HOKUGA 北海学園学術情報リポジトリ
学校法人北海学園
北海学園大学
北海商科大学

タイトル	Fast Marching Methodを用いた自動要素分割
著者	串山，繁
引用	北海学園大学工学部研究報告，35：73-84
発行日	2008-02-00

Hokkai-Gakuen Organization of Knowledge Ubiquitous through Gaining Archives.

Fast Marching Methodを用いた自動要素分割

串　山　　繁*

Automatic Element Division using Fast Marching Method

Shigeru KUSHIYAMA*

Abstract

Some buildings with creative structural shapes are recently built in Japan. They are designed using FEM analysis based on ESO (Evolutionary Structural Optimization). Extended ESO is one of them and is known as the method which is able to reflect not only elimination of unnecessary elements but also generation of new elements, that is, bi–directional evolutionary.

The aim of this study is to develop an automatic element division program code for a design area with a flexible free curve in the computational process of Extended ESO. In this paper, the division concept using a signed distance function and a size function proposed by Per–Olof Persson is adopted. These functional values at grid points in a back ground area are calculated with help of the fast marching method. Element divisions of two photographic images are presented.

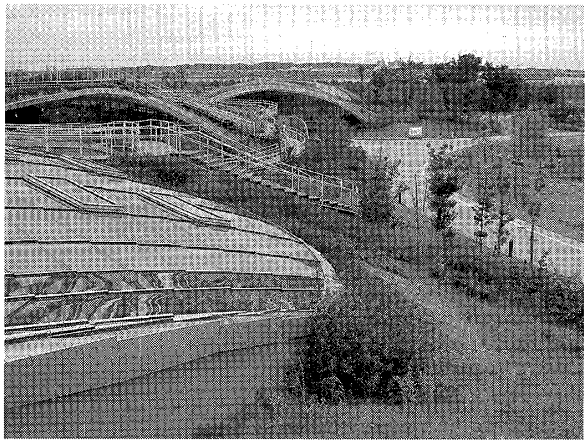
1　序

ここ最近，構造形態創生解析技術を活用した斬新な建物が発表されている．いずれも壁面の一部に自由曲線の窓や自由曲面のシェル屋根にトップライトを設けたデザイン（写真－1，2参照）の建物である[1]．一見，それらは自由奔放に意匠設計されているかの様に見えるが，構造形態の創生に関する思慮深い考察を反映した構造計画に基づいている．この種の解析では，通常あらかじめ構造体を細かく要素分割した後，多数回の収束計算を実行しながら，応力や歪エネルギーなどの基準量が小さい要素を削除し，基準量を次第に均一化して最適化を図ること

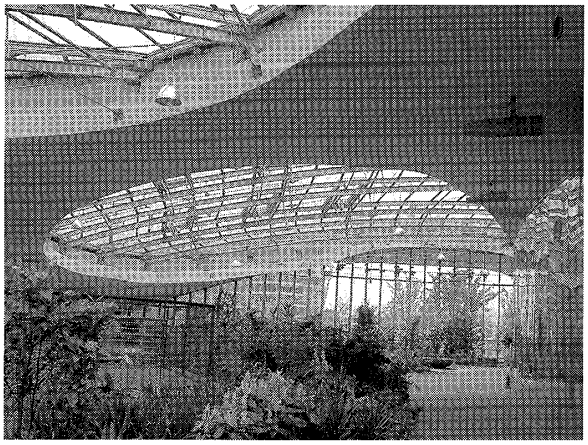
* 北海学園大学工学部建築学科
* Department of Architecture and Building Engineering, Hokkai–Gakuen University

が多い．しかし，拡張ESO（Evolutionary Structural Optimization）法は，不要な領域を削除すると同時に補強が必要な部位に新たな領域を追加する自己増殖機能を有している．このため，繰り返し収束計算の初回から必要以上に細かな要素分割を行う必要がないなどの利点を有する．ただし，計算途中で領域の追加，削除がなされるため，要素分割の再評価が必要となる．

本研究の目的は，拡張ESO法への適用を想定した自己増殖と退化を繰り返す自由曲線形状の２次元連続体に適用可能な自動要素分割プログラムの開発を試みることである．開発においては，解析者のデータ入力負荷を極力減らすことを念頭に置き，符号付距離関数値を効率よく計算するfast marching method（FMM）を使用して，複雑な自由曲線形状体を分割する手法を採用した[2]．計算例として，鋏および北海道地図の分割例を示す．



写真－１　ぐりんぐりん外観



写真－２　ぐりんぐりん内部

2　要素分割手法の概要

本研究で試みた自動要素分割においては，Per–Olof Persson[2]に倣い領域を分割するため，符号付距離関数とサイズ関数を必要とする．符号付距離関数とは，領域内を外部境界線，内部境界線からの負符号付距離，境界線上を０で定義した関数である．サイズ関数とは，領域内任意点の要素サイズを決定するための指標であり，符号付距離関数の値，境界線の曲率，メディアルアキシス（骨格軸）距離を参照して定める．符号付距離関数の値，境界線の曲率，メディアルアキシス距離の算定は，目的に適うサイズ関数を決定するための準備計算として位置付けられる．この様な手順で得られるサイズ関数値に基づき，分割要素の大きさが定められる．

