HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	衝撃荷重を受ける半無限弾性体の解析解 ： 平面歪みの場合
著者	世戸，憲治；野中，泰二郎
引用	北海学園大学工学部研究報告，35：27-47
発行日	2008-02-00

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

衝撃荷重を受ける半無限弾性体の解析解
——平面歪みの場合——

世戸　憲治*　　野中　泰二郎**

Analytical Solution of Semi-Infinite Elastic Body under Impulsive Loading — Plane-Strain Case —

Kenji SETO* and Taijiro NONAKA**

要旨

半無限弾性体の表面上に無限に長い帯状領域をとり，この領域に，時間的にデルタ関数で表わせるような衝撃力が加わった場合の弾性体に発生する変位を解析的な形で求めた．このときの解は，一般に，波数 k と角振動数 ω に関する二重積分の形となるが，ω 積分の方は解析的に実行可能であり，でき得る限りコンパクトな形の解を求めることにした．k 積分の方は解析的に実行するには非常に煩雑であり，この積分に関しては，コンピュータによる数値解を求めた．

0. はじめに

Lord Rayleigh によって，半無限弾性体の表面波が理論的に解明されたのは，1887 年のことである [1),2)]．これは，弾性体の表面を無応力として，いわゆる自由表面上に発生する平面波を弾性体波動方程式の理論解として導入したものである．これとまったく同じ手法で，面に垂直な軸の軸対称歪みの場合の解，すまわち，局所的に存在する表面局在波の解を導くこともできる．その後，この解は，Lamb および Reissner によって，上下方向の点加振，円加振の場合の解を導くために拡張された [3),4)]．1950 年代以後には，さらに，上下方向のみならず，水平方向，回転，ねじれ等の各加振に対する解が導かれるようになり，地震時の地盤と構造物の相互作用の解析に使われている．これらの事情については，文献 5) に詳しく述べられているが，これらの研究は，動的解析とはいっても，時間的に三角関数で表わされる定常加振の場合だけで，変位の振動もそれに合わせた定常振動の場合に限られてきた．一方，時間的に変動する加振については，Pekeris, Lang, Mitra 等により，加える圧力に対し時間的に階段関数を設定した解が求められている [6),7),8)]．

*北海学園大学　工学部　建築学科
*Department of Architecture and Building Engineering, Faculty of Engineering, Hokkai-Gakuen University, E-mail: seto@elsa.hokkai-s-u.ac.jp
**京都市伏見区醍醐古道町 8-4,　E-mail: nonaka_tai@ybb.ne.jp

この論文では，出来うる限り，解析的な解を求めることに主眼をおき，時間的にデルタ関数で表わされる衝撃を加えた場合の方程式を扱った．デルタ関数で与えられる衝撃解が求まると，線形微分方程式の場合，任意の時間関数で表わされる衝撃の場合にも拡張できるからである．加振する領域として，解析のし易さから，円形領域，帯状領域が考えられるが，この論文では，その手始めとして，半無限弾性体の表面の帯状領域に衝撃が加えられた場合を扱う．このときは，空間 x, y と時間 t の 3 次元問題となり，衝撃が与えられたときの変位 $\boldsymbol{U}$ を Fourier 変換した形で解を求めると，解は波数 k と角振動数 ω との二重積分の形で求められる．弾性体の表面 $y=0$ に限定すると，問題はいくぶん簡単化され，角振動数 ω の積分は解析的に実行可能である．しかし，波数 k の積分は，煩雑すぎて解析的に実行するには無理でありコンピュータによる数値積分を行った．このとき，変位 $\boldsymbol{U}$ が実数値で求まるための積分路のとり方を提起した．

円形領域に衝撃を与えるときの解析については，次回の論文で議論する．

1. 方程式の導入とその解法

方程式の導入

半無限弾性体の表面の帯状の領域に衝撃を加えた場合の方程式を解く．図 1 のように，弾性体の面上に x 軸，深さ方向に y 軸，表面上の x 軸に垂直に z 軸をとる．ここでは図の表現上，有限の大きさで表わしてあるが，実際は，水平方向，深さ方向共に無限の大きさを持つものとする．ここで与える衝撃は，z 軸に沿って，$z=-\infty$ から $z=\infty$ まで，その幅 $-x_0 \leq x \leq x_0$ で，一様な衝撃を与える．この問題では，z 方向の変位は発生せず，また，変位の x, y 方向成分は z 依存性を持たない．その結果，歪みの成分に関し，$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{33}=0$ が成立し，いわゆる平面歪みの問題として扱うことができる．したがって，以下では 2 次元座標 (x, y) のみで解析する．

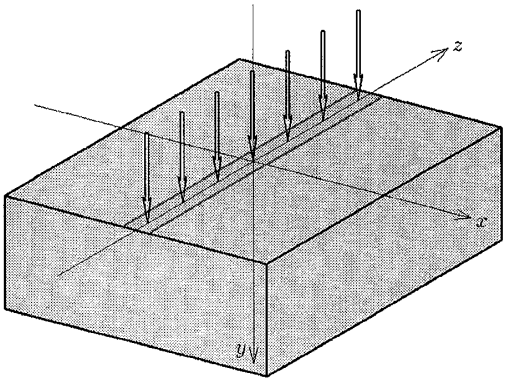

図 1 座標系

任意の点 (x, y), 任意の時刻 t における x, y 方向の変位ベクトルを $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)$ とする．これから，歪みテンソル ε_{ij} は，

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.1}$$

と定義される．ここで，コンマの後の添え字はその成分での微分を表わす．さらに，この歪みテンソルから，応力テンソル σ_{ij} が，

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}, \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.2}$$

と導かれる．ここに，E, ν は，それぞれ，弾性体の Young 率，Poisson 比である．また，ここでは Einstein の規約にしたがい同じ添え字が 2 度現われたときは，その添え字について 1 から 2 までの和をとるものとする．この式に (1.1) 式を代入すると

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} + \frac{E}{1+\nu}U_{1,1} \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(U_{1,2} + U_{2,1}\right) \\
\sigma_{22} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} + \frac{E}{1+\nu}U_{2,2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．

$\sigma_{ij,j}$ は単位体積あたりに作用する i 方向の力となるので，質量密度を ρ とすると，運動方程式は，

$$\rho\,\ddot{U}_i = \sigma_{ij,j} \tag{1.4}$$

となる．この方程式に (1.3) 式を代入すると変位 $\boldsymbol{U}$ のみを用いて方程式を書き表すことができ，

$$\rho\ddot{\boldsymbol{U}} = \frac{E}{2(1+\nu)}\triangle\boldsymbol{U} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}) \tag{1.5}$$

となる．ここに，$\triangle$ は 2 次元 Laplacian である．この方程式は縦波，横波の速度をそれぞれ c_ℓ, c_t として，

$$c_\ell = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}, \qquad c_t = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \tag{1.6}$$

を定義すると

$$\ddot{\boldsymbol{U}} = {c_t}^2\triangle\boldsymbol{U} + ({c_\ell}^2 - {c_t}^2)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}) \tag{1.7}$$

と書ける．

方程式の解法

この方程式を解くために，変位 $\boldsymbol{U}$ をスカラーポテンシャル Φ, ベクトルポテンシャル A を用いて[1]

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}\Phi + (\partial_y\ ,\ -\partial_x)A \tag{1.8}$$

と分解し，方程式に代入すると

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\ddot{\Phi} - {c_\ell}^2\triangle\Phi\right) + (\partial_y\ ,\ -\partial_x)\left(\ddot{A} - {c_t}^2\triangle A\right) = 0 \tag{1.9}$$

あるいは，成分に分けて，

$$\begin{aligned} \partial_x\left(\ddot{\Phi} - {c_\ell}^2\triangle\Phi\right) + \partial_y\left(\ddot{A} - {c_t}^2\triangle A\right) = 0 \\ \partial_y\left(\ddot{\Phi} - {c_\ell}^2\triangle\Phi\right) - \partial_x\left(\ddot{A} - {c_t}^2\triangle A\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.9$'$}$$

となる．これから容易に，

$$\triangle\left(\ddot{\Phi} - {c_\ell}^2\triangle\Phi\right) = 0, \qquad \triangle\left(\ddot{A} - {c_t}^2\triangle A\right) = 0 \tag{1.10}$$

