

タイトル	無限の拡がりを持つ弾性板の衝撃荷重問題
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎
引用	北海学園大学工学部研究報告，33：77-96
発行日	2006-02-20

無限の広がりを持つ弾性板の衝撃荷重問題

世戸 憲治*

野中 泰二郎†

Impulsive Loading Problem of Elastic Panel with Infinite Extent

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA†

要旨

最近、地震、事故、テロ等による構造物への衝突・衝撃現象の解析が、有限要素法 (FEM) を用いて多くなされている。しかし、FEM による解析では、パラメトリックな特性が全くつかめない、時間発展を追う過程で誤差が集積しやすいなどの欠点がある。

ここでは、これら現象の基礎的研究として、無限の広がりを持つ弾性板の衝突による衝撃現象を波動方程式の立場で解析する。初め、衝撃は空間時間共に δ -関数的に加わるものとしてその解、すなわち基本解を求める。ただし、この基本解のままでは、板が獲得するエネルギーが無限大となってしまう。この解決のため、衝撃を時間、空間の少なくとも一方は分布させる必要があることを示し、有限なエネルギーが解析的に求められるいくつかの具体例を示す。

参考のため付録に、無限の長さを持つ弦、膜、音波、棒の場合の衝撃問題を扱う。

1 方程式の導入

無限に広い均質な板を考える。この板について、質量体積密度 ρ 、Young 率 E 、Poisson 比 μ 、板厚を h とする。この板の面上にとった座標点 $\mathbf{r} = (x, y)$ 、時刻 t における板の横方向変位を $V(\mathbf{r}, t)$ とする。点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ 、時刻 t_0 の瞬間に、力積 I の衝撃が、他の物体の衝突によって加わったとする。 V が満たす波動方程式は、

$$\rho h V_{tt} = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \Delta^2 V + I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (1.1)$$

となる。ここで、 V の添え字 t は時間 t に関する微分を表わす。Young 率 E は二次元圧縮の場合、 $E/(1-\mu^2)$ に置き換わることに注意する。また、 $h^3/12$ は単位長さあたりの断面 2 次モーメントである。さらに、ここで Δ は 2 次元 Laplacian、また、 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ は 2 次元 δ 関数で

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (1.2)$$

である。ここでは板の剪断変形は考慮していない。

*北海道大学工学部建築学科

Department of Architecture and Building Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University

†中部大学総合工学研究所

Institute of Science and Technology Research, Chubu University

方程式を無次元化するため、つぎの2個の定数

$$c = \sqrt{\frac{E}{12(1-\mu^2)\rho}}, \quad \tau = \frac{h}{c} \quad (1.3)$$

を導入する。ここで、 c は速度、 τ は時間の次元を持つ定数である。これまでに使われた各変数を無次元化するため、

$$x/h \rightarrow x, \quad y/h \rightarrow y, \quad t/\tau \rightarrow t, \quad V/h \rightarrow V, \quad I\tau/(\rho h^4) \rightarrow I \quad (1.4)$$

と改めて置き直すことにする。この変換で方程式は

$$V_{tt} = -\Delta^2 V + I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0) \quad (1.5)$$

と1個の無次元パラメータ I を持ったものになる。

2 方程式の解法

変位 $V(\mathbf{r}, t)$ を Fourier 変換し

$$V(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} K(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (2.1)$$

とおく。ここに、波数ベクトルを $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ とし、 $d\mathbf{k} = dk_x dk_y$ とする。以下、波数ベクトル \mathbf{k} の大きさを k 、同様に、位置ベクトル \mathbf{r} の大きさを r とおく。

(2.1) の表示を方程式 (1.5) に代入すると

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\partial_t^2 + k^4) K d\mathbf{k} = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0) \quad (2.2)$$

となり、これに、 $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ をかけて全平面で積分すると、2次元 δ 関数の積分表示

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.3)$$

を用いて、

$$(\partial_t^2 + k^4) K = \frac{I e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}}{(2\pi)^2} \delta(t - t_0) \quad (2.4)$$

となる。この方程式の初期条件、 $K(\mathbf{k}, 0) = 0$ 、 $K_t(\mathbf{k}, 0) = 0$ を満たす解は、

$$K(\mathbf{k}, t) = \frac{I e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}}{(2\pi k)^2} \sin [k^2(t - t_0)] \theta(t - t_0) \quad (2.5)$$

である。ここに $\theta(t - t_0)$ は step 関数である。これを (2.1) 式に戻して、

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \sin [k^2(t - t_0)] \theta(t - t_0) \quad (2.6)$$

となる. この k 積分は, k と $r - r_0$ のなす角を ϕ として, 極座標に変換すると

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{k} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\cos\phi} \sin[k^2(t-t_0)] \theta(t-t_0) \quad (2.7)$$

この ϕ 積分は, 付録 (A.1) に掲げた Bessel 関数に関する Hansen の積分表示によって実行され,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{k} \sin[k^2(t-t_0)] J_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) \theta(t-t_0) \quad (2.8)$$

さらに, この k 積分も付録 (A.3) に掲げる積分公式によって, 積分正弦関数 si を用いると実行可能であり,

$$V(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{4\pi} \text{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) \theta(t-t_0) \quad (2.9)$$

と得られる. この解をここでは, 方程式 (1.5) の基本解 (fundamental solution) と呼ぶことにする. この解を基にして, 衝撃点, 衝撃時間を $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$ とした場合のグラフを図 1, 図 2 に示す. 図 1 は, 無次元化時間 $t = 0.24$ における変位の様子を描いたものである. この図から衝撃によって発生した波は, 円形状に拡がっていくのがわかる. このモデルでは, 波の伝播速度は波長に逆比例し, 波長が短い波ほど速い速度で伝播する. したがって, 衝撃点近くには, 波長が長い波が取り残され, 遠くなるほど波長が短くなる現象が見られる. また, 式 (2.9) から, 衝突点における変位は, 衝突後の時間に関係なく, $V = I/8$ となることがわかるが, この変位の値を持つ領域は時間が経つにつれ, 衝突点を中心に拡がっていく. 図 2 は, 同じ変位を, 横軸を衝撃点からの距離 r , 斜め縦軸を時間 t で表わしたものである.