陽な関数式で表現される円や矩形など単純な形状に対する符号付距離関数の値は，容易に計算できるが，任意の複雑な自由曲線に対する陽な式表現は不可能で，計算が困難となる．本論では，これを解決する手段としてfast marching method（FMM）[3]を使用し，バックグラウンドメッシュのグリッド点の符号付距離関数値を効率的に求めている．

3 fast marching method

fast marching method（FMM）は，フロントの伝播（front propagation）を記述する境界値問題を後退差分スキームに置き換えて，最適な計算順序となる様にバックグラウンドメッシュのグリッド点を選択しながら，収束計算無しで解く手法である．距離関数値を求める問題に当てはめると，自由曲線である境界線が時間$T(x,y)=0$のフロントラインであり，時間経過と共に境界線の法線方向に一定速度Fでフロントラインが領域の内部に進展することを想定している．したがって，到着時間$T(x,y)$を符号付距離関数値に読み替えることができる．

この種の問題は，Eikonal方程式と呼ばれる境界値問題として，次の様に定式化される．

$$|\nabla T|F=1 \tag{1}$$

ただし，T：到着時間，F：速度

なお，速度Fは位置(x,y)のみに依存し，フロントは常に一方向にのみ進展すると仮定している．FMMでは，空間を均一なグリッドに分割して，（1）式のEikonal方程式を下式の様に差分近似する．

$$\left[\max\left(D_{ij}^{-x}T,\ -D_{ij}^{+x}T,\ 0\right)^2+\max\left(D_{ij}^{-y}T,\ -D_{ij}^{+y}T,\ 0\right)^2\right]^{1/2}=\frac{1}{F_{ij}} \tag{2}$$

ただし，$D_{ij}^{-x}T=\dfrac{\left(T_{i,j}-T_{i-1,j}\right)}{\Delta x}$，$D_{ij}^{+x}T=\dfrac{\left(T_{i+1,j}-T_{i,j}\right)}{\Delta x}$

FMMの計算手順は，オリジナル画像の２値化画像をローパスフィルタリング処理して得られる等高線図から，図－１（a）に示す様に境界線（border line）とnarrow bandのouter line, inner lineを確定した後，次の様に進められる．ただし，以下では到着時間を符号付距離関数値に置き換え説明する．また，後述するバックグラウンドメッシュグリッドの生成（図－１（b）の例では縦，横２ピクセル間隔）は既に終えているものとする．

STEP０：初期化；図－１（b）に示す設計領域外（Alive）グリッド点の符号付距離関数値を$T_{ij}=0$，設計領域内（Far Away）グリッド点の符号付距離関数値を$T_{ij}=\infty$と置く．

STEP１：narrow band内グリッド点の符号付距離関数値を計算する．このとき，境界線より外側のT_{ij}は正符号，内側のT_{ij}は負符号とする．以下のSTEPでは，境界線に隣接する設計領域内のグリッド点（図－１（b）のマゼンタ点）を採択点（Accepted Point）と見做し，その符号付距離関数値を既知として計算を開始する．

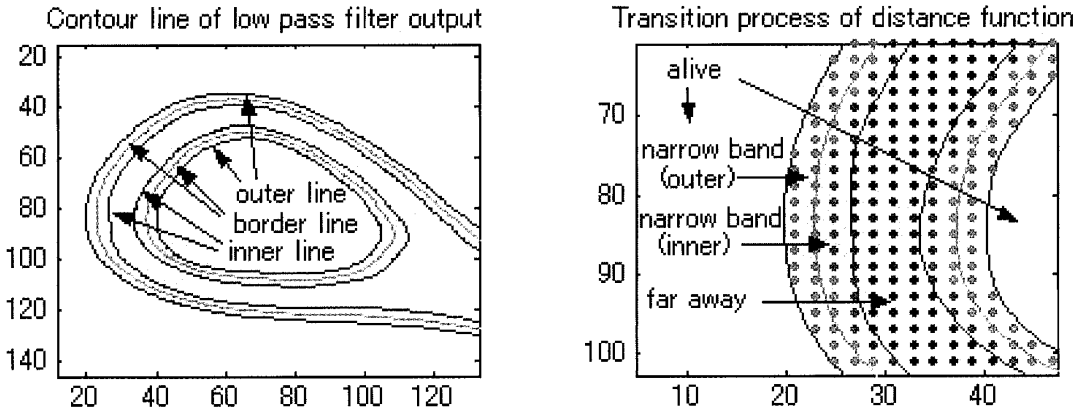
STEP２：Trial Zone（マゼンタの採択点を除く図－１（b）の内側narrow bandに示すレッド点で構成される）の中から$\left|T_{ij}\right|$の最小値；$T_{i\,\min,j\,\min}$を探し，その点を試行点（Trial Point）とし採択点の集合に加え，Trial Zoneからはずす．