が導かれ，各式の括弧内の関数は，Laplace 方程式を満たす関数，すなわち，調和関数となることがわかる．もしここで，これら調和関数が，定義されている境界上でゼロとなることを仮定すると，調和関数の一意性定理により定義されるすべての領域内で恒等的にゼロとなり，

$$\ddot{\Phi} - {c_\ell}^2\triangle\Phi = 0, \qquad \ddot{A} - {c_t}^2\triangle A = 0 \tag{1.11}$$

と置くことができる．この方程式は方程式 (1.9) および (1.10) の十分条件になっており，ここでの仮定，すなわち，境界上でゼロとなることは，この仮定の基に解が矛盾なく求められることで正当化される．

いま，弾性体の表面に沿って，y 正の方向に，座標 x と時間 t で与えられる圧力 $P(x,t)$ を加える．このときの境界条件は

$$\sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{22} + P(x,t) = 0, \qquad \text{at} \quad y = 0 \tag{1.12}$$

である．

ここで，ポテンシャル Φ, A の Fourier 変換を $\hat{\Phi}$, $\hat{A}$ とし，

$$\Phi(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\Phi}(k,\omega) e^{ikx - \kappa_\ell y + i\omega t}, \qquad A(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{A}(k,\omega) e^{ikx - \kappa_t y + i\omega t} \tag{1.13}$$

とおき，これらを方程式 (1.11) に代入すると

$$\kappa_\ell = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{{c_\ell}^2}}, \qquad \kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{{c_t}^2}} \tag{1.14}$$

[1]ベクトルポテンシャルといっても，2 次元の解析なので，A は，実際は，スカラーである．

となって，κ_ℓ, κ_t は k, ω に依存して決まる．

(1.13) 式の Φ, A を (1.8) 式の $\boldsymbol{U}$ に代入すると

$$\boldsymbol{U}(x,y,t)=\iint dkd\omega\big(ik\hat{\Phi}e^{-\kappa_\ell y}-\kappa_t\hat{A}e^{-\kappa_t y},\ \ -\kappa_\ell\hat{\Phi}e^{-\kappa_\ell y}-ik\hat{A}e^{-\kappa_t y}\big)e^{ikx+i\omega t} \tag{1.15}$$

となり，さらに，これを (1.3) に代入して，応力 σ を求めると

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\iint dkd\omega\big[-2ik\kappa_\ell\hat{\Phi}e^{-\kappa_\ell y}+(k^2+{\kappa_t}^2)\hat{A}e^{-\kappa_t y}\big]e^{ikx+i\omega t} \tag{1.16}$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{2(1+\nu)}\iint dkd\omega\big[(k^2+{\kappa_t}^2)\hat{\Phi}e^{-\kappa_\ell y}+2ik\kappa_t\hat{A}e^{-\kappa_t y}\big]e^{ikx+i\omega t} \tag{1.17}$$

となる．ここで (1.17) 式を導くときに，(1.6) と (1.14) 式から得られる

$$-\frac{\nu}{1-2\nu}(k^2-{\kappa_\ell}^2)+{\kappa_\ell}^2=\frac{1}{2}(k^2+{\kappa_t}^2) \tag{1.18}$$

なる関係式を使った．

この応力の式に境界条件 (1.12) 式を適用する．まず，$\sigma_{12}=0$ からは簡単に，

$$-2ik\kappa_\ell\hat{\Phi}+(k^2+{\kappa_t}^2)\hat{A}=0 \tag{1.19}$$

が得られる．一方，$\sigma_{22}+P(x,t)=0$ を適用するには，あらかじめ圧力 $P(x,t)$ を Fourier 変換しておく必要がある．そこで，P の Fourier 変換を $\hat{P}$ として，

$$P(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\hat{P}(k,\omega)e^{ikx+i\omega t},\qquad \hat{P}(k,\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dtP(x,t)e^{-ikx-i\omega t} \tag{1.20}$$

とし，ここで，σ_{22} に対する境界条件を適用すると

$$(k^2+{\kappa_t}^2)\hat{\Phi}+2ik\kappa_t\hat{A}=-\frac{1}{G}\hat{P}(k,\omega) \tag{1.21}$$

を得る．ここでは，一様な弾性体中で成立する Young 率 E と剪断弾性係数 G との関係

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.22}$$

を用いた．以下，この記法に従う．

(1.19) と (1.21) から $\hat{\Phi}$, $\hat{A}$ を求めると

$$\hat{\Phi}=\frac{-(k^2+{\kappa_t}^2)}{(k^2+{\kappa_t}^2)^2-4k^2\kappa_\ell\kappa_t}\frac{\hat{P}(k,\omega)}{G} \tag{1.23}$$

$$\hat{A}=\frac{-2ik\kappa_\ell}{(k^2+{\kappa_t}^2)^2-4k^2\kappa_\ell\kappa_t}\frac{\hat{P}(k,\omega)}{G} \tag{1.24}$$

となり，求まった $\hat{\Phi}$, $\hat{A}$ を (1.15) 式に代入すると，弾性体の表面に平行な変位 U_1 および垂直な変位 U_2 は，それぞれ

$$U_1(x,y,t)=\frac{1}{G}\iint dkd\omega\frac{-ik\left[(k^2+{\kappa_t}^2)e^{-\kappa_\ell y}-2\kappa_\ell\kappa_t e^{-\kappa_t y}\right]}{(k^2+{\kappa_t}^2)^2-4k^2\kappa_\ell\kappa_t}e^{ikx+i\omega t}\hat{P}(k,\omega) \tag{1.25}$$

$$U_2(x,y,t)=\frac{1}{G}\iint dkd\omega\frac{\kappa_\ell\left[(k^2+{\kappa_t}^2)e^{-\kappa_\ell y}-2k^2e^{-\kappa_t y}\right]}{(k^2+{\kappa_t}^2)^2-4k^2\kappa_\ell\kappa_t}e^{ikx+i\omega t}\hat{P}(k,\omega) \tag{1.26}$$

と求まる．

変数の無次元化

ここで，積分変数 k を無次元化するため，新しい変数 ξ を

$$k=\frac{|\omega|}{c_t}\xi \tag{1.27}$$

として導入し，さらに，この ξ の関数

$$\xi_\ell=\sqrt{\xi^2-\gamma^2},\qquad \xi_t=\sqrt{\xi^2-1} \tag{1.28}$$

を導入する．ここに，γ は横波縦波の速度比で，

$$\gamma=\frac{c_t}{c_\ell}=\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.29}$$

と定義した．この ξ_ℓ, ξ_t を用いると (1.14) の κ_ℓ, κ_t は

$$\kappa_\ell=\frac{|\omega|}{c_t}\xi_\ell,\qquad \kappa_t=\frac{|\omega|}{c_t}\xi_t \tag{1.30}$$

と書ける．さらに，x, y も無次元化するため，

$$\bar{x}=\frac{|\omega|}{c_t}x,\qquad \bar{y}=\frac{|\omega|}{c_t}y \tag{1.31}$$

とおく．

この変換で解 (1.25) (1.26) は

$$U_1(x,y,t)=\frac{1}{G}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi d\omega\frac{-i\xi\left[(2\xi^2-1)e^{-\xi_\ell\bar{y}}-2\xi_\ell\xi_t e^{-\xi_t\bar{y}}\right]}{R(\xi)}e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\hat{P}\Big(\frac{|\omega|}{c_t}\xi,\omega\Big) \tag{1.32}$$

$$U_2(x,y,t)=\frac{1}{G}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi d\omega\frac{\xi_\ell\left[(2\xi^2-1)e^{-\xi_\ell\bar{y}}-2\xi^2e^{-\xi_t\bar{y}}\right]}{R(\xi)}e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\hat{P}\Big(\frac{|\omega|}{c_t}\xi,\omega\Big) \tag{1.33}$$

となる．ここに被積分関数の分母 $R(\xi)$ は Rayleigh 関数と呼ばれ

$$R(\xi)=(2\xi^2-1)^2-4\xi^2\xi_\ell\xi_t \tag{1.34}$$

と定義される．この Rayleigh 関数は ξ の実軸上にゼロ点を持ち，したがって，被積分関数は，その位置で極 (Rayleigh pole) を持つ．この極の位置を $\pm\xi_R$ とする．ξ_R は γ の値によって決まるが，その絶対値は 1 より大きい値である．