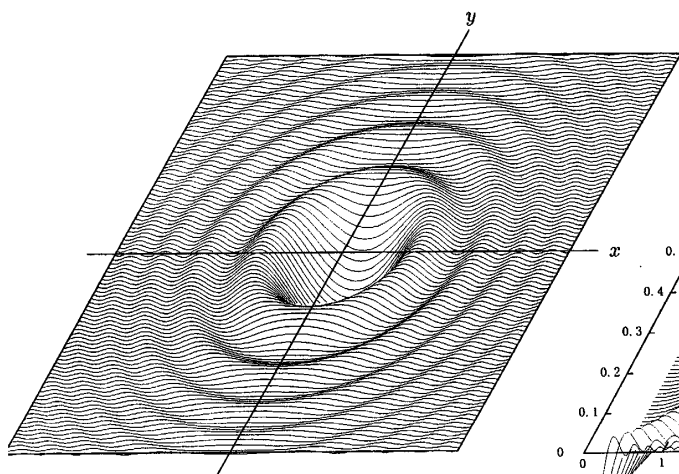


図 1

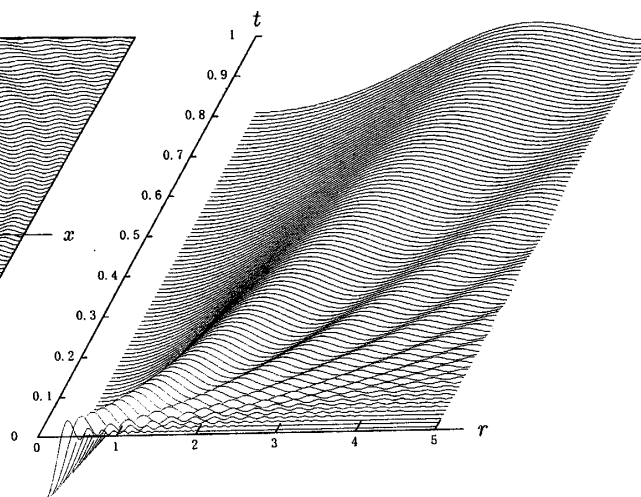


図 2

これで基本解は求まったが, この解は次節で述べるように, エネルギーが無限大になるという欠点を持っている.

以下, この解から逆に方程式を満たすことを証明しよう. まず, ここで用いる積分三角関数 si ,

ci はつぎの式

$$\begin{aligned}\partial_t \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) &= \Delta \operatorname{ci}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right), \\ \partial_t \operatorname{ci}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) &= -\Delta \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

を満たす. さらに, これらをくりかえして,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) &= -\Delta^2 \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right), \\ \partial_t^2 \operatorname{ci}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) &= -\Delta^2 \operatorname{ci}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right).\end{aligned}\quad (2.11)$$

これらの式を用いて, 解 (2.9) を方程式 (1.5) に代入すると, $\operatorname{si}(\infty) = 0$ を用いて

$$-\frac{1}{4\pi} \left[\partial_t \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) \right] \delta(t-t_0) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \delta(t-t_0) \quad (2.12)$$

が成立する必要がある. この式で時間の δ 関数部分を除くと

$$\lim_{t \rightarrow t_0} -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_t \operatorname{si}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) \right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (2.13)$$

となり, さらに, (2.10) を用いると

$$\lim_{t \rightarrow t_0} -\frac{1}{4\pi} \left[\Delta \operatorname{ci}\left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4(t-t_0)}\right) \right] = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \quad (2.14)$$

となる. この式を証明するには, まず第一に, $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ のとき左辺がゼロとなること, 第二に, 左辺の \mathbf{r} 積分が 1 となることがいえるとよい. 前者は, $\operatorname{ci}(\infty) = 0$ からゼロとなる. また, 後者については, 以下数式簡略化のため,

$$M = \frac{1}{4(t-t_0)} \quad (2.15)$$

と置くことにして, (2.14) 式左辺の \mathbf{r} 積分は, 変数を $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}$ と置きなおして,

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \Delta \operatorname{ci}(M(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \Delta \operatorname{ci}(M\mathbf{r}^2), \quad (2.16)$$

さらに, 極座標に変換すると,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} r dr \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \operatorname{ci}(Mr^2) &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dr \partial_r \left[r \partial_r \operatorname{ci}(Mr^2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[r \partial_r \operatorname{ci}(Mr^2) \right]_0^{\infty} = -\left[\cos(Mr^2) \right]_0^{\infty} = 1\end{aligned}\quad (2.17)$$

となって, (2.14), したがって, (2.13) 式の正しいことが証明される. ただし, ここではすべて, 超関数の意味で計算していることに注意する. 付録 A に, この (2.12) 式の別証明を与える.

3 エネルギー計算

板の単位面積あたりの運動エネルギー E_k , 曲げ歪みエネルギー E_s は, 無次元化されていない系で,

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho h V_t^2, \\ E_s &= \frac{E h^3}{24(1-\mu^2)} \left[(\Delta V)^2 + 2(1-\mu)(V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

と与えられる. これらの表式で, (1.4) の無次元化およびエネルギー密度の無次元化

$$E_k/(\rho h c^2) \rightarrow E_k, \quad E_s/(\rho h c^2) \rightarrow E_s \quad (3.2)$$

と書き改めると

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} V_t^2, \\ E_s &= \frac{1}{2} \left[(\Delta V)^2 + 2(1-\mu)(V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. この曲げ歪みエネルギー E_s の大括弧中の2項目は,

$$V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy} = \partial_x(V_{xy}V_y) - \partial_y(V_{xx}V_y) \quad (3.4)$$

と書け, これは全空間で積分したときゼロとなり, 全エネルギーには寄与しない. また, この項は波動方程式にも寄与していない. 以下ではこの項を無視して考える.