STEP 3 ：$T_{i\,\min, j\,\min}$の上下左右に隣接する４点を取り出し，その中でFar Awayに属する点があればTrial Zoneに加え，Far Awayからはずす．

STEP 4 ：Tの２次方程式となる差分近似式（２）を用いて，試行点の４隣接点の内，$T_{ij}=\infty$である点について，T値を計算する．

STEP 5 ：全てのグリッド点が採択点と認識される迄（図－１（b）のレッドおよびグリーン点が全てマゼンタ点に変わる迄）STEP 2 ～STEP 4 を繰り返す．

即ち，FMMは，計算開始時における採択点の集合を決定した後，STEP 2 ～ 4 に示された順序に従い，タグをTrialからAccepted或いはFar AwayからTrialに付け替えながら，符号付距離関数値を次々に計算する手法である．この様な最適計算順序に従うことにより，繰り返し計算を必要とせずに効率的に（１）式を満足する解が得られる．なお，FMMの詳細は，参考文献４）に記述されている．



(a) 境界線；鋏の取手拡大図　　(b) 領域名称；(a) の一部拡大図

図－１　境界線と領域名称

4　要素分割の算定フロー

デジカメで撮影した鋏の画像を例に挙げて，要素分割の算定フローについて説明する．具体的な算定フローは表－1, オリジナル画像からサイズ関数値を得る迄の過程は図－２（a）～(f) に示す通りである．その考え方は，バックグラウンドメッシュのレイヤーの上にFEM要素分割レイヤーが重なる２層構造を基本としている．以下にそれらの要点について述べる．

表－１（１），（２）の境界線の決定は，任意の自由曲線オリジナル画像を読み込み要素分割する際に必要な手続きである．ただし，構造物の最適化計算を想定する場合には，応力や歪エネルギーなどの基準量の閾値が境界線となるため，この様な画像処理の手続きは不要となる．