関数 $R(\xi)$ はゼロ点 ξ_R の近傍で

$$R(\xi) \approx R'(\xi_R)(\xi - \xi_R) \tag{1.35}$$

と近似できる．ここに，R の微分 R' は

$$R'(\xi) = 8\xi(2\xi^2 - 1) - \frac{4\xi(4\xi^4 - 3\xi^2 - 3\gamma^2\xi^2 + 2\gamma^2)}{\xi_\ell \xi_t} \tag{1.36}$$

である．

2. 時間的にデルタ関数の圧力が作用する場合

ここでは，弾性体の表面に作用する圧力の具体例として，$-\infty < z < \infty$ にわたって，x 座標の区間 $-x_0 \leq x \leq x_0$ の帯状領域に，z 方向の単位長さあたり大きさ I の力積が一様に，また瞬間的に作用するものとする．このとき，単位面積あたりに作用する力積は $I/(2x_0)$ となり，時間的には δ 関数で表わされるものとし，圧力　$P(x,t)$ を，

$$P(x,t) = \begin{cases} \dfrac{I}{2x_0}\delta(t), & -x_0 \leq x \leq x_0 \\ 0, & x < -x_0, \ \text{or} \ \ x > x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

と設定する．(1.20) 式よりこの Fourier 変換を求めると

$$\hat{P}(k,\omega) = \frac{I}{4\pi^2}\frac{\sin(kx_0)}{kx_0} \tag{2.2}$$

となる．時間的にデルタ関数を仮定したため $\hat{P}$ は ω に依存しなくなることに注意する．

以後，距離 x_0 を速度 c_t で走る時間を τ_0 として

$$\tau_0 = x_0/c_t \tag{2.3}$$

を用いる．(2.2) の $\hat{P}$ を (1.32) (1.33) 式に代入し，パラメータ τ_0 を用いて，このときの変位を求めると

$$U_1(x,y,t) = \frac{I}{4\pi^2 G}\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\omega \frac{-i\xi\left[(2\xi^2-1)e^{-\xi_\ell \bar{y}} - 2\xi_\ell\xi_t e^{-\xi_t \bar{y}}\right]}{R(\xi)} e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\frac{\sin(\xi|\omega|\tau_0)}{\xi|\omega|\tau_0} \tag{2.4}$$

$$U_2(x,y,t) = \frac{I}{4\pi^2 G}\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\omega \frac{\xi_\ell\left[(2\xi^2-1)e^{-\xi_\ell \bar{y}} - 2\xi^2 e^{-\xi_t \bar{y}}\right]}{R(\xi)} e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\frac{\sin(\xi|\omega|\tau_0)}{\xi|\omega|\tau_0} \tag{2.5}$$

を得る．

この論文の目的は，可能な限り，解析的な解を求めることにある．そのため，以下では，結果の導入があまりに煩雑になることを避けるため，$y=0$ すなわち半無限弾性体の表面だけの変位を求めることにする．このとき，式はいくぶん簡単化され，

$$U_1(x,0,t)=\frac{-iI}{4\pi^2G}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi d\omega\frac{\xi\left(2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1\right)}{R(\xi)}e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\frac{\sin(\xi|\omega|\tau_0)}{\xi|\omega|\tau_0} \tag{2.6}$$

$$U_2(x,0,t)=\frac{-I}{4\pi^2G}\iint_{-\infty}^{\infty}d\xi d\omega\frac{\xi_\ell}{R(\xi)}e^{i\xi\bar{x}+i\omega t}\frac{\sin(\xi|\omega|\tau_0)}{\xi|\omega|\tau_0} \tag{2.7}$$

となる．以下，$U_i(x,0,t)$ を略して $U_i(x,t)$ と書く．さらに，この表示式における二重積分から ω 積分の項を抽出すると，$\bar{x}$ の定義 (1.31) を用いて，

$$U_1(x,t)=\frac{-iI}{4\pi^2G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi\left(2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1\right)}{R(\xi)}H(x,t,\xi)d\xi \tag{2.8}$$

$$U_2(x,t)=\frac{-I}{4\pi^2G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_\ell}{R(\xi)}H(x,t,\xi)d\xi \tag{2.9}$$

となる．ここに，$H(x,t,\xi)$ は ω 積分に関する項で，

$$H(x,t,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi|\omega|x/c_t+i\omega t}\frac{\sin(\xi|\omega|\tau_0)}{\xi|\omega|\tau_0}d\omega \tag{2.10}$$

と定義した．この積分は実行可能であり，その詳細は付録 A に示す．積分結果は，

$$\begin{aligned}&H(x,t,\xi)\\&=\frac{\pi}{2|\xi|\tau_0}\Big\{u\big[c_tt-|\xi|(x-x_0)\big]u\big[|\xi|(x+x_0)-c_tt\big]+u\big[c_tt+|\xi|(x+x_0)\big]u\big[-|\xi|(x-x_0)-c_tt\big]\Big\}\\&\qquad+\frac{i}{2\xi\tau_0}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_tt)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_tt)^2}\right]\end{aligned} \tag{2.11}$$

となる．ここに，u は単位階段関数である．

この結果 $H(x,t,\xi)$ を (2.8) (2.9) 式に代入し，$H(x,t,\xi)$ の実部は ξ について偶関数，また，$H(x,t,\xi)$ の虚部は ξ について奇関数となることに注意すると，

$$U_1(x,t)=\frac{I}{8\pi^2G\tau_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1}{R(\xi)}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_tt)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_tt)^2}\right]d\xi \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}U_2(x,t)=\frac{-\pi I}{8\pi^2G\tau_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_\ell}{|\xi|R(\xi)}\Big\{&u\big[c_tt-|\xi|(x-x_0)\big]u\big[|\xi|(x+x_0)-c_tt\big]\\&+u\big[c_tt+|\xi|(x+x_0)\big]u\big[-|\xi|(x-x_0)-c_tt\big]\Big\}d\xi\end{aligned} \tag{2.13}$$

という結果になる．ただし，ここで，被積分関数の変数 ξ に関する偶奇性については，以下に述べるような積分路を採用した場合に言えることであることを注意する．すなわち，この ξ 積分を

実行するにあたって，この被積分関数は，ξ_ℓ, ξ_t, および対数関数に起因する分岐点を実軸上に持つ．したがって，この積分値は，積分路がそれら分岐点近傍をどのように通過するかに依存して決まることになる．ここで，一つの指針となるのは，変位 U_1, U_2 は実数でなければならないということである．積分路の取り方によっては，変位が複素数値で求まってしまう．これをどう避けるかが問題となる．

そこで，ξ 積分をするとき，その積分路として，ϵ を正の無限小量として，2 つの積分路 C_1, C_2,

C_1:　ξ のプラス側では，$\xi + i\epsilon$ として，$\xi = 0$ のところで実軸を横切り，ξ 負の側で，$\xi - i\epsilon$ とした経路のものと，逆に，

C_2:　プラス側で $\xi - i\epsilon$ とし，負の側で，$\xi + i\epsilon$ とした経路のもの

の 2 つを考え，これらの積分路 C_1, C_2 を足して 2 で割る．このとき，C_1, C_2 ともに，ξ 正の側では，ξ_ℓ, ξ_t が正の実数値をとるように，すなわち，Riemann 面の第 1 面になるようにしておく．ξ 負の側では，ξ_ℓ の分岐切断を横切るので，Riemann の第 2 面になる．

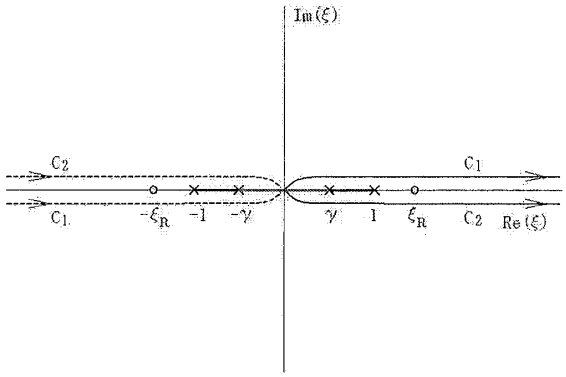

図 2　複素 ξ 面上の積分路

以下，$\xi_\ell = \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}$ について言うと，C_1 の積分路の場合，

$$\xi_\ell = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}, & \xi < -\gamma \\ i\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}, & -\gamma < \xi < +\gamma \\ \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}, & +\gamma < \xi \end{cases} \tag{2.14}$$