これから全エネルギー E_{total} は,

$$E_{\text{total}}/(\rho h^3 c^2) \rightarrow E_{\text{total}} \quad (3.5)$$

として無次元化すると, すべて無次元化された変数で,

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} [V_t^2 + (\Delta V)^2] dr \quad (3.6)$$

と表わされる.

この全エネルギーは, 当然のことながら, 衝突後の $t > t_0$ では, 一定に保たれ,

$$\frac{dE_{\text{total}}}{dt} = 0 \quad (3.7)$$

となる. したがって, 衝突によって板に与えられたエネルギーを見積もる時刻は, 衝突後ならいつでもよいことになる.

ここでは, 衝突直後の $t = t_0 + \epsilon$ で見積もることにする. ϵ は微小時間である. このときは, 衝突効果が, 運動エネルギーに変化しているが, まだ, 歪みエネルギーにまでは変化していない. し

たがって、全エネルギーは、運動エネルギーだけで見積もることができる。変位速度は (2.9) の時間微分から、(2.13) を用いると

$$V_t = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.8)$$

となり、したがって、全運動エネルギー E_{total} は、

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}I^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) d\mathbf{r} = \frac{1}{2}I^2\delta(\mathbf{0}) = \infty \quad (3.9)$$

と無限大になってしまう。これは、衝撃を δ 関数を用いて表示したことに原因がある。次節では、衝撃に時間的空間的な広がりをを持たせた場合を議論する。

4 衝撃に広がりをを持たせた場合

そこで、(1.5) 式において衝突に時間空間の広がりをを持たせる。つまり、

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0) \rightarrow f(\mathbf{r}, t) \quad (4.1)$$

と置き換える。分布関数 $f(\mathbf{r}, t)$ は無次元の関数である。このとき、両辺を空間時間で積分した値が一致するように、

$$\int_0^{\infty} dt \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = 1 \quad (4.2)$$

と規格化する。この置き換えで、方程式 (1.5) は

$$V_{tt} = -\Delta^2 V + If(\mathbf{r}, t) \quad (4.3)$$

となる。(2.1) と同じ Fourier 変換をして、

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\partial_t^2 + k^4) K d\mathbf{k} = If(\mathbf{r}, t), \quad (4.4)$$

両辺に $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ をかけて全空間で積分すると

$$(\partial_t^2 + k^4) K = \frac{I}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (4.5)$$

となる。前々節と同じく、初期条件 $K(\mathbf{k}, 0) = 0$, $K_t(\mathbf{k}, 0) = 0$ を満たすこの解は、Duhamel 積分の形で求まり、

$$K(\mathbf{k}, t) = \frac{I}{(2\pi k)^2} \int_0^t dt' \sin[k^2(t-t')] \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right], \quad (4.6)$$

これを (2.1) に代入して、方程式 (4.3) の解が

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^t dt' \sin[k^2(t-t')] \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right] \quad (4.7)$$

と求まる. この k 積分を実行するため, k と $r - r'$ のなす角を ϕ として, 極座標で表わすと

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \left[\int_0^{\infty} dk \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} d\phi \sin [k^2(t-t')] e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \cos \phi} \right], \quad (4.8)$$

この ϕ 積分は前々節と同じく実行され,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{2\pi} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \left[\int_0^{\infty} dk \frac{1}{k} \sin [k^2(t-t')] J_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \right], \quad (4.9)$$

さらに, k 積分を実行すると,

$$V(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{4\pi} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \text{si} \left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4(t-t')} \right) \quad (4.10)$$

となる. この解は, 前々節で得た基本解 (2.9) の時間空間について, t_0, \mathbf{r}_0 をそれぞれ, t', \mathbf{r}' に置き換え, その点での重み $f(\mathbf{r}', t')$ を付けて重ね合わせたものになっている. このことは, 方程式が線形であること, および,

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (4.11)$$

と書けることから当然である.

5 衝撃を分布させた場合のエネルギー計算

ここでは, 衝撃を時間空間に分布させた場合の板が受け取る全エネルギーを, (3.6) 式から求めてみる. エネルギーを算出するとき, 解 (4.10) 式はまともすぎていてかえって都合が悪い. ここでは, (4.7) 式に戻って考える. まず, 全運動エネルギーから求める. (4.7) を時間で微分して,

$$V_t(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^t dt' \cos [k^2(t-t')] \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}', t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right] \quad (5.1)$$

これを2乗して, \mathbf{r} 積分すると (2.3) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} V_t^2 d\mathbf{r} &= \frac{I^2}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \cos [k^2(t-t')] \cos [k^2(t-t'')] \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'' f(\mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}'', t'') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')} \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる. 全歪みエネルギーも同様に計算され, 結果は \cos が \sin に替わり,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} (\Delta V)^2 d\mathbf{r} &= \frac{I^2}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \sin [k^2(t-t')] \sin [k^2(t-t'')] \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'' f(\mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}'', t'') e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')} \end{aligned} \quad (5.3)$$

となる。これらを加えると、全エネルギーが

$$E_{\text{total}} = \frac{I^2}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \cos[k^2(t' - t'')] \times \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}'' f(\mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}'', t'') e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} \quad (5.4)$$

と求まる。この時点で、被積分関数に含まれる時間 t は消去され、積分の上限のみとなる。したがって、この積分値は、衝突が終了した後は一定値となる。つまり、当然のことながら、全エネルギーは保存することを意味する。以下では、衝突が完全に終了した時点でのエネルギーを求めことにし、時間積分の上限を ∞ とおく。

ここで、 $f(\mathbf{r}, t)$ のうち、 \mathbf{r} について Fourier 変換、 t について Fourier-cosine, sine 変換したものを

$$\begin{cases} \hat{f}_c(\mathbf{k}) \\ \hat{f}_s(\mathbf{k}) \end{cases} = \int_0^{\infty} dt \begin{cases} \cos(k^2 t) \\ \sin(k^2 t) \end{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, t) \quad (5.5)$$

と定義する。この置き換えで、(5.4) 式は

$$E_{\text{total}} = \frac{I^2}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left[|\hat{f}_c(\mathbf{k})|^2 + |\hat{f}_s(\mathbf{k})|^2 \right] \quad (5.6)$$