（３）～（９）は，要素節点のサイズ関数値を得るまでの一連の計算手順を示している．

表－1　自動要素分割算定フロー

start

↓

(1) 構造体形状のオリジナル画像読み込み，オリジナル画像の２値化

↓

(2) バイナリ画像のローパスフィルタリング画像抽出および境界線，narrow band 境界線の決定

↓

(3) バックグラウンドメッシュグリッドの生成および
narrow band 内バックグラウンドメッシュ離散点の符号付距離関数値の計算

↓

(4) fast marching method によるグリッド離散点の符号付距離関数値の計算

↓

(5) 境界線の曲率計算

↓

(6) メディアルアキシスの確定および fast marching method による領域内離散点の
メディアルアキシスからの距離計算

↓

(7) 領域内バックグラウンドメッシュ離散点のサイズ関数値の計算

↓

(8) 要素節点候補座標値の生成（一様密度）および候補節点サイズ関数値の計算
（バックグラウンドメッシュ離散点のサイズ関数値に基づく内挿計算）

↓

(9) 領域外節点候補の削除，領域内節点候補の密度調整（サイズ関数値に依存）

↓

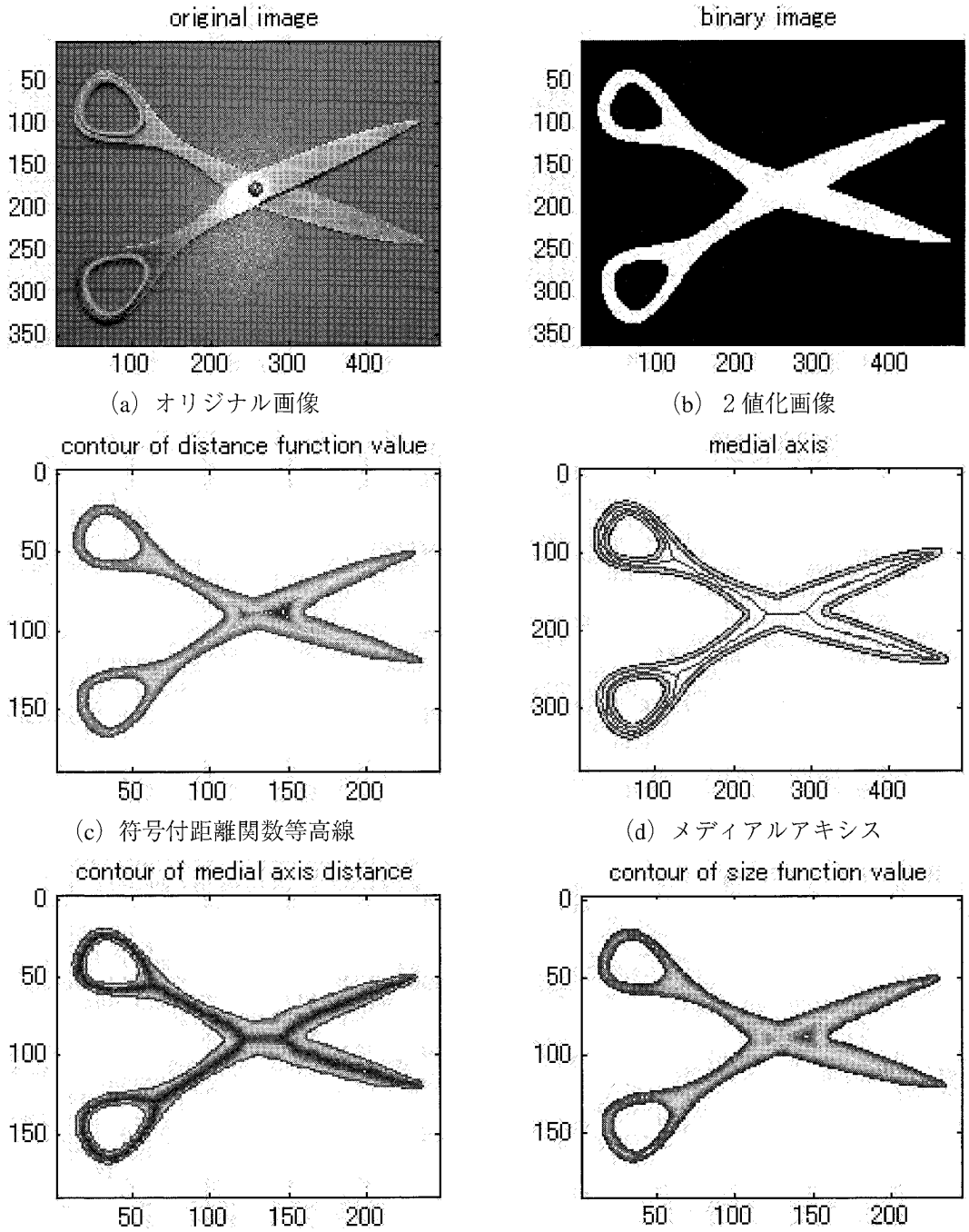
repeat : (10) デローニー三角分割の実行，凹部，内部境界線付随領域外要素の棄却，要素分割形状の描画
(11)節点移動による要素形状の改善，形状全体について満足のゆく改善が得られる迄 : **until**

↓

(12) 後処理（領域内中抜け要素，領域外飛び出し要素の解消）

↓

end



(a) オリジナル画像 (b) 2値化画像

(c) 符号付距離関数等高線 (d) メディアルアキシス

(e) メディアルアキシス距離等高線 (f) サイズ関数等高線

図－2 サイズ関数値の算定プロセス（鋏）

（3），（4）は，

前項3のfast marching methodで述べた説明に該当する部分であり，そこでは事前準備としてバックグラウンドメッシュを設定した後，バックグラウンドメッシュのグリッド点の符号付距離関数値を計算する.（5），（6）は，境界線の曲率計算，メディアルアキシスの決定，メディアルアキシス距離計算である.（7）では，バックグラウンドメッシュのグリッド点のサイズ関数

値を（4）～（6）で得られた値；符号付距離関数値，境界線の曲率，メディアルアキシス距離に基づき計算する[2]．ただし，構造解析における要素分割では，応力や歪エネルギーなどの基準量の大きさや変化率を考慮することが，境界線の曲率，メディアルアキシス距離より優先される*1．

（8），（9）は，要素節点の候補を一様密度で生成し，既に計算済みのグリッド点のサイズ関数値から内挿計算により，候補節点のサイズ関数値を定める．その際，サイズ関数値が小さい領域では要素節点の配置が密になる様に，サイズ関数値が大きい領域では配置が疎となる様に確率的に調整する．

(10) は，デローニー三角分割の実行と不要な要素の棄却からなる．最初に（9）までの手続きで配置を終えた要素節点を基に，matlabの組み込み関数delaunaynを用いてデローニー三角分割を実行する．この組み込み関数は，解析対象の外部境界凹領域部および内部境界に付随する設計領域外も含めて要素を生成するので，分割後の形状は凸領域をなし設計領域外の一部を含む．それ故，設計領域外の不要な要素を棄却する条件;「三角形要素重心位置の符号付距離関数値がouter–lineより外ならば領域外要素と見做す」を設定した．また要素形状の改善策として，要素毎に次の条件;「三角形要素の頂角が10度未満ならば棄却要素と見做す」を設定した．そして，(11) で要素長が望ましい辺長より短い場合には辺長を延ばす方向に要素節点を微小移動させて，領域全体の分割形状が滑らかになる迄 (10)，(11) を指定回数繰り返す計算を行った．