C_2 の積分路の場合，

$$\xi_\ell = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}, & \xi < -\gamma \\ -i\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}, & -\gamma < \xi < +\gamma \\ \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}, & +\gamma < \xi \end{cases} \tag{2.15}$$

という値をとる．$\xi_t = \sqrt{\xi^2 - 1}$ についても上の式で γ を 1 とした同様の式が成り立つ．この 2 つの積分路を足して 2 で割るということは，被積分関数の実部をとることに他ならない．積分路の途中に Rayleigh 極が存在するが，この 2 つの積分路は極の上周りと下周りで留数の効果は消

えてしまうので，極のところでは，主値だけをとればよい．また，(2.12) (2.13) に表れる被積分関数はいずれも ξ に関して偶関数になるので，$-\infty$ から ∞ までの積分は，半分の 0 から ∞ の積分にして 2 倍することができる．標識的にまとめると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cdots)d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\int_{\mathrm{C}_1}+\int_{\mathrm{C}_2}\right)(\cdots)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\Re(\cdots)\,d\xi=2\int_{0}^{\infty}\Re(\cdots)d\xi \tag{2.16}$$

となる．ここに，$\Re$ は実部をとることを意味する．これを (2.12) (2.13) 式に適用すると

$$\begin{aligned}
U_1(x,t)&=\frac{I}{4\pi^2G\tau_0}\int_0^{\infty}\Re\left\{\frac{2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1}{R(\xi)}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_tt)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_tt)^2}\right]\right\}d\xi\\
U_2(x,t)&=\frac{-I}{4\pi G\tau_0}\int_0^{\infty}\Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)\Big\{u[c_tt-\xi(x-x_0)]u[\xi(x+x_0)-c_tt]\\
&\qquad\qquad+u[c_tt+\xi(x+x_0)]u[-\xi(x-x_0)-c_tt]\Big\}d\xi
\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる．ここで，当然のことではあるがこの式から，水平方向変位 U_1 は x について奇関数，垂直方向変位 U_2 は x について偶関数となっていることを注意する．したがって，実際に積分するときは，$x>0$ の領域のみで考えてよい．以下，x はこの範囲内にあるものとして議論する．

ここで，U_1 の積分に関しては，被積分関数が対数項を含むために注意が必要である．この対数項は分岐切断線を，$x>x_0$ のとき，$c_tt/(x+x_0)<\xi<c_tt/(x-x_0)$ の範囲に，また，$x<x_0$ のとき，$c_tt/(x+x_0)<\xi<c_tt/(x_0-x)$ の範囲に持つ．これら，分岐切断線は，x,t の値によって動くために，$\xi_\ell\xi_t$ の分岐切断線，あるいは，Rayleigh 極 ξ_R と重なることがあり得る．先に，Rayleigh 極の留数効果が消滅するといったが，これは単独に存在した場合であって，対数による切断線と重なったときは，その限りでない．実際，この対数項は，分岐切断線上で，

$$\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_tt)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_tt)^2}\right]=\log\left|\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_tt)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_tt)^2}\right|\mp\pi i,$$

上符号は C_1 のとき，　下符号は C_2 のとき，　(2.18)

という値をとる．したがって，Rayleigh 極がこの分岐切断線上に存在するときは，積分路の C_1 と C_2 とでは異なる値を持つために，2 つの積分路 C_1, C_2 をたして 2 で割ったとき，Rayleigh 極の留数が残ることになる．この留数として残る項を $U_1^{(P)}$ と書くことにすると，

$$U_1^{(P)}(x,t)=-\frac{I}{4G\tau_0}\left[\frac{2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1}{R'(\xi)}\right]_{\xi=\xi_R},\qquad \text{for}\qquad \frac{c_tt}{x+x_0}<\xi_R<\frac{c_tt}{|x_0-x|} \tag{2.19}$$

となる．ここに，R' は (1.36) で定義される．したがって，(2.17) 式を数値的に積分するときは，これらのことを踏まえて注意深く積分する必要がある．もう少し単純化した，線状加衝撃の場合についても，同様の事情が起こり得る．その詳細については，この先の式 (2.26)-(2.30) において述べることにする．

(2.17) 式の垂直方向変位 U_2 に表れる積分について，単位階段関数 u で制限される ξ の範囲を考慮すると，

$$U_2(x,t) = \frac{-I}{4\pi G\tau_0}\begin{cases}\left[\displaystyle\int_{c_t t/(x_0-x)}^{\infty} + \int_{c_t t/(x+x_0)}^{\infty}\right]\Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)d\xi, & 0 < x < x_0 \\ \displaystyle\int_{c_t t/(x+x_0)}^{c_t t/(x-x_0)} \Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)d\xi, & x_0 < x\end{cases} \tag{2.20}$$

となる．この式からつぎのことがわかる．すなわち，$\xi < 1$ で ξ_t が虚数になり，$\xi < \gamma$ で ξ_ℓ が虚数になる．したがって，$\xi < \gamma$ では Rayleigh 関数 $R(\xi)$ に含まれる積 $\xi_\ell\xi_t$ は実数である．(2.20) の下段の式の被積分関数の分子には ξ_ℓ が入っているので，$\xi < \gamma$ でこの被積分関数は純虚数，すなわち，実数部はゼロとなる．それゆえに，積分の上限である $c_t t/(x - x_0)$ が γ より小さいときはこの積分値はゼロとなる．すなわち，

$$U_2(x,t) = 0, \qquad \text{for} \qquad \frac{c_t t}{x - x_0} < \gamma \tag{2.21}$$

この変位がゼロとなる条件は γ の定義 (1.29) から $x - x_0 > c_\ell t$ と書き直すことができ，衝撃が加わる点の端からの距離が時間 t のうちに縦波が伝わる範囲外では変位がゼロということを意味し，これは解が満たさなければならない当然の条件である．

水平方向変位 U_1 に関して，このようなことは，少なくも式の上からは見えてこない．コンピュータによる数値計算によると，ほんのわずかではあるが，縦波が伝わる速度以上のところに波動のはみ出しが確かに存在する．力が全く作用しない自由表面上の波動伝播のときは，縦波速度以上のところに波がはみ出すことはないはずであるが，この場合は，初めの瞬間に力が作用していて，その時点で変位のはみ出しが起こり，このはみ出した部分がそのままの形で伝播するためと考えられる．

力積が作用する幅を無限に小さくした場合

波動伝播の解析的性質をより明らかにするには，でき得るかぎり，問題を単純化すべきであろう．ここで，衝撃が加わる幅である $2x_0$ をゼロに近づけた極限，すなわち，線状加衝撃の場合を考える．(2.17) 式の U_1, および (2.20) の U_2 で $x_0 \to 0$ の極限をとると，

$$U_1(x,t) = \frac{c_t I}{\pi^2 G}\frac{1}{x}\int_0^\infty \Re\left\{\frac{\xi^2(2\xi^2 - 2\xi_\ell\xi_t - 1)}{R(\xi)[\xi^2 - (c_t t/x)^2]}\right\}d\xi \tag{2.22}$$

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{2\pi G}\frac{1}{x}\Re\left[\frac{\xi_\ell}{R(\xi)}\right]_{\xi = c_t t/x} \tag{2.23}$$

となる[2]．なお，これらの式は，(2.10) 式における ω 積分を実行してから，$x_0 \to 0$ の極限をとったことになるが，ω 積分を実行する前に極限をとり，その後，ω 積分を実行しても同じ結果に

[2] (2.23) 式は，$x > 0$ と仮定した条件の基に出された式である．もし，$x < 0$ にも拡張するときは，U_2 が x について偶関数となることから，この式の中の x を $|x|$ で置き換えなければならない．

なることが確かめられる．その詳細は，付録 B に記す．また，逆に，線状加衝撃解である (2.22) (2.23) 式から，x_0 が有限値をとる帯状加衝撃解である (2.17) 式を得ることもできる．このことについては，付録 C に記す．