となる。

以下、分布関数 $f(\mathbf{r}, t)$ として特別な場合を考えてみる。

空間的には分布しているが、時間的には δ 関数の場合

$$f(\mathbf{r}, t) = R(\mathbf{r}) \delta(t - t_0), \quad \iint_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1 \quad (5.7)$$

とおくと (5.5) 式は、

$$\begin{cases} \hat{f}_c(\mathbf{k}) \\ \hat{f}_s(\mathbf{k}) \end{cases} = \begin{cases} \cos(k^2 t_0) \\ \sin(k^2 t_0) \end{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} R(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.8)$$

となり、これを (5.6) に代入すると、(2.3) を用いて、全エネルギーは、

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} I^2 \iint_{-\infty}^{\infty} R^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5.9)$$

と求まる。特に、分布関数 $R(\mathbf{r})$ が角度に依存しない r のみの関数のときは、

$$E_{\text{total}} = \pi I^2 \int_0^{\infty} R^2(r) r dr \quad (5.10)$$

となる。

時間的に分布しているが、空間的には δ 関数の場合

$$f(r, t) = \delta(r)T(t), \quad \int_0^{\infty} T(t)dt = 1 \quad (5.11)$$

とおくと (5.5) 式は,

$$\begin{cases} \hat{f}_c(\mathbf{k}) \\ \hat{f}_s(\mathbf{k}) \end{cases} = \int_0^{\infty} dt \begin{cases} \cos(k^2 t) \\ \sin(k^2 t) \end{cases} T(t) \quad (5.12)$$

となり、これを (5.6) に代入すると、超関数での積分

$$\iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \cos[k^2(t' - t'')] = \pi^2 \delta(t' - t'') \quad (5.13)$$

を用いて,

$$E_{\text{total}} = \frac{I^2}{8} \int_0^{\infty} T^2(t)dt \quad (5.14)$$

となる.

(5.9) (5.10) (5.14) の結果を見ると、いずれも分布関数 R および T の2乗の積分になっている。これらの関数は、(5.7) (5.11) で規定されたように、その1乗の積分値は規格化されている。このようなとき、それらの関数の形が、平らであればあるほど2乗の積分値は小さくなり、逆に、一部に集中した尖った関数ほど2乗の積分値は大きくなる。したがって、衝撃を受けた方が獲得するエネルギーの大きさは、これら関数の形に依存して決まることになる。

時間空間共に区間内一定値で分布している場合

ここでは、分布関数が空間的に半径 r_0 の円内で、時間間隔 $(0, t_0)$ の間、一定値をとる場合を考える。

$$f(r, t) = \begin{cases} f_0, & \text{for } 0 < r < r_0 \text{ and } 0 < t < t_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.15)$$

とおく。ここに,

$$f_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 t_0} \quad (5.16)$$

とする。(5.5) から,

$$\begin{cases} \hat{f}_c(k) \\ \hat{f}_s(k) \end{cases} = \frac{2}{r_0 t_0 k^3} \begin{cases} \sin(k^2 t_0) \\ 1 - \cos(k^2 t_0) \end{cases} J_1(kr_0) \quad (5.17)$$

となり、(5.6) に代入すると

$$E_{\text{total}} = \frac{2I^2}{\pi(r_0 t_0)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^5} [1 - \cos(k^2 t_0)] J_1^2(kr_0) dk \quad (5.18)$$

となるが、この k 積分はおそらく既知の関数では表わせないだろう。ただ、言えることは、この式で、 $t_0 \rightarrow 0$ あるいは $r_0 \rightarrow 0$ のときは、積分できて、

$$E_{\text{total}} = \begin{cases} I^2/(2\pi r_0^2), & \text{for } t_0 \rightarrow 0 \\ I^2/(8t_0), & \text{for } r_0 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

これらは (5.10) および (5.14) から求めた値と一致する。

時間的には区間内一定値、空間的には正規分布の場合

分布関数を

$$f(r, t) = A e^{-r^2/(2r_0^2)} \theta(t_0 - t) \quad (5.20)$$

とおく。ここに θ は step 関数、また、 r_0, t_0 は分布の拡がりを表わすパラメータである。(4.2) の制限から、

$$A = \frac{1}{2\pi r_0^2 t_0} \quad (5.21)$$

となる。これから、(5.5) 式の \hat{f}_c, \hat{f}_s を求める。このとき、付録 (A.1) の積分、および (A.5) Weber 積分が使える、

$$\begin{cases} \hat{f}_c(k) \\ \hat{f}_s(k) \end{cases} = \frac{1}{t_0 k^2} \begin{cases} \sin(t_0 k^2) \\ 1 - \cos(t_0 k^2) \end{cases} e^{-r_0^2 k^2/2} \quad (5.22)$$

これを (5.6) に代入して、

$$E_{\text{total}} = \frac{I^2}{4\pi t_0^2} \int_0^\infty \frac{1}{k^4} [1 - \cos(t_0 k^2)] e^{-r_0^2 k^2} dk^2 \quad (5.23)$$

この k^2 に関する積分は付録 (A.7) によって実行され、

$$E_{\text{total}} = \frac{I^2}{8\pi} \left[\frac{2}{t_0} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{t_0}{r_0^2} \right) + \frac{r_0^2}{t_0^2} \log \left(\frac{r_0^4}{r_0^4 + t_0^2} \right) \right] \quad (5.24)$$

となる。

この式で、分布パラメータの無限小極限 $t_0 \rightarrow 0$ あるいは $r_0 \rightarrow 0$ の操作をすると、それぞれ

$$E_{\text{total}} = \begin{cases} I^2/(8\pi r_0^2), & \text{for } t_0 \rightarrow 0 \\ I^2/(8t_0), & \text{for } r_0 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

となるが、この値は (5.10) および (5.14) から求めたものと一致している。また、無限大の極限では、どちらのパラメータの場合でも全エネルギーの値はゼロに近づく。