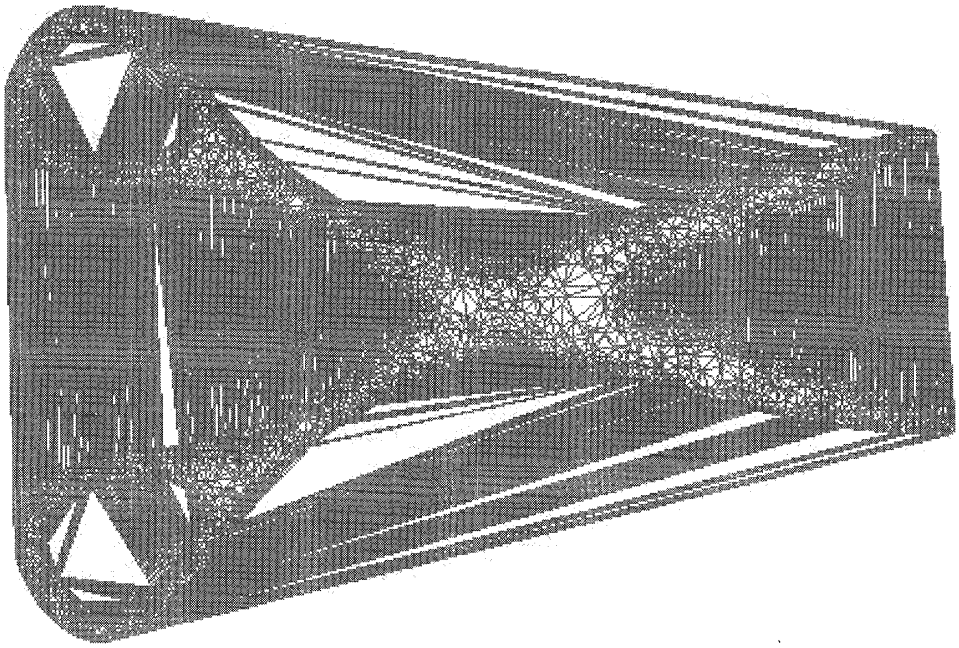
最後に，頂角10度未満の中抜け要素の回避のため当該要素最小辺長の隣接節点同士の結合，および設計領域外への飛び出し要素の消去を実行する後処理をした．

5　ピクセルイメージ画像の分割例

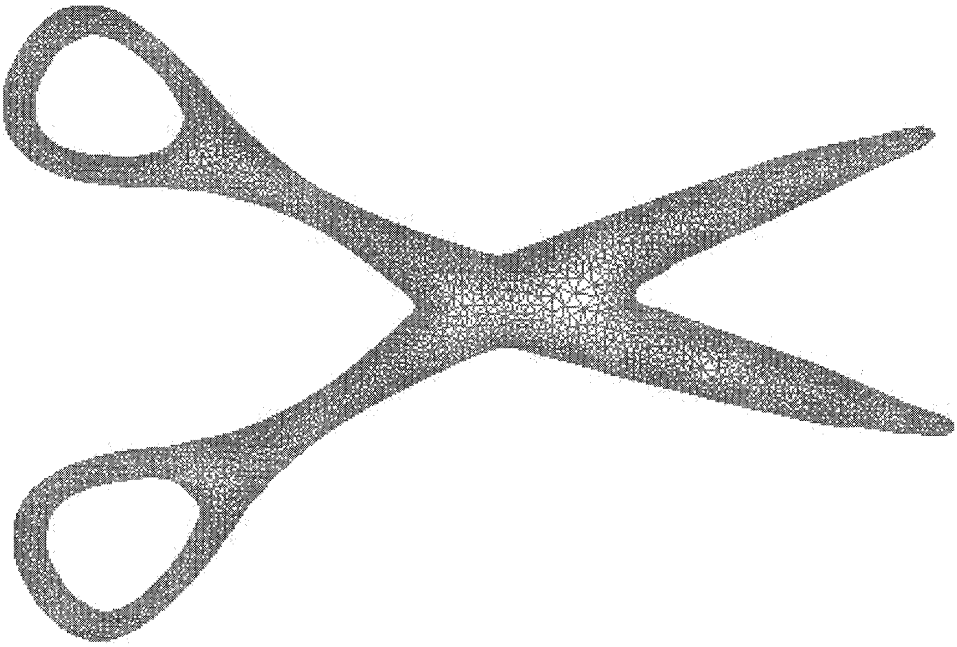
図－3は，matlabの組み込み関数によるデローニー分割直後の鋏の要素分割図である．一方，図－4，5は不要な要素の削除，要素形状の改善を繰り返し実行して得られた最終結果である．同様に北海道地図の例においては，図－6に示すサイズ関数の算定プロセスを経て，図－7，8，9に示す通りの結果が得られた．なお，計算所要時間は，繰り返し回数40回の条件で，鋏（要素数9398)；186.9秒，北海道地図（要素数4596)；58.8秒であった．計算時間は，要素サイズを大きくして要素総数を減らす或いは節点の移動量に関する収束判定基準を設けて繰り返し回数を減らす等すると半減できる．

図－4，5，図－8，9から，分割形状は極めて良好であり，内部境界や凹部を有する領域についても対応可能であることが分かる．また，表－2に示す様に，良好な三角形要素の形状（30°≦頂角＜120°）が全要素の約95％を占め，頂角10度未満の超扁平な要素は無いことが分かる．また，最大要素辺長比も50未満であるので，本手法を用いて自動要素分割してFEM解析