初めに，積分を含まない U_2 の方から，(1.28) (1.34) 式を用いて，これをさらに具体的に書き下すと，

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{2\pi G}\begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{(c_t t)^2-\gamma^2x^2}}{[2(c_t t)^2-x^2]^2-4(c_t t)^2\sqrt{(c_t t)^2-\gamma^2x^2}\sqrt{(c_t t)^2-x^2}}, & x<c_t t \\ \dfrac{x^2[2(c_t t)^2-x^2]^2\sqrt{(c_t t)^2-\gamma^2x^2}}{[2(c_t t)^2-x^2]^4+16(c_t t)^4[(c_t t)^2-\gamma^2x^2][x^2-(c_t t)^2]}, & c_t t<x<c_\ell t \\ 0, & c_\ell t<x \end{cases} \tag{2.24}$$

となる．この式から特に $x=0$ では，

$$U_2(0,t) = \frac{I}{4\pi G(1-\gamma^2)t} \tag{2.25}$$

となって，$t=0$ の瞬間は発散している．これは衝撃の時間をゼロにしてデルタ関数を用いた影響である．$t=\infty$ では $U_2=0$ となって元の位置に戻る．

また，$x<c_t t$ の範囲内，$x=c_t t/\xi_R$ (ξ_R = Rayleigh 極) のところで，分母がゼロとなり発散する．これは，衝撃の幅をゼロにした影響で，一種の共振現象と考えられる．

x 方向の変位 U_1 に表れる積分を，解析的に実行するにはなお煩雑すぎる．以下，$U_1(x,t)$ が x の奇関数であることがわかっているので，$x>0$ のみを議論する．まず，$\xi_\ell\xi_t$ による分岐切断線が $\gamma<\xi<1$ 上にあり，Rayleigh 極が $\xi=\xi_R(>1)$ に，また，因子 $[\xi^2-(c_t t/x)^2]$ による極が $\xi=c_t t/x$ にある．この極 $\xi=c_t t/x$ は，帯状加衝撃解のときは対数による分岐切断線になっていたものが，線分の長さが短くなり極になったものである．

前述したように，この積分は，複素 ξ 平面で，実軸の上側 $\xi+i\epsilon$ としたものと，実軸の下側 $\xi-i\epsilon$ としたものを足して 2 で割る積分である．したがって，Rayleigh 極は 1 より大きいところにあるため極の留数は相殺されるので，積分としては主値のみをとればよい．しかし，極 $\xi=c_t t/x$ は x,t の値によって動く極なので，この位置が $\xi_\ell\xi_t$ の分岐切断線上にくることがある．このときは，上側と下側で $\xi_\ell\xi_t$ が異なる値をとるために相殺されることなく残る．ここで変位 $U_1(x,t)$ を極の留数として残る項 $U_1^{(\mathrm{P})}$ と連続積分になる項 $U_1^{(\mathrm{C})}$ に分けて，

$$U_1(x,t) = U_1^{(\mathrm{P})}(x,t) + U_1^{(\mathrm{C})}(x,t) \tag{2.26}$$

とおく．ここに，連続積分項は，

$$U_1^{(\mathrm{C})}(x,t) = \frac{c_t I}{\pi^2 G}\frac{1}{x}\,\mathrm{p.v.}\int_0^\infty \Re\left\{\frac{\xi^2(2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1)}{R(\xi)[\xi^2-(c_t t/x)^2]}\right\}d\xi \tag{2.27}$$

p.v. は主値をとる意味である．この積分に関しては，数値的に実行するほかないだろう．

また，極の留数として残る項 $U_1^{(\mathrm{P})}$ に関しては，(2.22) の被積分関数のうち，因子 $[\xi^2-(c_t t/x)^2]$ を除いた部分を

$$K(\xi^2,\xi_\ell\xi_t)=\frac{\xi^2(2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1)}{R(\xi)} \tag{2.28}$$

とおいて，上半周りが負の周り，と下半周りが正の周りで，$\xi_\ell\xi_t$ のとる値がそれぞれ違うこと，および，上周り下周り積分を足したあと 2 で割ることに注意して，

$$U_1^{(\mathrm{P})}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{iI}{4\pi G}\dfrac{1}{t}\Big[K(\xi^2,-i|\xi_\ell\xi_t|)-K(\xi^2,i|\xi_\ell\xi_t|)\Big]_{\xi=c_t t/x}, & c_t t<x<c_\ell t\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{2.29}$$

となり，K, R の定義 (2.28) (1.34) に従って具体的に計算すると，

$$U_1^{(\mathrm{P})}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{c_t^2 I}{\pi G}\dfrac{tx^2\sqrt{(c_t t)^2-\gamma^2x^2}\sqrt{x^2-(c_t t)^2}\big[2(c_t t)^2-x^2\big]}{\big[2(c_t t)^2-x^2\big]^4+16(c_t t)^4\big[(c_t t)^2-\gamma^2x^2\big]\big[x^2-(c_t t)^2\big]}, & c_t t<x<c_\ell t\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{2.30}$$

となる．

もう一つの問題として，動く極 $\xi=c_t t/x$ がちょうど Rayleigh 極 ξ_R と重なる場合である．このときは，二重極となり，積分値は発散する．この現象は，垂直方向変位 U_2 の場合もそうであったが，線状加衝撃にしたために起こる現象と考えられる．

時間的に分布した衝撃の場合

これまで，弾性体に加える衝撃は，時間的にデルタ関数としてきたが，ここで，時間的に分布した場合に拡張してみよう．ここでは，時刻 t に，z 方向の単位長さ，x 方向の幅 $2x_0$ の帯状領域に一様に加わる力を $F(t)$ としよう．(2.1) 式に替わって，このときの圧力は

$$P(x,t)=\begin{cases}\dfrac{F(t)}{2x_0}, & -x_0<x<x_0\\ 0, & x<-x_0 \quad \text{or} \quad x>x_0\end{cases} \tag{2.31}$$

と与えられる．ここで，力 $F(t)$ はデルタ関数を用いて，

$$F(t)=\int_0^\infty F(t')\delta(t-t')dt' \tag{2.32}$$

と書けるので，これは，時刻 t' の瞬間に $F(t')dt'$ の力積が加わった場合の重ね合わせと考えることができる．つまり，これまでに求めた解において，時間を t から $t-t'$ に平行移動し，力積 I を $F(t')dt'$ に置き換えたものの，時刻 0 から ∞ までの重ね合わせを作るとよい．具体的には，(2.17) (2.20) あるいは (2.22) (2.23) 式から力積 I を取り除いたものを $\boldsymbol{U}^{(\delta)}(x,t)$ と書くことに

して，このときの解は，

$$\boldsymbol{U}(x,t)=\int_0^\infty \boldsymbol{U}^{(\delta)}(x,t-t')F(t')dt' \tag{2.33}$$

となる．積分の上限が t ではなく ∞ となるのは，解くべき方程式が (1.7) 式という斉次方程式のためで，これはいわゆる Duhamel 積分とは異なるものである．

3. コンピュータによる数値解について

前節までに，半無限弾性体に帯状，あるいは線状の衝撃を与えたときの弾性体に発生する変位を解析してきた．しかし，それがどのような形で表れるかは，数式上の解析ではなかなか見えてこない．ここでは，帯状加衝撃解である (2.17) 式にしたがって，コンピュータによる数値解析を実行した結果を示す．設定値は，標準的な岩石を想定して，

$$\begin{aligned}&\text{Young 率}\ \ E=22.0\ \text{GPa},\quad \text{Poisson 比}\ \ \nu=0.2,\quad \text{質量密度}\ \ \rho=2.5\ \text{ton/m}^3,\\&z\ \text{方向単位長さあたりの力積}\ \ I=1\ \text{GN}\cdot\text{s/m},\quad \text{帯の半幅}\ \ x_0=10\ \text{m}\end{aligned} \tag{3.1}$$

とした．この設定では，

$$\begin{aligned}&\text{縦波速度}\ \ c_\ell=3.127\ \text{km/s},\quad \text{横波速度}\ c_t=1.915\ \text{km/s},\quad \text{速度比}\ \ \gamma=0.612,\\&\text{Rayleigh 極の位置}\ \ \xi_R=1.097\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる．

