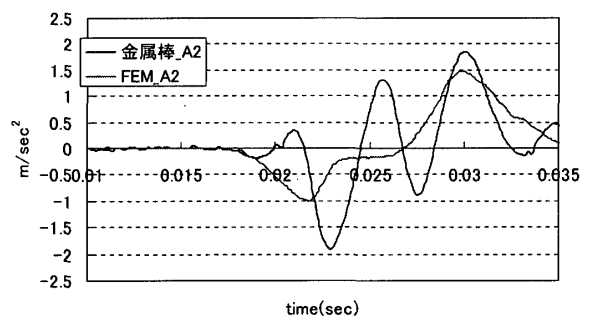


図16 加速度波形の比較 (金属棒とPFWD)

## 8 弾性係数の推定

FEM動的逆解析と小型FWDおよび金属棒のセンサー間に弾性波の到達時分から推定する速度に基づいて推定される弾性係数<sup>8)</sup>を比較した(図17)。この図では30-50とはX=30cmとX=50cmの間で推定することを意味している。

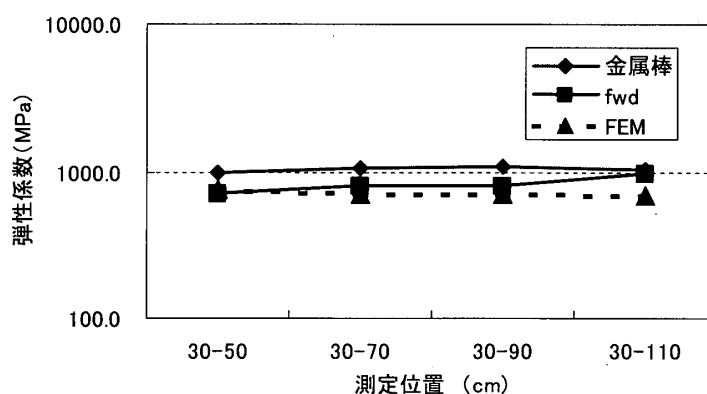


図17 弾性係数の比較

以上の4箇所の測定結果からほぼ同じような弾性係数を得られることが明らかとなった。

## 9 結論

本研究によって以下の点が知見として得られた。

- 1) 地盤内に発生する弾性波の深さ方向と水平方向の距離減衰を実験によって得られた加速度波形によって明らかにした。また減衰の状況も周波数ごとに異なり、FFT解析によって卓越周波数の帯域が存在していることが認められた。この傾向は地盤表面だけでなく金属棒を用いた地盤内で深さ20cmの地点での鉛直方向の加速度測定でも明らかになった。
- 2) リッツベクトルを用いた動的有限要素解析方法を示し、これを利用した理論波形で距離減衰が確認された。また、実験で得られた波形と比較した結果、変位波形と速度波形では同じ傾向が得られた。また加速度波形ではトレンドは似ているものの細部では異なる波形が得られた。
- 3) 実験でえられた波形と理論で得られた波形では表面波形よりも地盤内深さ20cmの地点での波形がより近い傾向にあった。これは地盤内の波形の伝播がより理論的に近いものと推定された。
- 4) 加速度波形は細かい振動まで反映するため、実験で得られた波形は粒状体の地盤の不均一の影響があると推定され、一様と仮定した理論波形とは異なるものと推定された。
- 5) 弾性係数は表面と深さ20cmで弾性波の伝播時間から推定された弾性係数と動的有限要素解析で得られた弾性係数は実用上ほぼ同じ値がえられた。

以上から、粒状路盤の施工に際し、動的有限要素解析方法によって得られる精緻でかつ労力を要する方法によらず、小型FWDの2つのセンサーを用いて地盤表面の伝播時間から推定される弾性係数を用いて施工管理する方法の開発の妥当性が確認された。

最後に本研究に際し、実験現場を提供を頂いた東亜道路工業(株)北海道支店の各位に謝意を表す。

## 参考文献

- 1) Masaki Kamiura, Etsuo Sekine, Nagato Abe, Teruhiko Maruyama : Stiffness evaluation of the subgrade and aggregates using the portable FWD, International Conf. Unbound Aggregates in Road construction 2000. 6 pp217-223
- 2) 岩崎敏男 島津安晃臣：土と基礎の振動，鹿島出版会，1975. 9 pp94-96
- 3) 柴田明德：最新耐震構造解析，最新建築学シリーズ9，森北出版1981. 2，pp69-72
- 4) Edward L. Wilson, Ming-wu Yuan John M. Dicks : Dynamic Analysis by direct superposition on Ritz vectors, Earthquake engineering and Structure Dynamics, vol. 10, 1982. 9, pp813-821
- 5) 鶴飼恵三：地盤技術者のためのFEMシリーズ②弾塑性有限要素法がわかる，丸善，2003. 8，pp239-241
- 6) 董勤喜 松井邦人 八谷好高 坪川将丈：動的荷重を受ける多層弾性構造の効率的有限要素解析と感度解析，土木学会論文集 No.731/I-63,2003. 4，pp247-255
- 7) 長松昭男：モード解析入門，コロナ社，1993. 7，pp411-442
- 8) M.Kamiura & S.Nakayama : Application Of acceleration measurement method for estimating the stiffness of unbound aggregates in roadbed, International Conf. Unbound Aggregates in Road construction 2004. 6 pp125-132