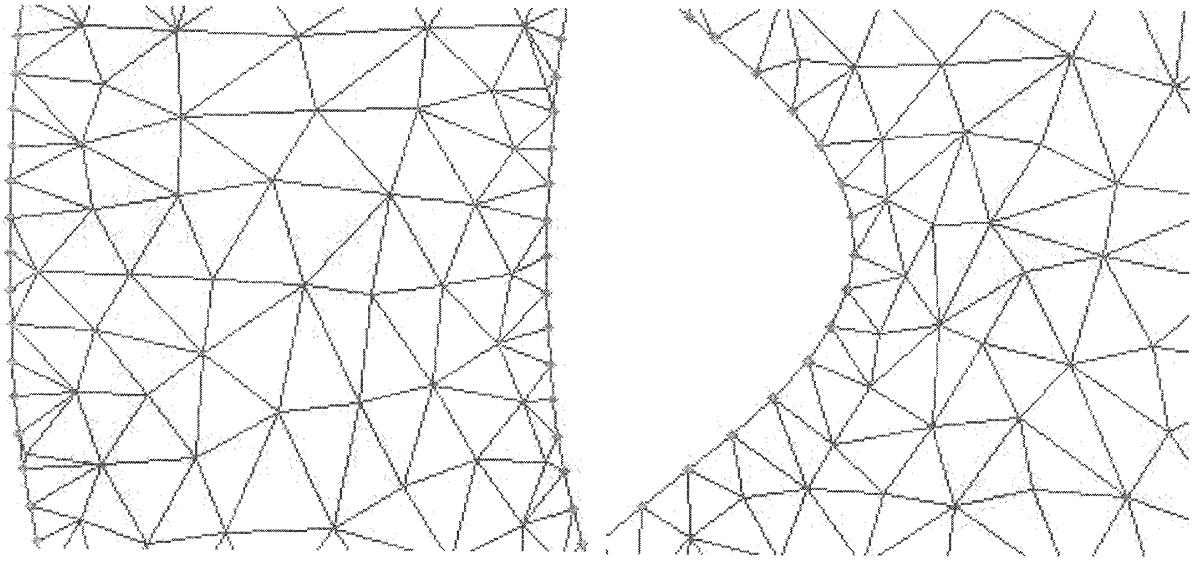
を実行しても解析精度が低下することは無いものと思われる．ただし，領域境界線近傍でのサイズ関数値の設定の仕方によっては，§４の末尾で述べた後処理をしても，境界線に沿う頂角10度未満の中抜け要素，凹部設計領域外への飛び出し要素が極めて僅か（１～３個程度）であるが残る場合があった．これを解消するにはサイズ関数値の設定について，若干の慣れが必要と思われる．なお，本手法の構造物への適用については今後の課題としたい．