図 3 に，その設定レイアウトを示す．中央部の水平な太線が衝撃を与える範囲を示す．この図で座標 x の範囲は，-123.15 m から $+123.15$ m までである．次ページ，図 4 から図 7 までの 4 枚は，図に指定された各時間毎の水平方向変位 U_1 を示す．これは水平変位なので，本来なら水平に描くべきであるが，それではわかりにくくなるので，その変位の大きさは垂直方向に描いてある．なお，この変位の大きさは，水平方向の長さに対し，1000 倍の倍率をかけてある．

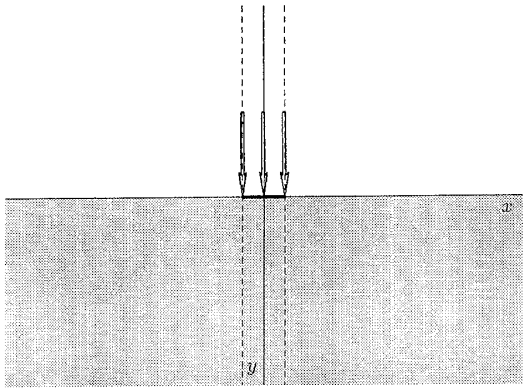

図 3 設定レイアウト

これらの図で，一番外側の縦線は，縦波速度で到達する範囲を，外側から2番目の縦線は，横波速度で到達する範囲を，また，縦の点線は，衝撃が加わる範囲を示している．これらの図から弾性体は，衝撃が加わった場所から外側方向に押し出されているのが見て取れる．(2.21) 式の下で説明したように，衝撃が加わった瞬間から，ほんのわずかではあるが，変位が縦波速度より速く伝播しているのがわかる．しかし，これは時間が経つにつれ解消されるようである．

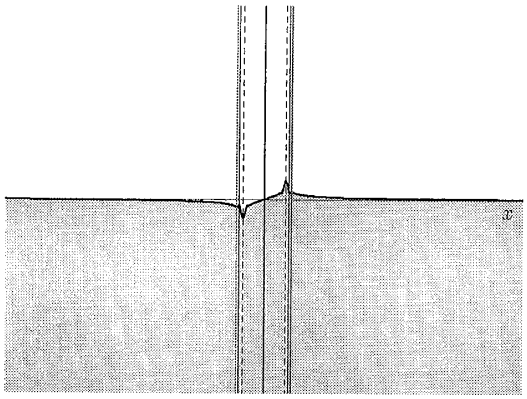

図 4　水平方向変位 U_1, t =0.001 sec

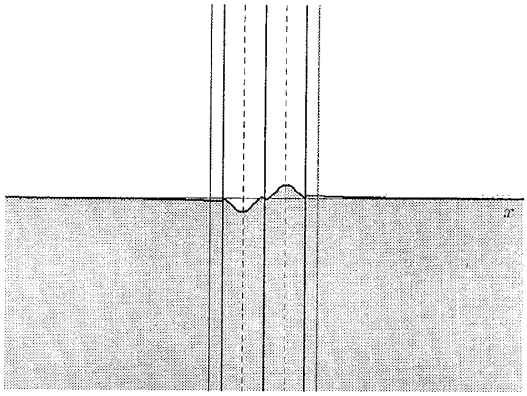

図 5　水平方向変位 U_1, t =0.005 sec

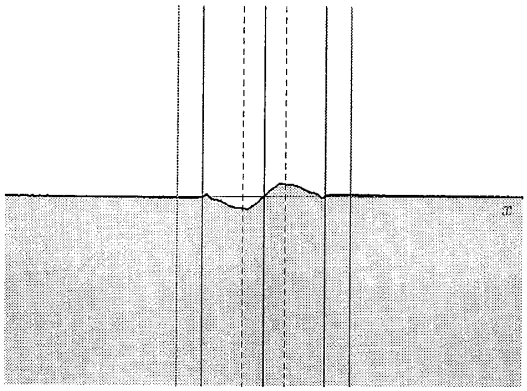

図 6　水平方向変位 U_1, t =0.01 sec

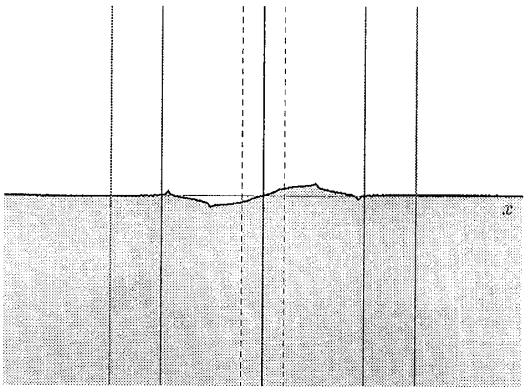

図 7　水平方向変位 U_1, t =0.02 sec

つぎの図8から図15までの8枚の図は，縦方向変位 U_2 を示す．水平方向変位が，外側に押し出されるという単純な動きに対し，垂直方向変位は衝撃が加えられた中心部で，上下方向の複雑な動きをした後で，時間が経つにつれ元の位置に戻るという大変興味ある運動をする．