6 曲げ歪みの見積もり

板の面上任意の点における曲率は、その直截口の方角によって異なり、その最大値最小値は曲率テンソルを対角化した主曲率によって与えられる。ただし、微分幾何学で定義されるこれらの量はすべて非線形であるが、ここでは、これらを線形化した範囲で扱うものとする。すなわち、

$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{diagonalize}} \begin{pmatrix} \kappa_+ & 0 \\ 0 & \kappa_- \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

である。ここに、 κ_{\pm} は主曲率で、

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\Delta V \pm \sqrt{(V_{xx} - V_{yy})^2 + 4V_{xy}^2} \right] \quad (6.2)$$

で与えられる。この主曲率に板厚の半分の長さ $h/2$ を掛けたものが、板の表面における曲げによって発生する伸び縮みの主歪み ε_{\pm} を与える。ただし、無次元化した系では、板厚を 1 としているので、

$$\varepsilon_{\pm}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \kappa_{\pm} = \frac{1}{4} \left[\Delta V \pm \sqrt{(V_{xx} - V_{yy})^2 + 4V_{xy}^2} \right] \quad (6.3)$$

となる。さらに、この主歪み ε_{\pm} の相加平均をとった平均歪み $\bar{\varepsilon}$ を

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) = \frac{1}{4} \Delta V \quad (6.4)$$

と定義する。

この平均歪み $\bar{\varepsilon}$ は、衝撃を時間空間に分布させた解 (4.10) では、

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{16\pi} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \Delta \text{si} \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4(t-t')} \right) \quad (6.5)$$

あるいは、(2.10) を用いて

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{16\pi} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f(\mathbf{r}', t') \partial_t \text{ci} \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4(t-t')} \right) \quad (6.6)$$

となる。この右辺の最後の ci 関数の時間微分は、符号を変えて、 t 微分から t' 微分に変えることができ、さらに、 $f(\mathbf{r}, 0) = 0$ かつ、 t は衝突終了後の時間という条件のもとに部分積分すると

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{16\pi} \int_0^t dt' \iint_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' [\partial_{t'} f(\mathbf{r}', t')] \text{ci} \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4(t-t')} \right) \quad (6.7)$$

と表わされる。

この平均歪みを具体的な分布関数に基づいて、積分可能な例を見つけることは大変難しい。ここではつぎの 2 例だけを挙げる。

時間的に区間内一定値，空間的には δ 関数の場合

分布関数として

$$f(\mathbf{r}, t) = A\delta(\mathbf{r})\theta(t - t_0)\theta(t_1 - t), \quad A = 1/(t_1 - t_0) \quad (6.8)$$

を仮定する。このとき，(6.7) から

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{16\pi(t_1 - t_0)} \left[\text{ci}\left(\frac{r^2}{4(t - t_0)}\right) - \text{ci}\left(\frac{r^2}{4(t - t_1)}\right) \right], \quad t > t_1 \quad (6.9)$$

となる。もし，時間 t を衝突終了直後の $t \rightarrow t_1$ とすると， $\text{ci}(\infty) = 0$ より，

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t_1) = \frac{I}{16\pi(t_1 - t_0)} \text{ci}\left(\frac{r^2}{4(t_1 - t_0)}\right) \quad (6.10)$$

この式から，衝突点の $r = 0$ では， $\text{ci}(0) = -\infty$ より平均歪みが発散し，必ず破壊が起こることがわかる。

もし，(6.10) 式で $t_1 \rightarrow t_0$ の極限をとる，すなわち，時間空間共に δ 関数の場合を考えると，

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{16\pi(t - t_0)} \cos\left(\frac{r^2}{4(t - t_0)}\right), \quad t > t_0 \quad (6.11)$$

となる。衝突終了直後 $t \rightarrow t_0$ ではやはり発散している。

時間的には δ 関数，空間的には正規分布の場合

ここで，分布関数 $f(\mathbf{r}, t)$ が，

$$f(\mathbf{r}, t) = Ae^{-r^2/(2r_0^2)}\delta(t - t_0), \quad A = \frac{1}{2\pi r_0^2} \quad (6.12)$$

と与えられた場合の平均歪みを見積もってみる。このときは，(6.6) (6.7) 式よりも元の形である (4.7) 式から出発する方がよい。これから，

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{8\pi r_0^2} \int_0^\infty kdk J_0(kr) \sin[k^2(t - t_0)] \left[\int_0^\infty e^{-r'^2/(2r_0^2)} J_0(kr') r' dr' \right] \quad (6.13)$$

付録 (A.5) の Weber 積分を使って，

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I}{8\pi} \int_0^\infty \sin[k^2(t - t_0)] e^{-r_0^2 k^2/2} J_0(kr) kdk \quad (6.14)$$

さらに，付録 (A.6) を用いて，

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I e^{-\theta_1} [2(t - t_0) \cos \theta_2 - r_0^2 \sin \theta_2]}{8\pi [r_0^4 + 4(t - t_0)^2]} \quad (6.15)$$

ここに，

$$\theta_1 = \frac{r_0^2 r^2/2}{r_0^4 + 4(t - t_0)^2}, \quad \theta_2 = \frac{(t - t_0)r^2}{r_0^4 + 4(t - t_0)^2} \quad (6.16)$$

と定義した。(6.15) 式は、三角関数の合成をして、

$$\bar{\varepsilon}(r, t) = -\frac{a e^{-\theta_1} \cos(\theta_2 + \alpha)}{8\pi\sqrt{r_0^4 + 4(t-t_0)^2}}, \quad \alpha = \text{Tan}^{-1} \frac{r_0^2}{2(t-t_0)} \quad (6.17)$$

とも書ける。

この式で、 $t \rightarrow t_0$ の極限では、 $\bar{\varepsilon} = 0$ となる。つまり、衝突直後では、衝撃は運動エネルギーに変化しているが、まだ歪みエネルギーには変化していないことを表わす。

また、 $r_0 \rightarrow 0$ の極限では、(6.11) 式と一致する。

付録

A 積分公式と積分三角関数, その他

Bessel 関数に関する積分公式

Bessel 関数に関する Hansen の積分表示 (数学公式Ⅲ 特殊関数, 岩波全書 P.178)