図－３　鋏のスタート時分割形状

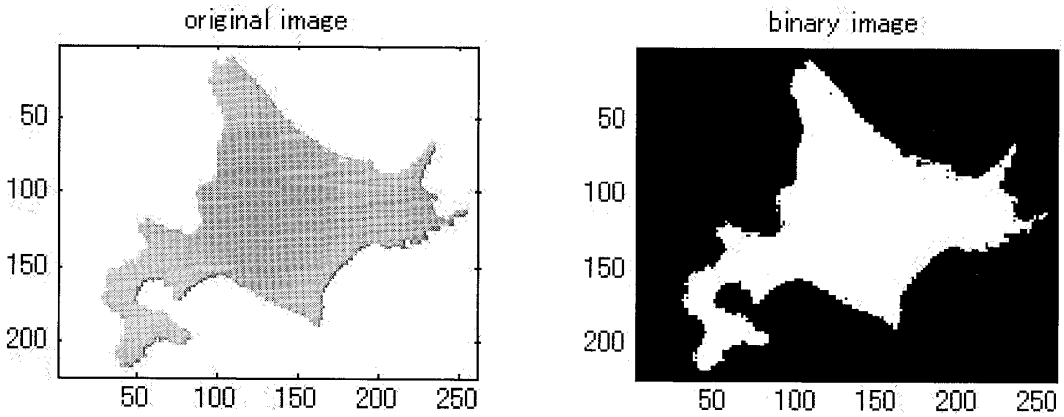


図－４　鋏の最終分割形状



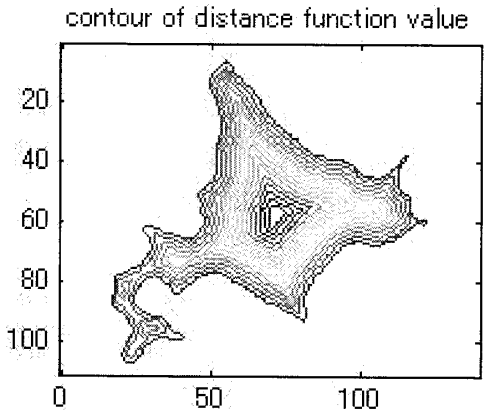
(a) 鋏の取手　　(b) 鋏の交差部左側

図－5　鋏最終分割形状の部分拡大

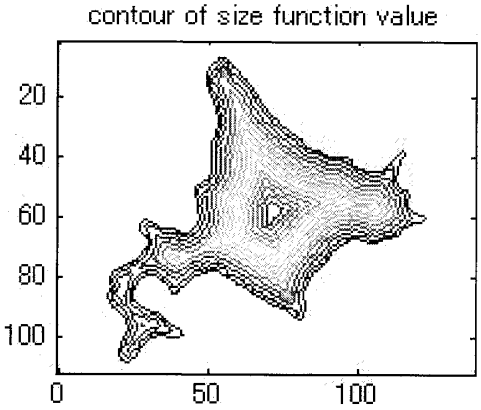


(a) オリジナル画像

(b) 2値化画像

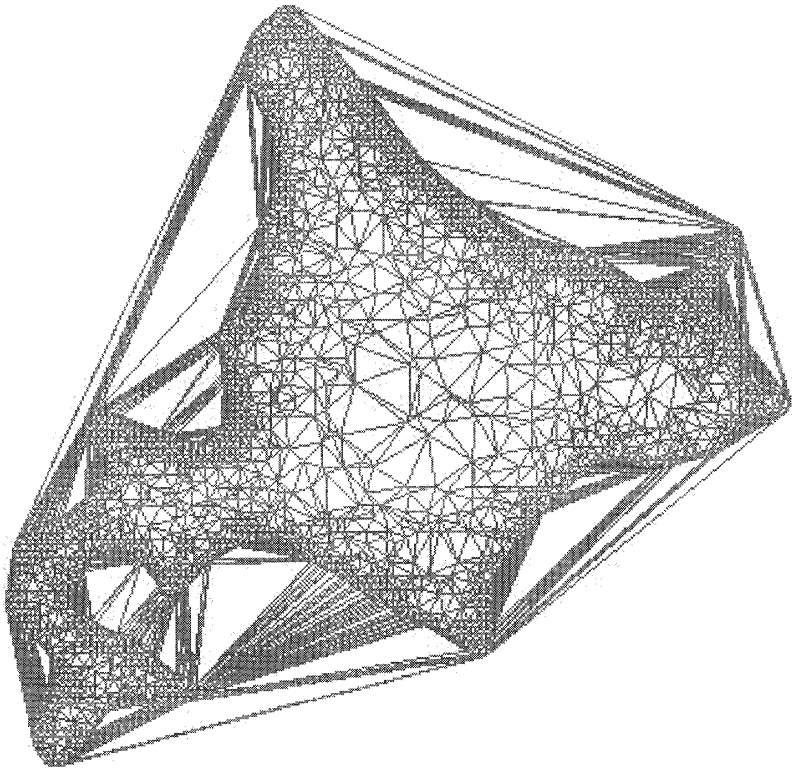


(c) 符号付距離関数等高線

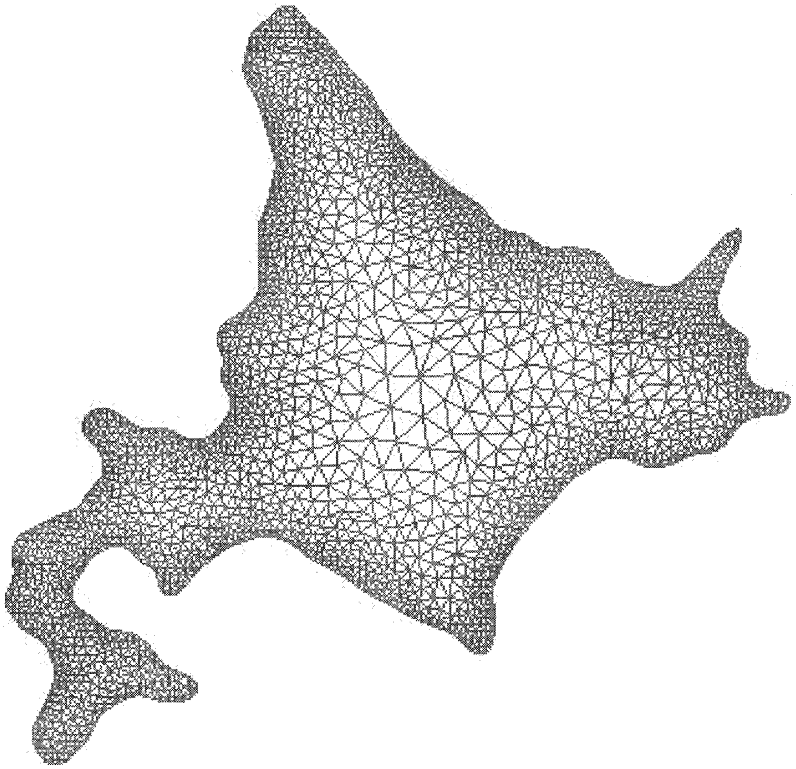


(d) サイズ関数等高線

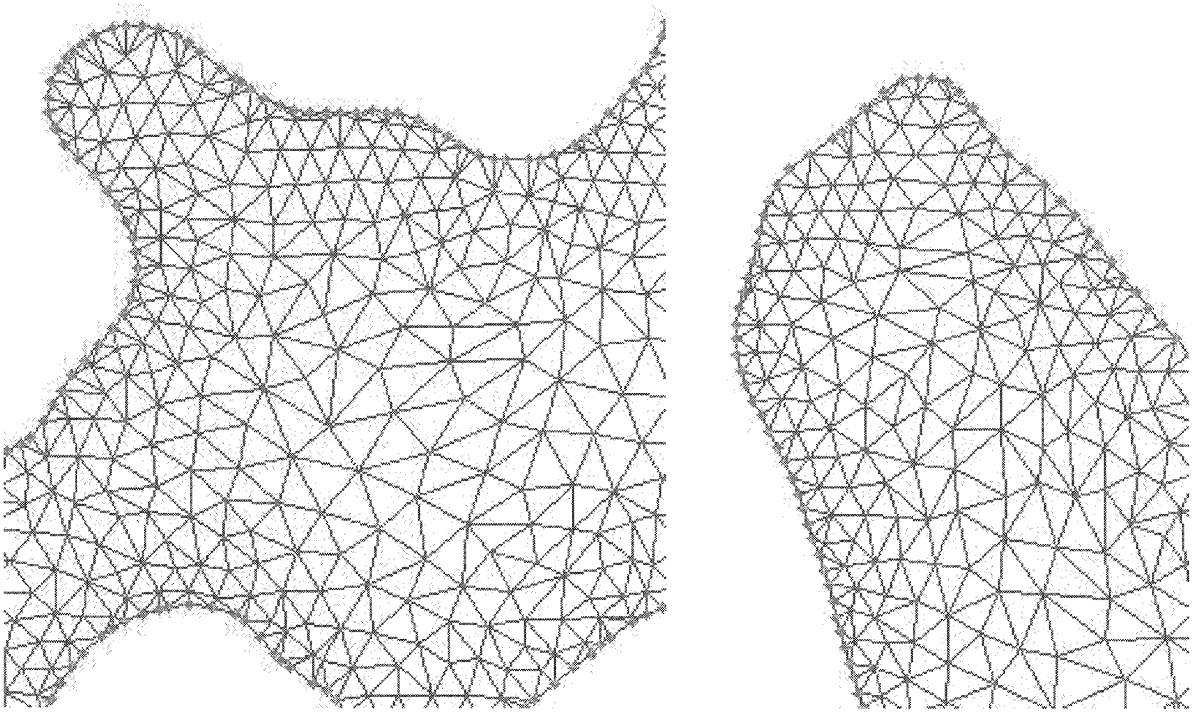
図－6　サイズ関数値の算定プロセス（北海道地図）



図－7　北海道地図のスタート時分割形状



図－8　北海道地図の最終分割形状



(a) 札幌周辺　　(b) 稚内周辺

図－9　北海道地図最終形状の部分拡大

表－2　三角形要素の形状分析

三角形要素節点の頂角範囲／最大要素辺長比	鋏	北海道地図
30°≦頂角＜120°：形状良好	96.14（%）	94.48（%）
20°≦頂角＜30°および120°≦頂角＜140°：やや扁平	3.07（%）	4.34（%）
10°≦頂角＜20°および140°≦頂角＜160°：扁平	0.79（%）	1.18（%）
最大要素辺長比（＝最大要素辺長／最小要素辺長）	42.68	41.86

6　まとめ

拡張ESO法に適用することを念頭に置き，fast marching methodを用いた自由曲線を有する2次元任意形状の自動要素分割プログラムの開発を試みた．その結果，許容範囲内の現実的計算時間で自動分割が可能なこと，非常に良好な分割形状が得られることが明らかとなった．

脚注

＊1　構造解析に用いるFEM要素分割は，応力や歪エネルギーの大きさ，変化率を考慮して定める必要があるため，境界線の曲率とメディアルアキシス距離のサイズ関数に及ぼす影響は相対的に小さくなる．それ故，簡単のために図－2（f）に示したサイズ関数値は，符号付距離関数値のみを考慮して決定した．

参考文献

1）TOD'S表参道，MIKIMOTO Ginza2, アイランドシティ中央公園中核施設ぐりんぐりん

2）Per-Olof Persson : "Mesh Generation for Implicit Geometries", Doctor Thesis, Massachusetts Institute of Technology, February 2005.

3）J. A. Sethian : "A fast marching level set method for monotonically advancing fronts", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol.93, pp.1591-1595, February1996, Applied Mathematics.

4）J. A. Sethian : "Level Set Methods and Fast Marching Methods", Cambridge University Press,1996.