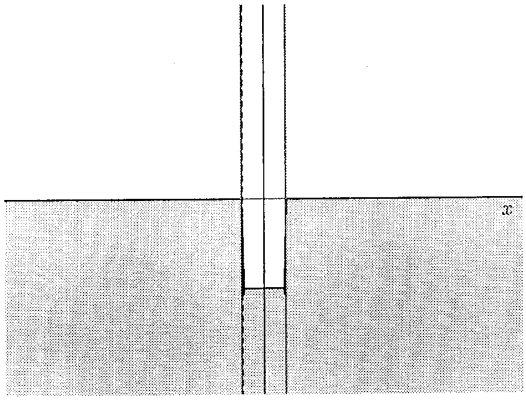

図 8 垂直方向変位 U_2, t =0.0002 sec

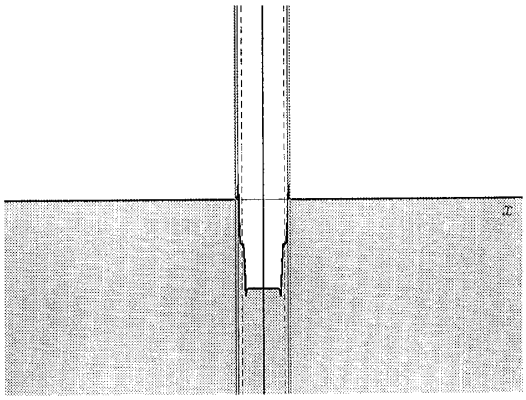

図 9 垂直方向変位 U_2, t =0.001 sec

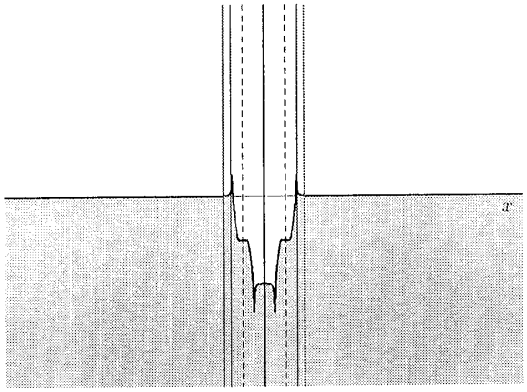

図 10 垂直方向変位 U_2, t =0.003 sec

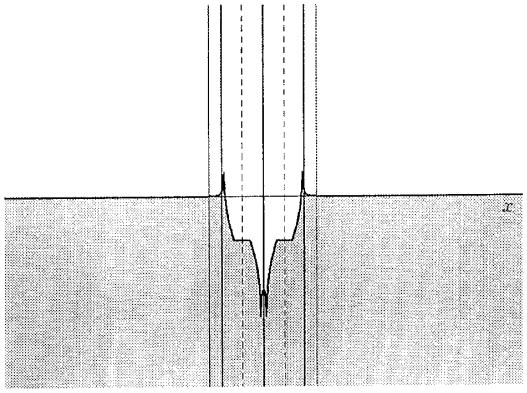

図 11 垂直方向変位 U_2, t =0.005 sec

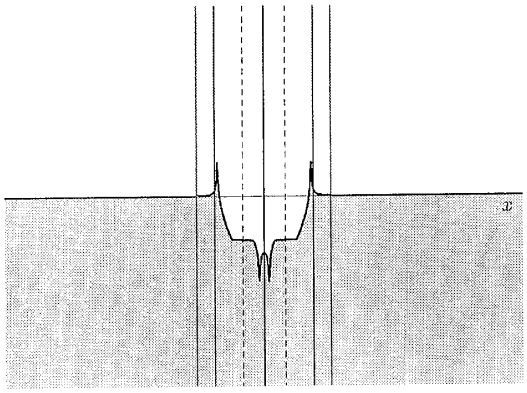

図 12 垂直方向変位 U_2, t =0.007 sec

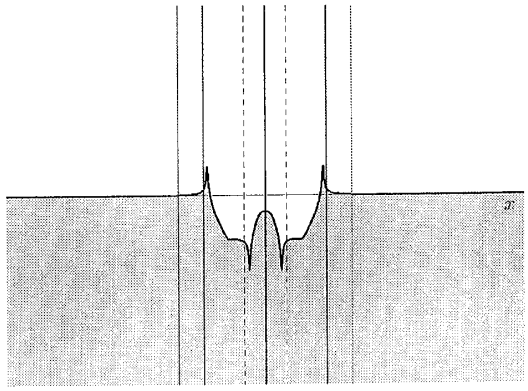

図 13 垂直方向変位 U_2, t =0.01 sec

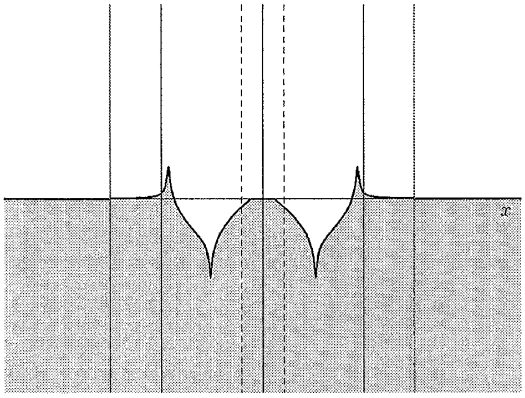

図 14 垂直方向変位 U_2, t =0.02 sec

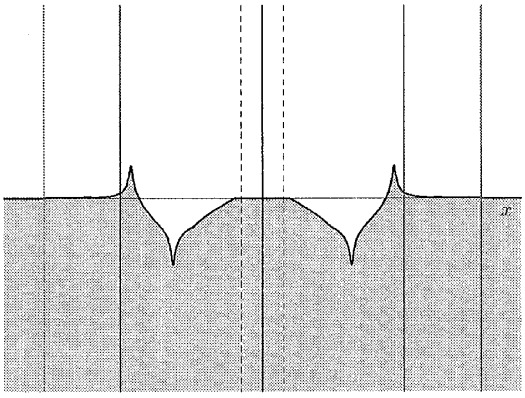

図 15 垂直方向変位 U_2, t =0.03 sec

つぎの図 16, 図 17 は，(2.22) (2.23) 式にしたがって，線状加衝撃解の様子を示したもので，時間はいずれも $t = 0.02$ s, 図 16 が水平方向変位 U_1, 図 17 が垂直方向変位 U_2 を示す．解析解のところで示したように，このとき，U_1, U_2 共に Rayleigh 極 $c_t t/x = \xi_R$ のところで発散が起こるはずであるが，この図からもその様子が見て取れる．

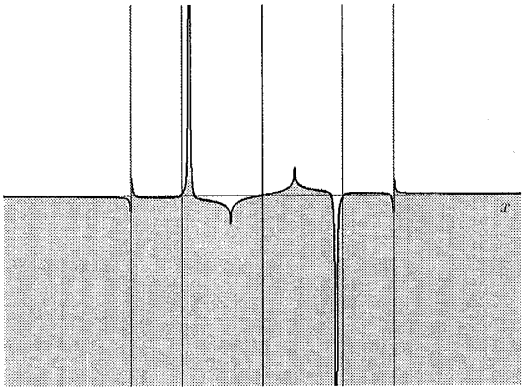

図 16 水平方向変位 U_1, t =0.02 sec

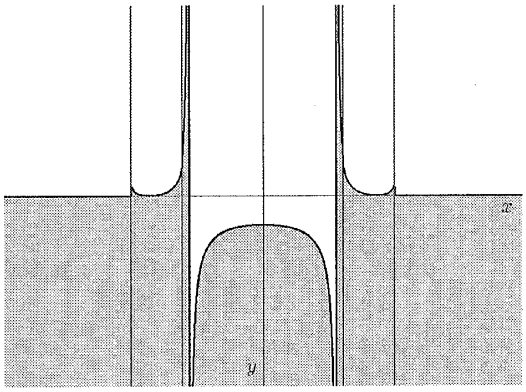

図 17 垂直方向変位 U_2, t =0.02 sec

4. おわりに

この論文は，半無限弾性体の衝撃荷重問題について，でき得る限り解析的に，かつ，実数解としての変位を求めることを主眼とした．これは，他のいくつかの論文では，複素数解としての変位を求め，その実数部を弾性効果，虚数部をダッシュポット効果と結び付けようとしているが，このような解釈は，決して理解できるものではないからである．複素数解が求まってしまうのは，(1.28) 式で定義される ξ_ℓ, ξ_t および，(1.34) で定義される Rayleigh 極 ξ_R に起因するものである

が，このような分岐点や極を持つ積分は，積分路の取り方次第によっていかような解も出し得るからである．第一に，変位というものは，どんなことがあろうが，実数でなければならないこと．第二に，ここでの解析には，ダッシュポット効果なるものは，初めから含まれていないし，例え，そのようなものを含んだ解析をしたとしても変位自体は実数で求まらなければならない．我々の考えでは，変位の虚数部なるものは，全く意味がないと考える．

この論文では，平面歪みとなる帯状，および線状加衝撃問題を扱ってきたが，軸対称歪みとなる円形加衝撃問題についても，同じことが言える．この解析については，次回の論文で論ずることにする．

付録 A. (2.11) 式の導出方法

(2.10) 式で定義される $H(x,t,\xi)$ の積分を実行するには，まず，ω について，偶関数部分と奇関数部分に分け，奇関数部分が積分に寄与しないことからこれを捨てた後，三角関数の積和公式で

$$
\begin{aligned}
H(x,t,\xi) &= 2\int_0^\infty e^{i\xi\omega x/c_t}\cos(\omega t)\frac{\sin(\xi\omega\tau_0)}{\xi\omega\tau_0}d\omega \\
&= \frac{1}{2\xi\tau_0}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\Big\{\sin\left[(\xi\tau_0+t+\xi x/c_t)\omega\right]+\sin\left[(\xi\tau_0+t-\xi x/c_t)\omega\right] \\
&\qquad +\sin\left[(\xi\tau_0-t+\xi x/c_t)\omega\right]+\sin\left[(\xi\tau_0-t-\xi x/c_t)\omega\right]\Big\}d\omega \\
&\quad +\frac{i}{2\xi\tau_0}\int_0^\infty \frac{1}{\omega}\Big\{\cos\left[(\xi\tau_0+t-\xi x/c_t)\omega\right]-\cos\left[(\xi\tau_0+t+\xi x/c_t)\omega\right] \\
&\qquad +\cos\left[(\xi\tau_0-t-\xi x/c_t)\omega\right]-\cos\left[(\xi\tau_0-t+\xi x/c_t)\omega\right]\Big\}d\omega
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

と分解し，積分公式

$$
\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a), \qquad \int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}dx=\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{A.2}
$$

を用いて積分すると，

$$
\begin{aligned}
&H(x,t,\xi) \\
&=\frac{\pi}{4\xi\tau_0}\Big\{\mathrm{sgn}\big[\xi(x+x_0)+c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(-x+x_0)+c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(x+x_0)-c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(-x+x_0)-c_t t\big]\Big\} \\
&\qquad\qquad +\frac{i}{2\xi\tau_0}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_t t)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_t t)^2}\right]
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

ここに sgn は符号関数で，中味の変数が正のときは $+1$, 負のときは -1 の値をとる．符号関数の中味には適当な正の量を掛けてもよいので，ここでは c_t を掛けて表わすことにした．