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \phi} d\phi. \quad (A.1)$$

この式で、被積分関数を実部、虚部に分けると、

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \phi) d\phi, \quad 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(z \cos \phi) d\phi. \quad (A.2)$$

となる。

(2.9) および (4.10) 式の導出に用いた Bessel 関数に関する積分公式 (新数学公式集Ⅱ 特殊関数, 丸善 P.198, 8.)

$$\int_0^\infty \frac{1}{k} \left\{ \begin{array}{l} \sin(ak^2) \\ 1 - \cos(ak^2) \end{array} \right\} J_0(bk) dk = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{si}(b^2/(4a)) \\ \text{ci}(b^2/(4a)) \end{array} \right\} \quad (A.3)$$

ここに、si, ci は以下で述べる積分三角関数である。

さらに類似した積分公式として (新数学公式集Ⅱ 特殊関数, 丸善 P.198, 5.)

$$\int_0^\infty k \left\{ \begin{array}{l} \sin(ak^2) \\ \cos(ak^2) \end{array} \right\} J_0(bk) dk = \frac{1}{2a} \left\{ \begin{array}{l} \cos(b^2/(4a)) \\ \sin(b^2/(4a)) \end{array} \right\}, \quad (A.4)$$

この式で、 a について 0 から a まで積分したものが、(A.3) 式である。(A.4) 式の証明は、この付録の最後に掲げる。

(5.22) (6.14) 式の導出に用いた Weber 積分 (数学公式Ⅲ 特殊関数, 岩波全書 P.200)

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} J_0(kx) dx = \frac{1}{2p} e^{-k^2/(4p)}, \quad \text{Re } p > 0 \quad (A.5)$$

この式で, $p \rightarrow p + iq$ として, 実部, 虚部に分離すると (6.15) 式の導出に用いた

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} \begin{Bmatrix} \cos(qx^2) \\ \sin(qx^2) \end{Bmatrix} J_0(kx) dx = \frac{1}{2(p^2 + q^2)} e^{-\theta_1} \left[\pm p \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \right],$$

$$\theta_1 = \frac{pk^2}{4(p^2 + q^2)} \quad \theta_2 = \frac{qk^2}{4(p^2 + q^2)} \quad (\text{A.6})$$

が出る.

(5.24) 式の導出に用いた積分公式, (新数学公式集 I 初等関数, 丸善 P.449, 9.) ただし, この公式集では, $\sin(ax)\sin(bx)$ となっているが, ここでは $a = b$ とした.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \sin^2(ax) e^{-px} dx = a \tan^{-1} \left(\frac{2a}{p} \right) + \frac{p}{4} \log \left(\frac{p^2}{p^2 + 4a^2} \right) \quad (\text{A.7})$$

積分三角関数について

以下, 積分正弦関数 si, 積分余弦関数 ci について述べる. その定義は,

$$\text{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad (\text{A.8})$$

である. これらのおおまかな振舞いは,

$$\begin{aligned} \text{si}(0) &= -\pi/2, & \text{si}(x) &\sim -\cos(x)/x, & \text{for } x \gg 1 \\ \text{ci}(x) &\sim \gamma + \log x, & \text{for } x \ll 1, & & \text{ci}(x) \sim \sin(x)/x, & \text{for } x \gg 1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

である. ここに, γ は Euler 定数である. 両関数とも十分大きな x に対し減衰振動しながらゼロに収束する.

これらの関数の不定積分は, その積分表示を用いて, 積分順序の変更をすることで実行される. 結果は,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \text{si}(at) dt &= -\frac{1}{a} \cos(ax) - x \text{si}(ax) \\ \int_x^\infty \text{ci}(at) dt &= \frac{1}{a} \sin(ax) - x \text{ci}(ax) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となり, 特に, $x = 0$ では,

$$\int_0^\infty \text{si}(at) dt = -\frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty \text{ci}(at) dt = 0 \quad (\text{A.11})$$

となる.

(2.12) 式の別証明

まず, 積分正弦関数を使った δ 関数の表示

$$\lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{M}{\pi} \text{si}(M(r - r_0)^2) = \delta(r - r_0) \quad (\text{A.12})$$

を証明する. この式で, $r \neq r_0$ のときは, (A.9) から

$$\text{左辺} \sim \frac{\cos(M(r-r_0)^2)}{\pi(r-r_0)^2} \quad (\text{A.13})$$

これは, 超関数的に $M \rightarrow \infty$ でゼロとみなせる. また, 左辺の積分は, $r-r_0 \rightarrow r$ と変数変換してから, 極座標に変換すると, (A.11) が使え,

$$-\frac{M}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{si}(M(r-r_0)^2) dr = -M \int_0^{\infty} \text{si}(Mr^2) dr^2 = 1 \quad (\text{A.14})$$

となる. これで (A.12) が証明された. つぎに, (2.12) 式の左辺で

$$M = \frac{1}{4(t-t_0)} \quad (\text{A.15})$$

とおき,

$$-\frac{1}{4\pi} \left[\partial_t \text{si} \left(\frac{(r-r_0)^2}{4(t-t_0)} \right) \right] \delta(t-t_0) = -\frac{1}{\pi} \left[\partial_t(t-t_0) M \text{si}(M(r-r_0)^2) \right] \delta(t-t_0) \quad (\text{A.16})$$

となるが, この中の M は $\delta(t-t_0)$ のおかげで, $M \rightarrow \infty$ となり, (A.12) から, さらに,

$$= [\partial_t(t-t_0) \delta(r-r_0)] \delta(t-t_0) = \delta(r-r_0) \delta(t-t_0) \quad (\text{A.17})$$

となって, (2.12) 式が証明される. この証明では, 微分と極限操作の入れ替えを行っている.