さらに，ここに表れる 4 個の符号関数を足すと単位階段関数 u を用いて，

$$\begin{aligned}&\mathrm{sgn}\big[\xi(x+x_0)+c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(-x+x_0)+c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(x+x_0)-c_t t\big]+\mathrm{sgn}\big[\xi(-x+x_0)-c_t t\big]\\&=2\mathrm{sgn}(\xi)\Big\{u\big[c_t t-|\xi|(x-x_0)\big]u\big[|\xi|(x+x_0)-c_t t\big]+u\big[c_t t+|\xi|(x+x_0)\big]u\big[-|\xi|(x-x_0)-c_t t\big]\Big\}\end{aligned} \tag{A.4}$$

と書けることに注意すると，$H(x,t,\xi)$ は

$$\begin{aligned}&H(x,t,\xi)\\&=\frac{\pi}{2|\xi|\tau_0}\Big\{u\big[c_t t-|\xi|(x-x_0)\big]u\big[|\xi|(x+x_0)-c_t t\big]+u\big[c_t t+|\xi|(x+x_0)\big]u\big[-|\xi|(x-x_0)-c_t t\big]\Big\}\\&\qquad+\frac{i}{2\xi\tau_0}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_t t)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_t t)^2}\right]\end{aligned} \tag{A.5}$$

となる．$H(x,t,\xi)$ の実部は，ξ について偶関数，虚部は奇関数であることを注意する．

付録 B. 線状加衝撃解の別解法

一般論として考えたとき，積分をしてから極限をとったものと，極限をとってから積分したものが，一致するという保証はない．本文中で (2.22) (2.23) 式を導くとき，(2.10) 式に含まれる積分を実行してから極限をとった．ここでは，先に，極限をとってみる．(2.10) 式で直接，$x_0\to 0$ の極限をとると，

$$H(x,t,\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi|\omega|x/c_t+i\omega t}d\omega \tag{B.1}$$

となるが，ここで，指数関数を三角関数で表わし，奇関数部分を捨ててから，三角関数の積和公式を使うと，

$$\begin{aligned}H(x,t,\xi)=&\int_0^{\infty}\big[\cos(\xi\omega x/c_t+\omega t)+\cos(\xi\omega x/c_t-\omega t)\big]d\omega\\&+i\int_0^{\infty}\big[\sin(\xi\omega x/c_t+\omega t)+\sin(\xi\omega x/c_t-\omega t)\big]d\omega\end{aligned} \tag{B.2}$$

となる．ここで，超関数の意味で成立する積分公式，

$$\int_0^{\infty}\cos(ax)dx=\pi\delta(a),\qquad\qquad \int_0^{\infty}\sin(ax)dx=\frac{1}{a} \tag{B.3}$$

を用いると，結果として，

$$H(x,t,\xi)=\pi\big[\delta(\xi x/c_t+t)+\delta(\xi x/c_t-t)\big]+i\frac{2\xi c_t}{x[\xi^2-(c_t t/x)^2]} \tag{B.4}$$

を得る．この式の実部は ξ の偶関数，虚部は ξ の奇関数であることに注意して，(2.8) (2.9) 式に代入し，(2.16) の操作をすると

$$U_1(x,t) = \frac{c_t I}{\pi^2 G}\frac{1}{x}\int_0^\infty \Re\left\{\frac{\xi^2(2\xi^2-1-2\xi_\ell\xi_t)}{R(\xi)\left[\xi^2-(c_t t/x)^2\right]}\right\}d\xi \tag{B.5}$$

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{2\pi G}\frac{1}{|x|}\Re\left[\frac{\xi_\ell}{R(\xi)}\right]_{\xi=c_t t/|x|} \tag{B.6}$$

となって，これは，(2.22) (2.23) で与えたものと一致している．なお，(2.23) 式では x に絶対値が付いていないが，先の導出では $x>0$ に制限したためである．(2.23) 式の脚注を参照のこと．

まとめとして，ω 積分をした後で，$x_0 \to 0$ の極限をとったものと，ω 積分をする前に $x_0 \to 0$ の極限をとったものが一致することがわかった．ただし，先に極限をとったときは，ω 積分を超関数の意味でしなければならない．

付録 C. 線状加衝撃解から帯状加衝撃解へ

帯状領域加衝撃で使ってきた力積 I は，z 方向には単位長さ，x 方向には幅 $2x_0$ の中に，合計としてかかる力積を意味する．したがって，x 方向に幅 dx' の分にかかる力積は，$I/(2x_0)dx'$ となる．線状加衝撃解として得られた (2.22) (2.23) 式，あるいは，(B.5) (B.6) 式において，x を $x-x'$ とし，また，力積 I を $I/(2x_0)dx'$ としてから，x' で $-x_0$ から x_0 まで積分すると幅 $2x_0$ に加衝撃した場合の解になるはずである．式で表わすと

$$U_1(x,t) = \frac{c_t I}{2\pi^2 G x_0}\int_{-x_0}^{x_0} dx'\frac{1}{x-x'}\int_0^\infty \Re\left\{\left[\frac{2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1}{R(\xi)}\right]\frac{\xi^2}{\xi^2-[c_t t/(x-x')]^2}\right\}d\xi \tag{C.1}$$

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{4\pi G x_0}\int_{-x_0}^{x_0} dx'\frac{1}{|x-x'|}\Re\left[\frac{\xi_\ell}{R(\xi)}\right]_{\xi=c_t t/|x-x'|} \tag{C.2}$$

となる．

U_1 の方は x' でそのまま積分してしまうと，

$$U_1(x,t) = \frac{c_t I}{4\pi^2 G x_0}\int_0^\infty \Re\left\{\frac{2\xi^2-2\xi_\ell\xi_t-1}{R(\xi)}\log\left[\frac{\xi^2(x+x_0)^2-(c_t t)^2}{\xi^2(x-x_0)^2-(c_t t)^2}\right]\right\}d\xi \tag{C.3}$$

となり，(2.17) の第 1 式と一致する．

また，U_2 の方は，積分変数を x' から ξ に

$$\xi = \frac{c_t t}{|x-x'|}, \qquad d\xi = \mathrm{sgn}(x-x')\frac{\xi}{|x-x'|}dx' \tag{C.4}$$

と変換し，$x>x_0$ の場合を考えると

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{4\pi G x_0}\int_{c_t t/(x+x_0)}^{c_t t/(x-x_0)} \Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)d\xi \tag{C.5}$$

となって，帯状加衝撃解 (2.20) の下段の式と一致する．$0 < x < x_0$ の場合は

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{4\pi G x_0}\left(\int_{c_t t/(x+x_0)}^{\infty} - \int_{-\infty}^{c_t t/(x-x_0)}\right)\Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)d\xi \tag{C.6}$$

となるが，2 番目の積分において，積分変数を ξ から $-\xi$ に置き換えると

$$U_2(x,t) = -\frac{c_t I}{4\pi G x_0}\left(\int_{c_t t/(x+x_0)}^{\infty} + \int_{c_t t/(x_0-x)}^{\infty}\right)\Re\left(\frac{\xi_\ell}{\xi R(\xi)}\right)d\xi \tag{C.7}$$

となって，(2.20) の上段の式と一致する．

結果として，帯状加衝撃解は，線状加衝撃解の連続的な重ね合わせとして理解される．

参考文献

1) ランダウ・リフシッツ,「弾性理論」東京図書 134-139, (1972)

2) Graff, Karl. F. *Wave Motion in Elastic Solid.* Dover Publications Inc., 323-328 New York, (1975)

3) Lamb, H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **203 A**, 1-42, (1904)

4) Reissner, E. Stationare, axialsymmetrische, durch eine Schuttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv, VII Band, 381-396, (1936)

5) 井口道雄，篠崎祐三，吉田一博　他,「入門・建物と地盤との動的相互作用」日本建築学会, (1996)

6) Pekeris, C. L. The Seismic Surface Pulse. *Proc. natn. Acad. Sci. U. S. A.* **41,** 469-480 (1955)

7) Lang, H. A. Surface Displacements in an Elastic Half-Space. *Z. angew Math. Mech.* **41,** 141-153 (1961)

8) Mitra, M. Von. Disturbance Produced in an Elastic Half-Space by Impulsive Normal Pressure. *Proc. Camb. phil. Soc. math. phys. Sci.* **60,** 683-696 (1961)