(A.4) (A.5) 式の証明

積分 $\int_0^{\infty} k e^{iak^2} J_0(bk) dk$ を考える. これに, Hansen の積分表示を用いるとつぎのように計算される.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} k e^{iak^2} J_0(bk) dk &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k e^{iak^2} \left[\int_0^{2\pi} e^{ibk \cos \phi} d\phi \right] dk = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk e^{ia(k^2+b \cdot k/a)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk e^{ia(k+b/(2a))^2 - ib^2/(4a)} = \frac{e^{-ib^2/(4a)}}{2} \int_0^{\infty} dk^2 e^{iak^2} = \frac{e^{-ib^2/(4a)}}{2a} i \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

両辺の実部, 虚部を等しいとして,

$$\int_0^{\infty} k \cos(ak^2) J_0(bk) dk = \frac{1}{2a} \sin\left(\frac{b^2}{4a}\right), \quad \int_0^{\infty} k \sin(ak^2) J_0(bk) dk = \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{b^2}{4a}\right) \quad (\text{A.19})$$

これを a で, 0 から a まで積分すると (A.3) 式がでる. また, (A.18) で a を ip とおくと (A.5) の Weber 積分がでる.

以下, 参考のため, 弦, 膜, 音波および棒の場合の衝撃問題に対する基本解について述べる.

B 無限に長い弦の衝撃について

質量線密度 ρ , 伝播速度 c の無限に長い弦に, 力積 I の衝撃が点 $x = x_0$ に加わるものとして, 方程式を

$$\rho V_{tt} = \rho c^2 V_{xx} + I \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) \quad (\text{B.1})$$

とする. V を変数 x について Fourier 変換し,

$$V(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} K(k, t) dk \quad (\text{B.2})$$

として, 方程式に代入すると,

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} [\partial_t^2 + (ck)^2] K(k, t) dk = I \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad (\text{B.3})$$

Fourier 逆変換をして,

$$[\partial_t^2 + (ck)^2] K(k, t) = \frac{I}{2\pi\rho} e^{-ikx_0} \delta(t - t_0) \quad (\text{B.4})$$

を得, これを解いて,

$$K(k, t) = \frac{I}{2\pi\rho} e^{-ikx_0} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} \theta(t - t_0) \quad (\text{B.5})$$

となる. これを (B.2) に戻して,

$$V(x, t) = \frac{I}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} dk \theta(t - t_0). \quad (\text{B.6})$$

ここで, 指数関数の部分を \cos, \sin に分解すると, \sin の部分は奇関数となって落ちる. したがって,

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{I}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \cos [k(x - x_0)] \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} dk \theta(t - t_0) \\ &= \frac{I}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ck} \left\{ \sin [ck(t - t_0) + k(x - x_0)] + \sin [ck(t - t_0) - k(x - x_0)] \right\} dk \theta(t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ここで, 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\zeta)}{\zeta} d\zeta = \text{sgn}(a)\pi, \quad \text{sgn は符号関数} \quad (\text{B.8})$$

を用いて,

$$V(x, t) = \frac{I}{4\rho c} \left\{ \text{sgn}[c(t - t_0) + (x - x_0)] + \text{sgn}[c(t - t_0) - (x - x_0)] \right\} \theta(t - t_0) \quad (\text{B.9})$$

あるいは,

$$V(x, t) = \frac{I}{2\rho c} \theta(t - t_0) \begin{cases} 0, & |x - x_0| > c(t - t_0) \\ 1, & |x - x_0| \leq c(t - t_0) \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

となって, 変位の大きさ $I/(2\rho c)$ が一定速度 c で, x 軸の両側に進んでいく結果となる.

C 無限に広い膜の衝撃について

質量面密度 ρ , 伝播速度 c の無限に広い膜の 1 点 $\mathbf{r} = 0$ に, 力積 I の衝撃が加わるとき, 膜の波動方程式を

$$\rho V_{tt} = \rho c^2 \Delta V + I \delta(\mathbf{r}) \delta(t - t_0) \quad (\text{C.1})$$

とする. ここに,

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y). \quad (\text{C.2})$$

変位 V を Fourier 変換し,

$$V(\mathbf{r}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} K(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (\text{C.3})$$

として, 方程式に代入すると,

$$\rho \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\partial_t^2 + (ck)^2] K(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = I \delta(\mathbf{r}) \delta(t - t_0) \quad (\text{C.4})$$

Fourier 逆変換をして, 結果は,

$$[\partial_t^2 + (ck)^2] K(\mathbf{k}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2 \rho} \delta(t - t_0) \quad (\text{C.5})$$

これを解いて,

$$K(\mathbf{k}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2 \rho} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} \theta(t - t_0) \quad (\text{C.6})$$

これを元の式 (C.3) に戻して,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2 \rho} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} d\mathbf{k} \theta(t - t_0) \quad (\text{C.7})$$

ここで, \mathbf{k} の極座標を採用すると,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^2 \rho c} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin [ck(t - t_0)] \theta(t - t_0) \quad (\text{C.8})$$

Hansen の積分表示 (A.1) を用いて,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{2\pi \rho c} \int_0^{\infty} dk J_0(kr) \sin [ck(t - t_0)] \theta(t - t_0) \quad (\text{C.9})$$

さらに, この k 積分を実行すると,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{2\pi \rho c} \theta(t - t_0) \frac{\theta[c(t - t_0) - r]}{\sqrt{c^2(t - t_0)^2 - r^2}} \quad (\text{C.10})$$

あるいは,

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{2\pi \rho c} \theta(t - t_0) \begin{cases} 0, & r \geq c(t - t_0) \\ \frac{1}{\sqrt{c^2(t - t_0)^2 - r^2}}, & r < c(t - t_0) \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

と求まる. この解は, $r = c(t - t_0)$ で発散し, 不連続となるが, 衝撃に大きさを持たせたときには, 有限値になる.

D 音波の場合

質量体積密度 ρ , 伝播速度 c の 3 次元の媒体中を伝播する音波の場合を考える。ここで, 力積 I の衝撃を z 方向に与えたときの波動方程式は,

$$\rho \mathbf{V}_{tt} = \rho c^2 \Delta \mathbf{V} + I \delta(\mathbf{r}) \delta(t - t_0) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.1})$$

と表わせる。ここに \mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトルである。 \mathbf{V} を Fourier 変換し,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{K}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad (\text{D.2})$$

として, 方程式に代入し,

$$\rho \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} [\partial_t^2 + (ck)^2] \mathbf{K}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = I \delta(\mathbf{r}) \delta(t - t_0) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.3})$$

Fourier 逆変換をすると

$$[\partial_t^2 + (ck)^2] \mathbf{K}(\mathbf{k}, t) = \frac{I}{(2\pi)^3 \rho} \delta(t - t_0) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.4})$$

これを解いて,

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}, t) = \frac{I}{(2\pi)^3 \rho} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.5})$$

元の (D.2) に戻して,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{I}{(2\pi)^3 \rho} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\sin [ck(t - t_0)]}{ck} d\mathbf{k} \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.6})$$

以下, この \mathbf{k} 積分は極座標を採用して, つぎのように計算される.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \frac{I}{(2\pi)^3 \rho c} \int_0^\infty k dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sin [ck(t - t_0)] \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{I}{2\pi^2 \rho c r} \int_0^\infty dk \sin(kr) \sin [ck(t - t_0)] \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{I}{4\pi^2 \rho c r} \int_0^\infty dk \left\{ \cos [kr - ck(t - t_0)] - \cos [kr + ck(t - t_0)] \right\} \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{I}{4\pi \rho c} \frac{\delta[r - c(t - t_0)]}{r} \theta(t - t_0) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

これは, 衝撃波を表わしている.

E 棒の場合

無限に長い棒を考え, 横方向の衝撃問題を解く. 棒の厚さを a , 幅を b とすると方程式は,

$$\rho ab V_{tt} = -\frac{Ea^3 b}{12} V_{xxxx} + I \delta(x) \delta(t) \quad (\text{E.1})$$

ab は棒の断面積, $a^3b/12$ は棒の断面 2 次モーメントである. 力積 I は厚さ a 方向に作用すると考える. ここで, 速度と時間の次元を持つ量,

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \quad \tau = \frac{a}{c} \quad (\text{E.2})$$

を導入し, 各変数を無次元化して, 新しく

$$x/a \rightarrow x, \quad V/a \rightarrow V, \quad t/\tau \rightarrow t, \quad \frac{I\tau}{\rho a^3 b} \rightarrow I \quad (\text{E.3})$$

と定義しなおす. 方程式は

$$V_{tt} = -V_{xxxx} + I\delta(x)\delta(t) \quad (\text{E.4})$$

となる.

この方程式を解くため, V を Fourier 変換し,

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} K(k, t) dk \quad (\text{E.5})$$

とにおいて, 代入すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} [\partial_t^2 + k^4] K(k, t) dk = I\delta(x)\delta(t) \quad (\text{E.6})$$

両辺に $e^{-ik'x}$ をかけて, x 積分すると

$$[\partial_t^2 + k^4] K(k, t) = \frac{I}{2\pi} \delta(t) \quad (\text{E.7})$$

これを解いて,

$$K(k, t) = \frac{I}{2\pi} \frac{\sin(k^2 t)}{k^2} \theta(t) \quad (\text{E.8})$$

これを元の式に入れると

$$V = \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\sin(k^2 t)}{k^2} dk \theta(t) = \frac{I}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) \frac{\sin(k^2 t)}{k^2} dk \theta(t) \quad (\text{E.9})$$

この積分は, 実行できて,

$$V(x, t) = \frac{I}{2} \left\{ |x| \left[S_R\left(\frac{x^2}{4t}\right) - C_R\left(\frac{x^2}{4t}\right) \right] + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4t}\right) \right\} \theta(t) \quad (\text{E.10})$$

(新数学公式集 I 初等関数, 丸善, P.431, 10 ただし, この公式集では, 括弧の位置が間違えている.) ここに, S_R, C_R は Fresnel 関数で,

$$S_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad C_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \quad (\text{E.11})$$

と定義され, その漸近形は, $x \rightarrow \infty$ で,

$$S_R(x) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cos(x), \quad C_R(x) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sin(x) \quad (\text{E.12})$$

この漸近形の式は、 $x \simeq 5$ 以上でほとんど正しい値を示す。また、 $x \rightarrow 0$ での近似式は、

$$S_R(x) \simeq \frac{x}{3} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}, \quad C_R(x) \simeq \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \quad (\text{E.13})$$

となる。ここで、 S 、 C に添え字 R を付けたのは、つぎの Batemann 流の定義と区別するためで、他の書物では、付けないのが普通である。

Batemann Manuscripts, Tables of Integral Transforms Volume I, P.23, 1.7.(3) にも (E.9) の積分公式はあるが、ここでの Fresnel 関数の定義と違っている。Batemann Manuscripts の Fresnel 関数を $S_B(x)$ 、 $C_B(x)$ とすると

$$S_B(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad C_B(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt \quad (\text{E.14})$$

(E.11) の定義とは

$$S_B(x) = S_R\left(\frac{\pi}{2}x^2\right), \quad C_B(x) = C_R\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) \quad (\text{E.15})$$

$$S_R(x) = S_B\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad C_R(x) = C_B\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right) \quad (\text{E.16})$$

の関係にある。

(E.10) は Batemann 流の Fresnel 関数で書くと、

$$V(x, t) = \frac{I}{2} \left\{ |x| \left[S_B\left(\frac{|x|}{\sqrt{2\pi t}}\right) - C_B\left(\frac{|x|}{\sqrt{2\pi t}}\right) \right] + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4t}\right) \right\} \theta(t) \quad (\text{E.17})$$

と表わされる。(E.10) と (E.17) でどちらが良いとも言えないが、どちらかという、(E.10) の方が形が良いので、ここではこのロシヤ流を採用する。

(E.10) 式で $t \rightarrow \infty$ の極限をとると、大括弧中の 2 項目のみが効いてきて、

$$V(x, t) \rightarrow I\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \quad (\text{E.18})$$

とその変位は \sqrt{t} に比例して大きくなるのがわかる。この事実は、弦あるいは板の場合が、 $t \rightarrow \infty$ の極限で有限値に留まったのと比べ、著しく異なる点である。